Innovación curricular en precálculo y la potenciación de estrategias en la resolución de problemas[1]

Cristina Carulla y Pedro Gómez
"una empresa docente", Universidad de los Andes
mcarulla@uniandes.edu.co • pgomez@uniandes.edu.co

En este estudio exploramos la actuación de los estudiantes en la resolución de un problema sobre funciones racionales. El propósito era el de investigar si había diferencias, y cuáles eran, entre la actuación de estudiantes que habían seguido una innovación curricular que involucraba las calculadoras gráficas y la actuación de otro grupo de estudiantes que seguían un diseño curricular tradicional que no involucraba la tecnología. Para estos efectos, se diseñó una tarea sobre funciones racionales cuya solución no requería necesariamente la calculadora. Esta tarea fue resuelta en grupos de dos estudiantes, tanto por aquellos estudiantes que participaron en la innovación curricular, como por aquellos que seguían el currículo tradicional. Se desarrolló un conjunto de instrumentos de codificación y análisis de las soluciones presentadas que buscaban identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes. Encontramos que los estudiantes que participaron en la innovación curricular utilizan una mayor variedad de estrategias para resolver el problema, logran relacionar de manera más efectiva los diferentes sistemas de representación y tienen mayor éxito en la solución del problema.

Introducción

Con motivo de un proyecto de investigación en el cual se exploraban los efectos de la utilización de la calculadora gráfica en un curso de precálculo, el diseño curricular de este curso tuvo muchos cambios (Ver el artículo *Innovación curricular en precálculo con calculadoras gráficas* en este volumen). Algunos de estos cambios tienen que ver con las visiones de los profesores involucrados en el proyecto sobre las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje (Carulla y Gómez, 1996). Se encontró que los estudiantes que participaron en este curso desarrollaron habilidades descritas por Resnick sobre el pensamiento de alto nivel (ver nuestro artículo *Tecnología y resolución de problemas* en este volumen). En este estudio se quería comparar el trabajo que realizaron los estudiantes de dos secciones diferentes de este curso. Los estudiantes de la primera sección siguieron el nuevo diseño curricular y los estudiantes de la segunda sección siguieron el diseño tradicional.

Se escogió un problema para el cual hay diferentes estrategias para llegar a la solución. Este problema tiene una única respuesta e involucra varios aspectos de los objetos que se ponen en juego. Invita a la utilización de diferentes representaciones de los objetos matemáticos que se están tratando y al mismo tiempo invita a reforzar la relación que existe entre una representación simbólica y su representación gráfica.

Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La visión que la comunidad internacional tiene de la educación matemática ha evolucionado durante los últimos treinta años. En la actualidad, existe un cierto consenso acerca de cuáles deben ser las metas de la educación matemática; qué se debe

1. El estudio que se reporta aquí fue apoyado en parte por la Fundación para el Avance de la Ciencia y la Tecnología del Banco de la República.

buscar en el aprendizaje de las matemáticas; qué tipo de enseñanza está acorde con estos propósitos; qué papel juega la resolución de problemas en el desarrollo del pensamiento matemático de alto nivel; y de qué manera influyen las creencias y actitudes de profesores e investigadores en la búsqueda de estos ideales. Esta nueva visión acerca del aprendizaje de las matemáticas implica la necesidad de generar nuevas aproximaciones acerca de la forma como se puede lograr este tipo de formación matemática.

La resolución de problemas juega un papel trascendental en esta aproximación novedosa a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De hecho, se espera que el estudiante construya su conocimiento matemático al enfrentar, dentro del contexto social del salón de clase, problemas para los que no conoce de antemano una estrategia de solución apropiada, lo suficientemente complejos para significar un reto y que ponen en juego un conocimiento matemático relevante (Gómez,1996).

El papel central que, en la actualidad, juega la resolución de problemas en la educación matemática resulta natural como característica intrínseca de las mismas matemáticas. Se busca entonces que el estudiante desarrolle, a través de la actividad de resolución de problemas entre otros, un pensamiento matemático de alto nivel. Resnick (1987, citado en Romberg, 1993) define este tipo de pensamiento de acuerdo a una serie de características que se encuentran en claro contraste con la tradición de las matemáticas escolares (que se muestran en paréntesis):

- El pensamiento de alto nivel es *no–algorítmico*. Esto es, el camino para la acción no se encuentra completamente especificado con anterioridad (continua siendo principalmente algorítmico).

- El pensamiento de alto nivel tiende a ser *complejo*. El camino total no es “visible” (hablando mentalmente) desde un único punto de vista (ejemplos estándar con caminos visibles).

- El pensamiento de alto nivel da lugar frecuentemente a *soluciones múltiples*, cada una con costos y beneficios (soluciones únicas).

- El pensamiento de alto nivel involucra la aplicación de *múltiples criterios* que, en ocasiones, entran en conflicto entre ellos (simplificación a criterios sencillos que se encuentran bien definidos).

- El pensamiento de alto nivel involucra frecuentemente la *incertidumbre*. No se conoce todo lo que se requiere para desarrollar la tarea (certeza – se ha dado toda la información que se requiere).

- El pensamiento de alto nivel requiere la *auto–regulación* del proceso de pensamiento. No se puede reconocer el pensamiento de alto nivel en un individuo cuando es un tercero quien determina lo que se debe hacer en cada momento (regulación externa).

- El pensamiento de alto nivel requiere la *asignación de significado*, encontrando la estructura subyacente a un desorden aparente (el significado está dado o se supone).

- El pensamiento de alto nivel requiere de *esfuerzo*. Se requiere gran cantidad de trabajo mental con el propósito de desarrollar las elaboraciones y los juicios involucrados (trabajo que normalmente involucra ejercicios estándar tan simplificados que requieren de muy poco esfuerzo).

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Uno de los resultados importantes del programa de investigación que realizamos sobre calculadoras gráficas y precálculo fue el cambio en el diseño y desarrollo curricular (Carulla y Gómez, 1996; Gómez y Rico, 1995). El problema que se dio a resolver a los estudiantes surgió dentro de este contexto. El nuevo diseño curricular involucra muchos de los aspectos que se acaban de mencionar. Pensamos que el antiguo diseño curricular presenta diferencias con el nuevo diseño y queríamos explorar si esta diferencia se expresaba en la actuación de los estudiantes al realizar una tarea. Para ello quisimos explorar las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de un problema particular.

Las preguntas que nos hicimos fueron las siguientes: ¿Qué estrategias utilizan los estudiantes dentro del proceso de resolución del problema? ¿El tipo de enseñanza que se le da a un estudiante puede influir en el tipo de estrategia que desarrolla un estudiante? ¿De qué manera?

El problema fue resuelto por estudiantes de dos secciones diferentes. Las secciones se caracterizaron por tener dos diseños y desarrollos curriculares diferentes. En la sección 1, se aplicó el nuevo diseño curricular que involucraba la utilización de las calculadoras gráficas, y en la sección 2 se aplicó el antiguo diseño curricular. Nos interesaba identificar categorías que permitieran organizar las estrategias utilizadas por los estudiantes de las dos secciones; identificar procesos de la actividad de los estudiantes que pudieran ser expresión del pensamiento de alto nivel; y comparar las dos secciones.

ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Contexto

Haremos una breve descripción del problema que se entregó a los estudiantes de las dos secciones. Este problema busca inducir algunos aspectos del pensamiento de alto nivel como el hecho de que no es algorítmico, el camino para resolverlo no es visible, la auto-regulación, asignación de significado y esfuerzo.

Esta actividad busca hacer explícito el sentido de las desigualdades y relacionar múltiples dimensiones (sistemas de representación, estatus operacional–estructural) de los objetos involucrados. Para tener éxito en el trabajo se requiere tener una visión de una desigualdad como una relación que sirve para comparar funciones, cada una de las cuales es a su vez un objeto. Al dar información sobre los objetos en forma parcial, no redundante y en diferentes representaciones, se obliga al estudiante a tomar en cuenta el significado de cada concepto en cada representación antes de poder utilizarlo. Permite formular conjeturas que se pueden contrastar y reformular con la información que se presenta y da al proceso de resolución de desigualdades una visión diferente de la tradicional (en la que el trabajo con desigualdades se traduce en un proceso de manejo simbólico).

Es importante que los estudiantes se hayan familiarizado con las funciones racionales y cúbicas y que puedan manejar la representación simbólica de cada una; también deben saber cómo encontrar los ceros de un polinomio; Sin embargo, en la situación propuesta, los ceros del polinomio que se obtiene no son racionales.

Problema que se entregó a los estudiantes

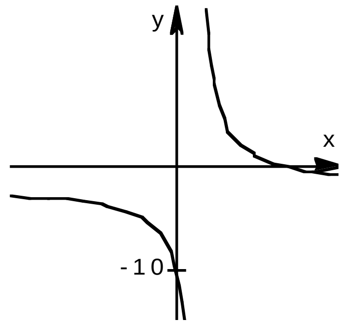
La figura Nº 1 muestra el texto del problema que se entregó a los estudiantes.

La siguiente desigualdad: $x^3 - p \geq g(x)$ tiene el siguiente conjunto solución:

[0,d) U [2.40,∞).

Se sabe que:

- p y d son números positivos
- La figura muestra la gráfica de g(x)
- g(x) corta el eje de las X en 4.
- -3 no pertenece al rango de g(x).



Halle p, d y g(x).

Figura Nº 1.

Organización

La sección 1 tenía como profesor uno de los investigadores y utilizaba el nuevo diseño curricular. La sección 2 tenía como profesor un profesor del departamento de matemáticas y utilizaba el diseño curricular antiguo. Se pidió a este profesor que analizara el problema y opinara si sus alumnos tenían los conocimientos suficientes para resolverlo.

La prueba se realizó en las dos secciones. Se dividió el curso en grupos de dos estudiantes cada uno, de tal manera que en la sección 1 quedaron 13 grupos y en la sección 2, 11 grupos. Para la sección 1 el profesor estuvo presente durante la prueba y se hizo en el día asignado para quiz. Estos estudiantes tenían un tiempo limitado de 45 minutos para resolverlo y ellos sabían que sus soluciones harían parte de la evaluación del curso. Para la sección 2, el esquema se manejó de manera diferente dado que el profesor no hacía parte del equipo investigador. Se le informó a los estudiantes que se les haría la prueba y que ésta no entraría dentro de sus pruebas de evaluación del curso. Igualmente se les explicó el motivo de nuestra presencia.

Recolección y codificación de la información

La información se recolectó en la forma de las soluciones propuestas por los grupos de estudiantes de las dos secciones. Se diseñó un instrumento de codificación de esta información en una tabla. En las filas se colocaron los pasos por donde los estudiantes pasaban en la resolución del problema y en las columnas se colocó el sistema de representación utilizado en el paso que estaba dando (representación gráfica, representación simbólica, manipulación simbólica y representación verbal).

Se codificó la información de la siguiente manera: a la hoja de respuesta de un estudiante se le asignaba un número. Para cada paso que iba realizando se le asignaba una letra en el orden alfabético y se ubicaba en la tabla el paso que estaba dando.

La tabla se organizó de tal manera que cada fila se dividía en dos identificadas como G1 (sección 1) y G2 (sección 2). El análisis de la información se hizo produciendo una nueva tabla, idéntica a la primera en cuanto a los títulos de las filas y las columnas, pero en la que en cada casilla se contaron los estudiantes que realizaron el paso correspondiente en la representación que identificaba la casilla. Se calcularon los porcentajes y se realizó una comparación entre las dos secciones.

RESULTADOS

No presentamos aquí la información de la primera tabla. Esta es extremadamente extensa y detallada para el espacio disponible. Por las mismas razones, presentamos solamente apartes de la segunda tabla con el propósito de dar una idea de la forma en que se codificó y analizó la información. En ella se aprecia la riqueza de caminos de solución que presenta el ejercicio. Para cada casilla de la primera tabla se sumó el número de estudiantes que pasaban por esa casilla y se sacó el porcentaje relativo al número de estudiantes de cada sección. En la columna *Suma* se contabilizó la cantidad de estudiantes que pasaron por la fila en cuestión, independientemente de la representación utilizada. La última columna que lleva el nombre *Diferencia* contiene el resultado del siguiente cálculo, por fila: cociente del cociente de las sumas por fila de cada una de las secciones con el cociente del número de grupos de la sección 1 sobre el número de grupos de la sección 2. Este cálculo pretende resaltar, teniendo en cuenta el tamaño relativo de las dos secciones, la diferencia entre ellos con respecto a la realización de un paso dado. Los puntos suspensivos indican los lugares donde se cortó la tabla para ser presentada aquí.

		Representación gráfica		**Representación simbólica**		**Manipulación simbólica**		**Representación verbal**		**Suma**	**Diferencia**
		#	**%**	**#**	**%**	**#**	**%**	**#**	**%**		
Halló g(x)	G1			13	100%					13	∞
	G2										
Hallo f(x)	G1			7	54%					7	5.9
	G2			1	9%					1	
Halló d	G1			12	92%					12	∞
	G2										
Halló p	G1			8	62%					8	6.7
	G2			1	9%					1	
Halló a para el segundo tipo de expresión simbólica de g.	G1			2	15%					2	∞
	G2										
Halló todos los valores y los reemplazó en el intervalo solución y expresando la desigualdad				2	15%					2	∞
Utilizó la información $[0, d) \cup [4.1, \infty)$ para describir el intervalo solución	G1	2	15%					3	23%	5	0.84
	G2	4	36%			1	9%			5	
describe la solución con respecto a los diferentes valores	G1							6	46%	6	∞
	G2										
Habló de los valores a encontrar								1	8%	1	∞

Tabla Nº 1.

		Representación gráfica		**Representación simbólica**		**Manipulación simbólica**		**Representación verbal**		**Suma**	**Diferencia**
		#	%	#	%	#	%	#	%		
Utilizó la información $x^3 - p \geq g(x)$ para buscar el valor de p	G1							1	8%	1	0.17
	G2					5	45%			5	
...											
Referente a g(x)											
identificó la función racional de la siguiente manera: $\frac{a(x-r1)}{(x-r2)}$	G1			10	77%			1	8%	11	∞
	G2										
Se utilizó la siguiente expresión simbólica de la función racional: $\frac{a(x-c)}{(x-d)}$ donde c es 4 y a es -3 y d es la asíntota vertical	G1			11	85%			3	23%	14	∞
	G2										
Se utilizó la siguiente expresión de la función racional: $\frac{a}{x-h}+k$ donde a y h no se conocen	G1			5	38%			1	8%	6	0.63
	G2			7	64%	1	9%			8	
...											
Referente a x^3-p											
...											
Utilizó el hecho de que $g(0) = 0^3 - p$ para hallar el valor de p	G1			2	15%	3	23%	2	15%	7	∞
	G2										
Argumento o utilizó el que en cero ambas funciones son iguales para hallar el valor de p								2	15%	2	1.69
				1	9%					1	
Argumenta el valor de p a partir del comportamiento de las funciones								1	8%	1	∞
Utilizó la información de que el conjunto solución comienza por o para hallar p								1	8%	1	∞
Quiso comprobar en que puntos las dos funciones eran iguales						2	15%			2	∞
Identificó (0,-10) como punto de intersección entre $g(x)$ y $x^3 - p$	G1	6	46%					1	8%	7	∞
	G2										
Identificó (2.41,?) como punto de corte entre $g(x)$ y $x^3 - p$	G1	9	69%	1	8%					10	4.23
	G2	2	18%							2	
Dio cualquier valor a p	G1							1	8%	1	0.28
	G2			2	18%	1	9%			3	

Tabla Nº 1.

INTERPRETACIÓN

Los apartes de la tabla que se acaba de presentar evidencian la riqueza en las estrategias utilizadas. No es objeto de este artículo entrar en la descripción de cada una de ellas. Sin embargo, a través de la descripción de los pasos por los que más frecuentemente pasó una sección podremos describir las principales características de algunas estrategias. Para realizar la descripción de la diferencia entre las dos secciones analizaremos primero la información por columnas y, en segundo lugar, la diferencia por filas. Consideraremos las casillas en donde se encuentran la mayor cantidad de alumnos.

Representación gráfica

En las soluciones encontradas, se tomaron en cuenta para esta columna las representaciones gráficas de los estudiantes describiendo qué información tenía en cuenta la representación realizada. Es así como observamos que la mayoría de los estudiantes de las dos secciones (no se encuentra una diferencia significativa) dibujaron un posible representante de la función cúbica x^3- p, colocaron la abcisa 2.41, identificaron d como valor asociado a la asíntota vertical, identificaron la asíntota horizontal y le dieron el valor -3, e identificaron 2.41 como la abcisa del punto de corte de las dos funciones. La gráfica que se muestra a continuación refleja el estándar que se realizó. Sin embargo, no todos llegaron hasta este punto. Algunos estudiantes de las dos secciones identificaron que se generaba una traslación y asociaron p a esta traslación. No obstante, éste no es un porcentaje significativo (se encuentra un porcentaje de 36% para la sección 2 y de 31% para la sección 1).

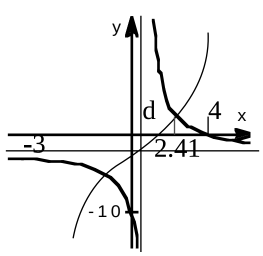
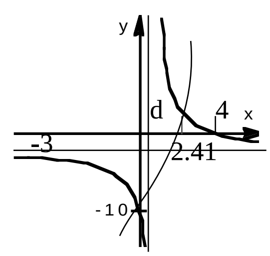
<table>
<tr><th>Gráfica realizada por los estudiantes de las dos secciones</th><th>Gráfica de un número reducido de la sección 1</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla Nº 2.

Para las dos secciones no se encuentra una gran diferencia en cuanto al tipo de gráfica realizada. Es importante anotar que en las gráfica de la izquierda se refleja el hecho de que la gran mayoría de estudiantes de las dos secciones no logró expresar gráficamente cómo debería quedar la función cúbica para que se cumplieran todos los requisitos, en particular, no se le da el valor (0,-10) al punto de inflexión. Es de anotar que solo un 27% de la sección 1 identificó en la gráfica a 0 como la abcisa del punto de corte entre las dos funciones.

Representación simbólica

En esta columna se clasificó todo lo que fuera una escritura simbólica de algún hecho pero no se anotaron las manipulaciones que se hacían. Para esto se creó otra columna.

- El primer hecho importante que deja ver una diferencia entre las dos secciones, es que la mayor parte de los grupos de la sección 1 hallaron g(x)

(100%), f(x) (54%), d (92%) y p (62%). Esto significa que las estrategias que utilizaron eran válidas para resolver el problema. Contrariamente, en la sección 2 sólo un grupo halló f(x) y el valor de p.

- En la sección 1 se destaca un 77% que identificó la función racional como $\frac{a(x-r1)}{(x-r2)}$ y un 85% que además asignó correctamente los valores de r_1 y r_2.
- En la sección 2 no hubo grupos que pasaran por estos pasos.
- En el paso en que se utilizó la expresión de la función racional $\frac{a}{x-h}+k$ donde a y h no se conocen, hay mayor porcentaje en la sección 2 (64%) que en la sección 1 (38%). Sólo un grupo de la sección 1 identificó que el valor de k era -3.
- En ambas secciones se resaltó la información g(4) = 0 y/o g(0)=-10.

Manipulación algebraica

Para la sección 1 encontramos que el mayor porcentaje (77%) está en la manipulación que se hizo para encontrar el valor de d. No era necesario efectuar más manipulaciones dado que los otros valores se podían deducir. Para la sección 2 se destaca un porcentaje de 45% en donde se trató de hacer algo a partir de la desigualdad haciendo una manipulación algebraica para tratar de encontrar el valor de p. No tuvieron éxito.

Representación verbal

Aquí podemos ver una clara diferencia entre las dos secciones. Para casi todas las filas se encuentran uno o varios grupos de la sección 1 que dan explicaciones verbales. Por el contrario sólo en cuatro filas se encuentra un grupo de la sección 2.

Diferencia

- De 49 filas que tiene la tabla, en 33 hay una mayor cantidad de grupos de la sección 1 y en 16 de la sección 2.
- Las diferencias encontradas muestran que la sección 1 tiene una mayor cantidad de grupos que pasan por las filas.

CONCLUSIONES

Se encontraron diferencias entre las dos secciones. Se puede concluir que el tipo de estrategias que utilizó la sección 1 son “eficientes” y que en la sección 2 no pudieron encontrar estrategias eficientes. Decimos que una estrategia es eficiente cuando su realización aporta significativamente a la solución del problema. Por otra parte, los grupos de la sección 1 utilizaron estrategias que se pueden catalogar como correspondientes al pensamiento de alto nivel:

- *No–algorítmico*. El tipo de pasos que pudimos encontrar en las soluciones de los estudiantes nos muestran que definitivamente no había un camino pre-establecido.
- *Complejidad*. Pensamos que el camino a seguir no era visible, es decir, que no hay un solo grupo que haya seguido la misma secuencia en los pasos. Algunos realizaron gráficas al principio, otros al final, algunos se

veían perdidos y encontraban de pronto el camino. No se encuentra una secuencia idéntica de pasos a seguir.

- *Soluciones múltiples*. En este caso concreto el problema tenía una única solución pero sí presenta múltiples caminos para recorrer.
- *Incertidumbre*. No se conoce todo lo que se requiere para desarrollar la tarea.
- *Auto–regulación*. No se puede reconocer el pensamiento de alto nivel en un individuo cuando es un tercero quien determina lo que se debe hacer en cada momento (regulación externa). Ni nosotros ni el profesor intervinimos en el trabajo que realizaron los estudiantes. Los grupos que llegaron a fabricar la solución trabajaron solos. En esta medida se puede hablar de una auto–regulación del grupo.
- *Significado*. El texto del problema presenta un desorden aparente. No obstante, las soluciones de los estudiantes buscaron la estructura subyacente.
- *Esfuerzo*. Se requiere gran cantidad de trabajo mental con el propósito de desarrollar las elaboraciones y los juicios involucrados (trabajo que normalmente involucra ejercicios estándar tan simplificados que requieren de muy poco esfuerzo). Es un problema que requiere de mucho esfuerzo. Ningún grupo de la sección pudo construir la solución del problema y se limitaron a ensayar caminos sin poder encontrar una estrategia eficaz.

Este hecho puede tener varias explicaciones: los estudiantes de la sección 1 se habían visto enfrentados a lo largo del semestre a diferentes tipos de problemas. Por otro lado, el tipo de representaciones simbólicas que se acostumbraba utilizar también puede influir. Parte central del diseño curricular de la sección 1 consiste en hacer énfasis en las diferentes representaciones tanto gráficas como simbólicas del objeto función de tal manera que a la hora de resolver un problema se cuente con una mayor cantidad de herramientas para solucionarlo. Si se escogía un tipo de representación simbólica para g(x), era mucho más fácil solucionar el problema que con otra.

Aunque desconocemos el desarrollo curricular de la sección 2, sí sabemos que los contenidos son los mismos. Esto significa que la metodología, los objetivos y la evaluación sí influyen en el tipo de habilidades que se desarrollan en los estudiantes.

La situación problemática da lugar a diferentes posibilidades para recorrer y llegar a la respuesta final que es única. Dos caminos opuestos que se pueden describir son el algebraico (que presenta un nivel de alta complejidad y para la cual los estudiantes de la sección de calculadoras gráficas no han sido preparados) y un camino que va en interacción entre lo gráfico y lo simbólico (el problema está diseñado para que este camino tenga menos dificultad para los estudiantes de la sección de calculadoras gráficas). La hipótesis que hacemos es que dado el diseño curricular que se realiza en la sección con calculadoras, estos estudiantes desarrollan más posibilidades de interacción entre los procesos gráficos y los procesos simbólicos en contraposición a los estudiantes de una sección que ven el mismo contenido matemático pero que, aunque se hace énfasis en lo gráfico, no se promueve una integración clara entre lo que se puede hacer entre lo gráfico y lo simbólico. Dada la complejidad algebraica de la solución del ejercicio, intuimos que los estudiantes de la segunda sección tendrían problemas para enfrentarlo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carulla, C., Gómez, P. (1996). Graphic calculators and precalculus. Effects on curriculum design. En Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.) *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 1-161.

Gómez, P. (1996). Riesgos de la innovación curricular en matemáticas. *Revista EMA*. 1 (2), pp. 97-114.

Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., Valero, P. (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Gómez, P., Rico, L. (1995). Social interaction and mathematical discourse in the classroom. En Meira, L., Carraher, D. (Eds.) *Proceedings of the 19th PME Conference*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, pp. I-205.

Resnick, L.B. (1987). *Education and learning to think*. Washington, DC: National Academy.

Romberg, T.A. (1993). How one comes to know: Models and theories of the learning of mathematics. En Niss, M. (Ed.)*Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.