Calculadoras gráficas y precálculo: ¿el imperio de lo gráfico?[1]

Pedro Gómez y Cristina Carulla
"una empresa docente", Universidad de los Andes
pgomez@uniandes.edu.co • mcarulla@uniandes.edu.co

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tradicionales han estados basados en una visión simbólica y procedimental de las matemáticas. Los movimientos de reforma de los últimos años han propendido por una enseñanza que, entre otras cosas, le dé más importancia al sistema de representación gráfico y a su relación con los otros sistemas de representación. La utilización de la tecnología (calculadoras gráficas y programas de computadores) se han constituido en una de las herramientas más importantes para lograr este objetivo. ¿Lo han logrado? Con base en dos proyectos de investigación (uno sobre las concepciones de los estudiantes sobre la función cúbica y otro sobre transformaciones de la función radical) en los que se introdujeron las calculadoras gráficas como parte de una innovación curricular, en este artículo se discute acerca de los efectos de la tecnología en las concepciones de los estudiantes. Se explora, en particular, la manera como la tecnología puede estar creando una nueva forma de comprender las matemáticas, en la que el sistema de representación gráfico asume un papel central, mientras que el sistema de representación simbólico se mantiene restringido a actividades particulares. El artículo discute sobre los problemas que esta nueva forma de comprender matemáticas puede generar para la investigación y la innovación en educación matemática.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares tradicionales se han caracterizado por un gran énfasis en el manejo procedimental de los aspectos simbólicos de los objetos matemáticos. Se ha argumentado repetidamente que los estudiantes construyen un conocimiento matemático extremadamente parcial (Gómez,1996) constituido principalmente por algoritmos que les permiten transformar unas expresiones simbólicas en otras. Las diferentes propuestas para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (e.g., NCTM, 1991) han insistido en que este tipo de aprendizaje debe evolucionar. Se espera que el estudiante construya un conocimiento matemático en el que se logre un mayor equilibrio e interacción entre los diferentes sistemas de representación (Kaput,1992), se obtenga un manejo estructural de los objetos matemáticos (logrando verlos como objetos sobre los que se pueden efectuar otros procedimientos; e.g., Sfard,1991) y se desarrolle la capacidad para resolver problemas prácticos que se encuentren expresados en lenguaje no matemático (Schoenfeld,1992).

La tecnología (calculadoras y programas de computador) se ha visto como una de las posibles soluciones a este problema (Dreyfus,1994; Fey,1989). La posibilidad de interactuar dinámicamente con los objetos matemáticos en diversos sistemas de representación debería permitirle a los estudiantes construir un conocimiento matemático más cercano a lo que se desea (Gómez,1997). Aunque los resultados que hasta ahora se han obtenido como consecuencia de la utilización de la tecnología en la educación matemática no son concluyentes, la mayoría de los estudios muestran

1. El estudio que se reporta aquí fue apoyado en parte por la Fundación para el Avance de la Ciencia y la Tecnología del Banco de la República.

efectos positivos que van en la dirección correcta (Dunham y Dick, 1994; Balacheff y Kaput, 1996; Ruthven,1996).

En este artículo queremos resaltar un posible problema de las aplicaciones aparentemente exitosas de la tecnología a la educación matemática. Se trata de una nueva forma de construir el conocimiento matemático por parte de los estudiantes que participan en estas experiencias. En cambio de aproximarse a los objetos matemáticos desde un punto de vista exclusivamente simbólico, los estudiantes tienden ahora a restringirse a la representación gráfica de esos objetos. Aunque este tipo de comprensión de las matemáticas tiene sus ventajas, también tiene sus desventajas. Los estudiantes "ven" los objetos matemáticos exclusivamente a partir de sus características gráficas. Al olvidar el aspecto simbólico y al conectarlo con la representación gráfica de manera parcial, la capacidad de los estudiantes para resolver problemas se reduce. No se logra un equilibrio entre los dos sistemas de representación. Aparentemente, el énfasis en salir de lo simbólico e ir hacia lo gráfico ha llevado la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a un nuevo extremo. En este artículo analizamos este tipo de problema con motivo de un proyecto de innovación curricular en precálculo que involucró las calculadoras gráficas. Después de introducir el problema de las matemáticas escolares tradicionales y del papel que la tecnología puede jugar en este problema, presentamos dos casos de estudios en los que se aprecia este problema del énfasis en lo gráfico en detrimento del manejo simbólico y resaltamos las deficiencias que resultan en la capacidad de los estudiantes para resolver problemas.

Lo simbólico y lo gráfico

Algunas ideas recientes de la educación matemática hacen énfasis en cómo los objetos matemáticos se pueden representar en diversos sistemas de representación externa y cómo la comprensión en matemáticas depende de la evolución de las representaciones internas (Hiebert y Carpenter, 1992) y de la manera como la percepción de estos conceptos evoluciona desde una perspectiva operacional (procedimientos) a una perspectiva estructural (conceptos) (Sfard,1991). La tecnología, como agente didáctico que organiza el encuentro entre el estudiante y el medio de tal forma que se generen perturbaciones del sistema, puede aportar de manera significativa en estos dos aspectos de la comprensión en matemáticas (Gómez, 1997).

Por otra parte, se hace evidente la conjunción de tres elementos que aparecen repetitivamente:

- el énfasis en la tradición de las matemáticas escolares por el manejo exclusivamente simbólico de los objetos matemáticos;
- la necesidad de que los estudiantes desarrollen un manejo de estos objetos matemáticos que tenga en cuenta la representación gráfica; y
- las posibilidades que ofrece la tecnología para que esto se logre

En un proyecto desarrollado en la Universidad de los Andes en el área del precálculo se introdujo una innovación curricular que involucraba la tecnología (calculadoras gráficas) y que pretendía, entre otros objetivos, equilibrar el manejo de estos dos sistemas de representación. En este estudio se miró la utilización de las calculadoras gráficas en la enseñanza y el aprendizaje del precálculo, no solamente desde el punto de vista de sus efectos en aspectos particulares del currículo, sino también desde la perspectiva de la complejidad y la dinámica del sistema curricular en el que se introdujo, de tal manera que fue posible explorar la forma como sus elementos se relacionan y evolucionan en el tiempo (ver nuestro artículo *Innovación curricular en precálculo con calculadoras gráficas* en este volumen). Utilizando un esquema cuasi–experimental en el que se recogió información de un grupo de estudiantes que siguió el currículo tradicional y de otros grupos que utilizaron la calculadora, se estudiaron múltiples aspectos curriculares de la innovación (Gómez et al., 1996). La utilización de la tecnología influyó en las visiones que la institución encargada del diseño curricular, la profesora y los alumnos tenían acerca de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje (Carulla y Gómez, 1996). Este efecto en las visiones, junto con otros factores (como, por ejemplo, el cambio en la percepción de la autoridad por parte del estudiante) influyeron en el comportamiento de cada uno de los actores: la institución reformuló el diseño curricular y el tipo de actividades que propuso para ser realizadas como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje (Gómez et al., 1996) y la profesora y los alumnos cambiaron su comportamiento y sus actitudes dentro del salón de clase (Valero y Gómez, 1996). Estos cambios en los comportamientos y los resultados de los mismos (i.e., nuevas actividades) influyeron en la forma como profesora y estudiantes interactuaron dentro del proceso de construcción del conocimiento matemático (Gómez y Rico, 1995) y los cambios en esta interacción tuvieron consecuencias en el rendimiento (Gómez y Fernández, 1997), el aprendizaje (Mesa y Gómez, 1996) y las actitudes de los estudiantes (Gómez,1995).

Sin embargo, estudios posteriores, en los que hemos profundizado en los efectos de la utilización de la tecnología en la comprensión de los estudiantes nos han permitido encontrar algunos resultados de otra naturaleza. En uno de estos estudios, exploramos la manera como los estudiantes, trabajando en grupos, utilizaban las calculadoras gráficas en la resolución de un problema sobre traslaciones y dilataciones de funciones radicales. En otro estudio, exploramos algunos aspectos de la comprensión de los estudiantes sobre las funciones cúbicas. En los dos estudios encontramos que los estudiantes tienden a trabajar de manera casi exclusiva en el sistema de representación gráfico y que esta manera de aproximarse a los objetos matemáticos y a los problemas que los involucran restringe sus capacidad para resolverlos.

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES RADICALES

En este estudio (Carulla y Gómez, 1997) nos interesamos en mirar qué rol puede jugar la calculadora gráfica en la aparición de perturbaciones (identificadas como situaciones en las que se encuentran diferencias entre lo que los estudiantes esperaban encontrar y lo que encontraron en la resolución del problema) y la manera como su utilización puede promover la consolidación de conocimiento previo o la construcción de nuevo conocimiento con el propósito de resolver la diferencia. Se grabó en video una actividad de resolución de problemas de una hora que involucraba el análisis de transformaciones de funciones en los sistemas de representación gráfico y simbólico. Esta actividad fue realizada por tres estudiantes. Se transcribió la interacción entre los estudiantes y se identificó una situación donde aparecía una perturbación. Encontramos que, mientras que salen de la situación de perturbación, los estudiantes pueden utilizar la calculadora gráfica para consolidar conocimientos previos o parciales. El rol de autoridad dado por los estudiantes a la información presentada por la calculadora, su manera deficiente de usar esta información, y la manera restringida como ellos leen e interpretan las gráficas (consecuencia de las enseñanzas previas sin calculadora), pueden inducir a los estudiantes a no utilizar correctamente la información, llevándolos a ignorar una situación alternativa en donde un nuevo conocimiento puede ser construido. Igualmente, encontramos que las calculadoras gráficas pueden inducir a los estudiantes a trabajar a menudo en el sistema de representación gráfico creando una negligencia hacia la utilización de los sistemas de representación numérico y simbólico.

En una primera tarea, los estudiantes debían dibujar las funciones f(x) = (x-2)(x+3)(x-1) y $f(x) = \sqrt{3-x}$ y sus transformaciones correspondientes y analizar para las diferentes transformaciones los cortes con el eje X y el eje Y. En el caso de la segunda función, los estudiantes, al dibujarla en la calculadora gráfica y hallar el corte de la función con el eje Y, cometieron un error de lectura. En cambio de leer y = 1.73, leyeron y = 2. Aunque, al resolver el problema con la primera función, confirmaron que el corte de y = 2f(x) con el eje Y es el doble que el corte de y = f(x) con el eje Y, cuando dibujaron la gráfica de $y = 2\sqrt{3-x}$, encontraron que ésta cortaba el eje Y en 3.46. Este resultado era claramente contradictorio con lo que ellos esperaban (el doble del corte hallado en la calculadora para y = f(x), que era 2). Los estudiantes entraron en un estado de desequilibrio con esta perturbación. La calculadora les estaba dando un resultado (3.46) que era diferente del resultado que ellos esperaban (4). Dada la autoridad que ellos le daban a la información propuesta por la calculadora, la lectura deficiente del primer resultado nunca se puso en duda. Pero, *en cambio de mirar el problema desde otro punto de vista —el simbólico— que habría resuelto el problema, ellos buscaron una solución ad hoc a la contradicción, arguyendo que esto era el resultado de características particulares de la función radical*.

Nuestra interpretación de esta situación se resume en la gráfica siguiente.

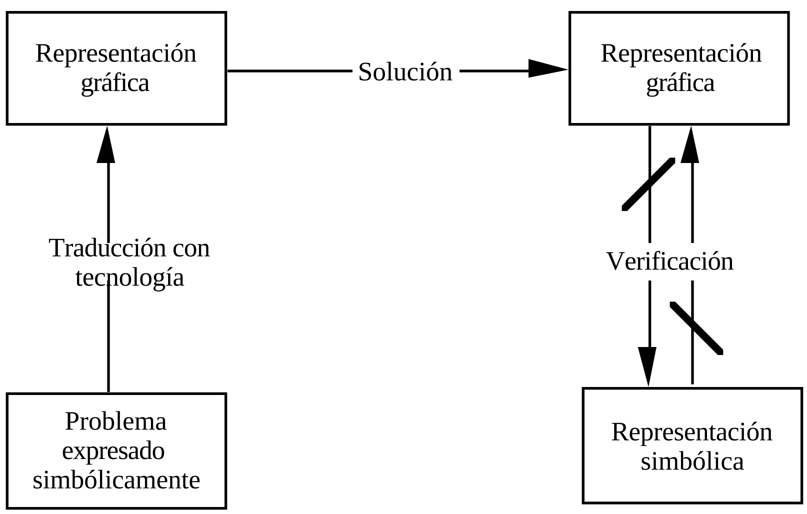


Figura Nº 1.

Un problema expresado simbólicamente es inmediatamente traducido por los estudiantes a la representación gráfica, con la ayuda de la tecnología. El problema se soluciona en el sistema de representación gráfico. Cuando surge una perturbación (consecuencia de una utilización deficiente de la tecnología), los estudiantes *no* buscan resolver la perturbación en el sistema de representación simbólico; permanecen en el sistema de representación gráfico y resuelven la contradicción con un argumento *ad hoc* que indica deficiencias en su conocimiento acerca de la función involucrada.

Comprensión de las funciones cúbicas

Encontramos resultados similares en un estudio que realizamos sobre la comprensión de los estudiantes acerca de algunos aspectos particulares de la función cúbica (ver nuestro artículo *Concepciones de los estudiantes sobre el dominio de la función cúbica* en este volumen). El estudio se centró en la actuación de varios grupos de estudiantes al enfrentar problemas que involucran gráficas de funciones cúbicas. Nuestro propósito era el de describir algunas características de las gráficas que los estudiantes hacían como respuesta a los problemas y el de explorar, con base en esas descripciones, algunas de las características de la comprensión de los estudiantes con relación al concepto de función cúbica. El estudio se realizó en dos fases. En la primera fase se construyó una categorización de algunas de las características de las gráficas producidas por los estudiantes y se formularon conjeturas acerca de las posibles concepciones que producían estas características. En la segunda fase, con un grupo diferente de estudiantes, pero con los mismos problemas, se comprobó la persistencia de estas características. Para asegurarnos de la existencia de los obstáculos epistemológicos identificados, presentamos a los estudiantes una solución del problema, diseñada por nosotros, y que incluía todos los errores producto de estos obstáculos epistemológicos. Les pedimos que corrigieran esta solución y que comentaran una serie de afirmaciones que reafirmaban la concepción errada que habíamos identificado. Encontramos que una proporción importante de los estudiantes tienen esta concepción parcial de la función cúbica en la que se percibe el dominio de la función como un subconjunto propio de los números reales.

Uno de los problemas que se propuso a los estudiantes era el siguiente:

1) Suponga que a = 1. La siguiente figura muestra el plano **h–k**, donde un punto (h, k) representa una función cúbica $y = (x - h)^3 + k$. Dibuje en diferentes planos cartesianos **x–y** las funciones o familias de funciones correspondientes a: a) A; b) L_1; c) L_2; and d) L_3.

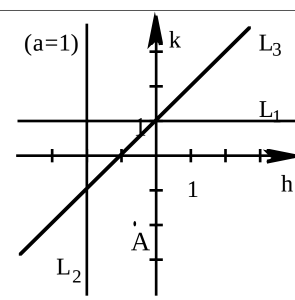


Figura Nº 2.

Algunas de las gráficas que produjeron los estudiantes eran de los siguientes tipos:

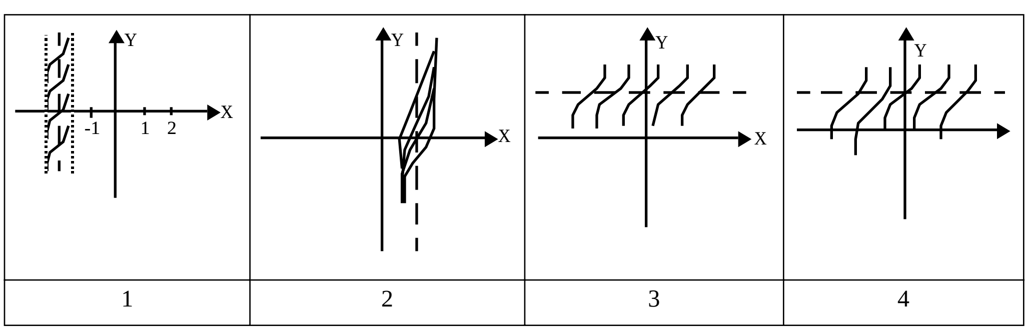
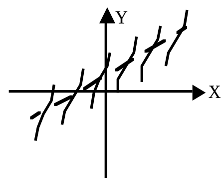
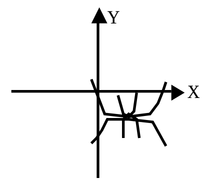


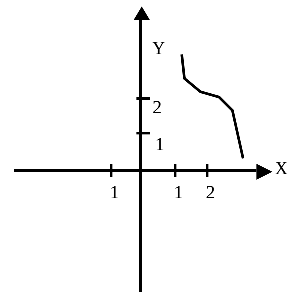
Figura Nº 3.



5



6



7

Figura Nº 3.

En estas gráficas se aprecia una clara tendencia a dibujar las funciones cúbicas como si estas funciones tuvieran un dominio restringido, no pudieran cortar el eje Y cuando se encuentran suficientemente alejadas de él, y a tener un conjunto de asíntotas verticales. Esta concepción de la función cúbica se comprobó cuando los estudiantes corrigieron la solución que nosotros les propusimos del problema (y que contenía estos errores) y les pedimos que comentaran afirmaciones al respecto que concordaban con la descripción que acabamos de hacer.

Una de las principales conclusiones que sacamos de estos resultados es que la percepción que los estudiantes tienen de la función cúbica es esencialmente gráfica. Ellos “ven” la función cúbica como un objeto gráfico al que le corresponde una descripción simbólica. Sin embargo, la identificación de las características de la función proviene exclusivamente de su representación gráfica y, los problemas de la utilización de la tecnología, como la problemática de los representantes (Schwarz y Dreyfus, 1995), y las características propias del objeto matemático, los llevan a construir concepciones erradas del concepto. Sin embargo, resulta evidente que si se mira el objeto desde el punto de vista simbólico, no es posible cometer estos errores. El análisis simbólico de la función cúbica implica de manera evidente que su dominio son los números reales y que no es posible que tengan asíntotas verticales. Sin embargo, no encontramos este tipo de argumento en la corrección a la solución propuesta, ni en los comentarios a las afirmaciones o en las entrevistas informales que realizamos. Esto nos hace pensar que la situación descrita en la figura Nº 1 es persistente y puede verse como una característica de la forma como los estudiantes construyen su conocimiento matemático cuando la tecnología está presente.

DISCUSIÓN

Los resultados de los estudios que acabamos de presentar nos hacen pensar que, cuando la tecnología está presente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es posible que los estudiantes desarrollen “formas” alternativas de construir su conocimiento matemático. Estas concepciones tienden a centrarse en una visión exclusivamente gráfica de los objetos matemáticos, dejando a un lado el análisis simbólico de los mismos. Las gráficas tienden a convertirse también en una forma simbólica en el sentido de que la representación gráfica es también un sistema de notación con sus propias reglas y lo que el estudiante busca saber de las gráficas se circunscribe al manejo operacional de las mismas. Esta forma de concebir los objetos matemáticos implica una visión parcial de los mismos que trae como consecuencia la aparición de obstáculos epistemológicos inexistentes en el pasado

(Sierpinska,1992) que pueden dificultar el progreso en la construcción de un conocimiento matemático apropiado.

Consideramos que esta es una consecuencia natural de los esfuerzos que se han hecho en los últimos años para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se ha pasado de un aprendizaje esencialmente simbólico y procedimental a un aprendizaje en el que los estudiantes logran identificar los objetos matemáticos, pero exclusivamente desde el punto de vista gráfico. No tenemos dudas de que la tecnología juega un papel central en esta nueva forma de aprender. Las calculadoras gráficas y los programas de computador le permiten al estudiante producir rápidamente y sin esfuerzo las gráficas de los objetos matemáticos, proceso que era extremadamente dispendioso e inexacto en el pasado. De manera natural ellos tienden a permanecer en este sistema de representación y buscan resolver los problemas con base en las características de los objetos matemáticos que pueden apreciar allí. Sin embargo, la representación gráfica permite observar solamente una parte de las características de los objetos matemáticos. Los estudiantes, al no tener en cuenta los sistemas de representación simbólico y numérico, se pierden de una parte de la visión global del objeto matemático.

Pero consideramos que la tecnología no es la única culpable en este problema. Los nuevos diseños curriculares, al intentar aprovechar "al máximo" las potencialidades de la tecnología, y los profesores, al tratar de adaptarse a esta nueva situación, pueden estar olvidando a la representación simbólica y promoviendo una visión parcial de la comprensión en matemáticas.

No estamos afirmando que el tipo de problemas que hemos reportado en este artículo aparezcan en todos los casos en los que se utiliza la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje del precálculo. Como ya lo mencionamos, la aparición del problema puede depender de las circunstancias particulares en las que se haga esta utilización. En particular, es posible que en nuestro caso, los profesores que dictaron el curso se hayan aproximado a la instrucción de tal forma que hayan promovido esta forma de construir el conocimiento matemático por parte de los estudiantes. No obstante, consideramos importante evidenciar que este tipo de problemas pueden existir y queda por comprobar si esta situación es inherente a la utilización de la tecnología o es particular a circunstancias específicas de esta utilización.

Tenemos entonces un nuevo problema: ¿Cómo recobrar la importancia de la representación simbólica en la comprensión de las matemáticas y lograr un equilibrio apropiado en el manejo de los diversos sistemas de representación cuando la tecnología está presente? Este es un problema tanto para los investigadores, como para los diseñadores de currículo y los diseñadores de soluciones tecnológicas en la educación matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N., Kaput, J.J. (1996). Computer–based learning environments in mathematics. En Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, pp. 469-501.

Carulla, C., Gómez, P. (1996). Graphic calculators and precalculus. Effects on curriculum design. En Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 1-161.

Carulla, C., Gómez, P. (1997). Graphic calculators and problem solving. Do they help?. En Pehkonen, E. (Ed.). *Proceedings of the PME 21 Conference*. Lahti: University of Helsinki, pp. 1.224.

Dreyfus, T. (1994). The role of cognitive tools in mathematics education. En Biehler, R., et al. (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer, pp. 201-211.

Dunham, P., Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *The Mathematics Teacher.* 87 (6), pp. 440-445.

Fey, J.T. (1989). Technology and mathematics education: A survey of new developments and important problems. *Educational Studies in Mathematics*. 20, pp. 237-272.

Gómez, P. (1995). Calculadoras gráficas y precálculo. Efectos en las actitudes de los estudiantes. *Documento no publicado.* Bogotá: una empresa docente.

Gómez, P. (1996). Riesgos de la innovación curricular en matemáticas. *Revista EMA*. 1 (2), pp. 97-114.

Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*. 10 (1), pp. 93-111.

Gómez, P., Carulla, C., Gómez, C., Mesa, V.M., Valero, P. (1996). Calculadoras gráficas y precálculo. En Barón, G., Mariño, O., Escobar, H. (Eds.). *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*. Cali: Sena.

Gómez, P., Fernández, F. (1997). Graphics calculators use in Precalculus and achievement in Calculus. En Pehkonen, E. (Ed.). *Proceedings of the 21th PME Conference*. Lahti: University of Helsinki, pp. 3.1-3.8.

Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., Valero, P. (Eds.) (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Gómez, P., Rico, L. (1995). Social interaction and mathematical discourse in the classroom. En Meira, L., Carraher, D. (Eds.). *Proceedings of the 19th PME Conference*. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, pp. I-205.

Hiebert, J., Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 65-97.

Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan, pp. 515-556.

Mesa, V.M., Gómez, P. (1996). Graphing calculators and Precalculus: an exploration of some aspects of students' understanding. En Puig, L., Gutiérrez, A. (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 3.391-3.399.

NCTM (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Reston: NCTM.

Ruthven, K. (1996). Calculators in the mathematics curriculum: the scope of personal computational technology. En Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (Eds.). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer, pp. 435-468.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 334-369.

Schwarz, B., Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics*. 29 (3), pp. 259-291.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp. 1-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En Dubinsky, E., Harel, G. (Eds.). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25)*. Washington: Mathematical Association of America, pp. 25-58.

Valero, P., Gómez, C. (1996). Precalculus and Graphic Calculators: The Influence on TeachersBeliefs.EnPuig,L.,Gutiérrez,A.(Eds.).'*Proceedings of the 20th PME Conference*. Valencia: Universidad de Valencia, pp. 4.363-4.370.