

Experiencias sobre proyectos e investigaciones matemáticas en secundaria

Grup Vilatzara

Resumen

En este artículo describimos las características generales de lo que entendemos por proyectos matemáticos para la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y experiencias de investigación en el Bachillerato. Damos ejemplos y analizamos las experiencias realizadas en las clases.

1. Introducción

La reordenación del nuevo sistema educativo en Cataluña establece la obligatoriedad de realizar un trabajo de investigación durante el segundo curso de Bachillerato que el alumnado llevará a cabo con un tutor y sobre un tema escogido por cada uno. La normativa oficial (DOGC, 1996 y 1998, D. E. 1998-1999) define los trabajos de investigación como conjuntos de actividades realizadas por los alumnos y las alumnas, estructuradas y orientadas a la investigación, sobre un ámbito elegido y acotado, en parte, por el propio alumnado. Su objetivo principal es desarrollar y consolidar las capacidades de investigación (también las de argumentación y expresión) que todos los alumnos van adquiriendo a lo largo de sus estudios, y que aplican a las diferentes materias del currículo.

De hecho, en los currículos de Matemáticas hay pocas referencias explícitas sobre cómo se deben desarrollar en el alumnado sus habilidades de investigación y parece evidente que no puede esperarse hasta ese momento y que se obtenga un buen trabajo sin una preparación previa. Esta es una de las razones por las cuales en el Grup Vilatzara nos propusimos iniciar a nuestros alumnos y alumnas, desde la ESO, en trabajar las matemáticas entendidas como investigación. Los antecedentes de este tipo de trabajo se encuentran en la idea de «hacer Matemáticas» mediante proyectos (Alsina, Fortuny y Giménez, 1992; Niss, 1993; Abrantes, 1995). Este planteamiento nos está llevando al establecimiento de una metodología que incluye la realización de pequeños proyectos en la ESO, así como trabajos de investigación en el Bachillerato (Grup Vilatzara, 1999).

En este artículo nos centramos principalmente en la organización y descripción de algunos proyectos matemáticos y trabajos de investigación

realizados por el alumnado. Al mismo tiempo explicamos aspectos muy concretos sobre la metodología que utilizamos.

2. Proyectos matemáticos en la ESO

Definimos los proyectos matemáticos como actividades que recogen situaciones de la vida real, que sean lo más próximas posible a nuestros alumnos, y que tienen las características siguientes:

- (a) Son situaciones problemáticas (aptas para ser matematizadas) en las que su solución admite diferentes estrategias y destrezas matemáticas específicas para resolverlas.
- (b) Su solución no se obtiene por aplicación de actividades rutinarias y mecánicas. El alumnado ha de tomar decisiones, planificar estrategias, buscar información, establecer hipótesis y contrastarlas, buscar secuencias, etc. Es decir, reconocer la implementación de metodologías científicas.
- (c) Requieren manipular informaciones, interpretar, seleccionar, clasificar, ordenar, relacionar, hacer deducciones, obtener nuevos datos e implementar estrategias diversas de resolución.
- (d) Exigen elaborar un informe en el que se expone todo el proceso seguido, y las conclusiones a las que se llegan. En éstos se usan diferentes tipos de lenguaje (algebraico, gráfico, estadístico, geométrico...).

Por sus características, los proyectos matemáticos ponen énfasis en los procedimientos y en la funcionalidad de dichos contenidos matemáticos, al relacionarlos con la vida real, mostrando las Matemáticas como una herramienta útil para conocer el entorno social del alumnado y el de la sociedad en general. Además, la forma de enfocar los proyectos matemáticos nos permiten ajustarnos a los diferentes niveles de conocimiento del alumnado. Una parte de este alumnado será capaz de encontrar soluciones más generales, descubrir relaciones entre informaciones o datos, elaborar conclusiones más reflexionadas, obtener más y mejor información, en definitiva, o ser más creativos. Mientras que, ante una misma situación habrá alumnos y alumnas con menos recursos que sólo encuentren una solución, o bien elaboren una conclusión más sencilla o la justifiquen más pobremente.

Por otra parte, los proyectos matemáticos no dejan de lado las actitudes, ya que las actividades propuestas, al ser del interés del alumnado y de utilidad real, contribuyen a su motivación; facilitan su implicación en el

aprendizaje —sobre todo, de procedimientos—, mejorando, de esta forma, su actitud hacia las Matemáticas; y le permiten ir adquiriendo confianza en los conocimientos matemáticos y en las capacidades que ya posee.

En los apartados siguientes tratamos de analizar el desarrollo de proyectos matemáticos que hemos propuesto en los dos ciclos de la ESO, así como algunos ejemplos de proyectos concretos que se han llevado a cabo.

¿Qué proyectos?

Desde hace varios años hemos ido proponiendo al alumnado de primer y segundo ciclos de la ESO proyectos matemáticos como los definidos en el apartado anterior. Actualmente planteamos la ejecución de dos proyectos diferentes por año. No es relevante que la temática del proyecto tenga una relación directa con los contenidos impartidos, aunque procuramos que no se aleje de ellos, integrando contenidos ya trabajados anteriormente. Así, en un primer ciclo de la ESO, en el que se han trabajado temas sobre áreas y muestras estadísticas, se han propuesto temas para que estos aspectos puedan desarrollarse.

En este ciclo educativo (a diferencia del enfoque que se indicará sobre los trabajos de investigación en Bachillerato) proponemos ejemplos concretos de proyectos matemáticos (ver tabla 1) y hacemos que el alumnado escoja uno.

El letargo de los animales

Ya sabes que muchos mamíferos, desde los osos hasta a pequeños hamsters, durante el invierno no hacen prácticamente nada, sólo dormir: es lo que se llama el letargo. ¿Has visto alguna vez un animal así? Cuando un animal entra en letargo tiene un problema: prácticamente no come nada y ha de intentar no pasar frío. ¿Te has fijado qué hacemos nosotros cuando tenemos frío? En este proyecto te proponemos que trates de medir el área que ocupa la piel del animal (¡ojo!, no lo puedes matar) y que la compares con el área de piel que se ve cuando está en letargo. Puedes simular la situación con un compañero o hacer modelos con plastilina o usando fotografías.

El sotobosque

¿Te gusta la montaña? Muchos bosques tienen una capa de hojas en el suelo. Es lo que se llama el sotobosque. En este proyecto te proponemos que compares diferentes bosques. En cada tipo de bosque, determina una región con una superficie que debes calcular y calcula el área ocupada por toda la hojarasca que hay en ella. Compara las correspondientes cantidades de hojarasca por metro cuadrado de superficie.

Deporte

¿Sabes cuánto terreno tiene para moverse un futbolista? ¿Y un jugador de baloncesto? ¿Y uno de balonmano? Te proponemos que midas el área de

los campos de diferentes deportes y calcula que área de terreno ha de controlar cada jugador en cada caso. Compara los resultados obtenidos y tendrás características que quizás nunca habías pensado de tus deportes favoritos.

El metal de las motos

¿Has visto cuántos tubos metálicos hay en una moto? Fíjate en el tubo de escape, los tubos que aguantan las ruedas, el manillar... Imagínate que eres un fabricante de tubos y necesitas saber el área total de los tubos que necesitas para cada moto. ¿Cómo lo harías?

Las antenas

¿Te has fijado que encima de muchas montañas hay una antena? Se llaman repetidores. Están para que cada rincón del país pueda ver la televisión, oír la radio... Para encontrar la mejor manera posible de distribuirlos, investiga cuántos repetidores necesitas en el caso de tu Comunidad Autónoma y dónde los colocarías.

Los tejados

¿Te has fijado que los tejados de muchos edificios no son planos? La mayoría tienen una forma ondulada, pero también los hay con formas más curiosas. ¿Sabes de alguno? Te proponemos que consideres diferentes tipos de edificios con tejados no planos y midas el área de sus tejados. Con lo que has aprendido, calcula con buena aproximación cuánto mide el área del Teatro de la Ópera de la ciudad de Sydney.

Los hospitales

Queremos tener una buena red de asistencia hospitalaria en nuestra Comunidad Autónoma y sabemos que no hay dinero más que para construir 20 hospitales. ¿Dónde los pondrías? Trata de repartirlos bien y con buen criterio. Calcula el área y la población que cubrirá cada uno.

Tabla 1. Ejemplos de trabajos propuestos en el primer ciclo de la ESO.

En el 2.º ciclo de la ESO, algunos trabajos los adaptamos más al desarrollo de aplicaciones del contenido matemático (ver Tabla 2) y –en lo posible– se contextualizan a la realidad que el alumnado vive en su ciudad o pueblo.

La circulación en una rotonda

Estudia, desde un punto de vista matemático, las rotondas que se hacen para evitar accidentes en cruces importantes. Analiza el caso de la carretera de Argenton con Av. Arquitecte E. Ferrés. Mide sus dimensiones. Trata de relacionar su tamaño con la velocidad de circulación.

Estudio de un aparcamiento

Te proponemos hacer un estudio matemático de los espacios señalizados para aparcamientos (zona azul). Analiza el caso del que tienes en la zona junto al Mercado, calles N. Monturiol y Montevideo de Vilassar. Empieza por

hacer una estimación de ocupación, número de plazas, tiempo de ocupación, recaudaciones y gastos.

El estadio de atletismo

Diseña un estadio de atletismo nuevo para Vilassar, así como todas las instalaciones que normalmente lo acompañan.

El Museo de la Marina

Te proponemos que hagas una visita al Museo de la Marina con un ojo matemático. Analiza formas exteriores, elementos de decoración, espacios interiores, estimación del número de visitantes, cálculo del número máximo de visitantes al mismo tiempo...

Cajas y recipientes

Te proponemos hacer un estudio sobre el aprovechamiento de envases de los productos que consumimos normalmente. Trata de estudiar el envase ideal (en el que se necesita el mínimo de superficie) de una lata cilíndrica de una cierta capacidad. Puedes hacer lo mismo con otro tipo de envase. Compara resultados, y compara siempre con la realidad.

Un viaje por Europa

Te proponemos que prepares un viaje por dos o más capitales europeas, pero analizando todas las Matemáticas que intervienen. Piensa en presupuestos, cambios de moneda, alternativas de medios de locomoción, etc.

Tabla 2 (a) Ejemplos de proyectos propuestos para el 2.º ciclo de la ESO.

3. Organización práctica de los proyectos en la ESO

Los alumnos, por parejas, realizan dos proyectos por año, en los dos primeros trimestres. Normalmente, las parejas las hacen ellos mismos y eligen un proyecto que por su amplitud y complejidad se adecue a sus capacidades e intereses. Todo proyecto se realiza en un plazo de 2 o 3 semanas, incluyendo la elaboración de una memoria. Fomentamos que cada alumno presente públicamente ante sus compañeros al menos un proyecto al término de la etapa.

Los proyectos propuestos se distribuyen entre las parejas del grupo, lo que presenta la ventaja de que se enriquece la discusión y la aportación de ideas, se aprende a trabajar en equipo y se compensa la falta de iniciativas que pudiera darse en algunos casos. De hecho, el alumnado no se entusiasma en trabajos de los que no sabe nada, o cree que son complejos, o no controla el problema. El papel del docente ha de ser el de ayudar al alumnado en la realización del proyecto y evitar que se queden atascados. Esta ayuda puede ser desigual, depende de la complejidad del propio

proyecto y de las dificultades que surjan en su realización. Hay que asegurar que todos los alumnos llegan a un final aceptable.

Para llevar un proyecto a la práctica tenemos en cuenta el siguiente esquema organizativo por fases:

(a) *Presentación de la actividad*. Se dedica una hora de clase a presentar esta actividad. A cada pareja se les entrega una hoja con el planteamiento del proyecto elegido y los criterios de evaluación. Para cada proyecto se explica lo que se pretende, cómo hay que trabajarlo, cómo se tiene que presentar, cómo será evaluado, en qué plazos deberá ser realizado, dónde se encontrará información, dónde encontrar ayuda.

(b) *Seguimiento*. Se establece un mecanismo viable de entrevistas y consultas. Puede ser que se acuerde un día para que, en tiempo de clase, puedan hacerse consultas, o bien, uno o varios días al final de la jornada lectiva. Se dedica una hora de clase a dar orientaciones y controlar el desarrollo del trabajo esbozado, pero sin que esté acabado para que el docente se lo mire y se lo devuelva con los comentarios y las orientaciones oportunas.

(c) *Presentación de la memoria*. En general, el alumnado suele presentar los proyectos en forma de dossier, el cual debe contener: introducción, desarrollo, conclusiones y fuentes de información. Sin embargo, procuramos sugerir otras formas de presentación: pósteres, montajes audiovisuales, vídeos, construcción de maquetas si es el caso, fotografías de sus observaciones hechas por ellos mismos, etc. Basta que se les proponga para que algunos prefieran buscar alternativas al dossier. Es una manera de estimular la creatividad y de interesarles en la actividad.

Normalmente una cuestión que preocupa al alumnado es la extensión, en especial los que optan por el dossier. En esta cuestión se insiste que no se trata de copiar nada de ninguna enciclopedia, sino que se trata básicamente de un trabajo personal y que no tiene por qué resultar excesivamente largo. A título orientativo digamos que a veces 3 o 4 hojas son suficientes en la mayoría de los casos para indicar el cuerpo principal de resultados, a lo que se pueden añadir como anexos algunos datos e informaciones gráficas asociadas.

4. El alumnado de ESO y los proyectos

Veamos un caso real desarrollado en 2.º ciclo, a la edad de 14 años (3.º de ESO). Se trata del estudio del aparcamiento en área de pago en la zona centro del pueblo, donde se encuentra el mercado y un nutrido grupo de

tiendas de ropa, zapatos, joyerías, papelerías, perfumerías, etc., así como bancos y cajas de ahorro. Esta situación provoca un fuerte movimiento de personas, especialmente los viernes por la tarde y los sábados durante todo el día, y aún mayor en el periodo de vacaciones de verano cuando el número de habitantes del pueblo aumenta, al tratarse de un pueblo de playa.

Los objetivos que se han propuesto se orientan en dos direcciones: por un lado, han hecho un análisis económico del funcionamiento actual; y por otro, realizaron el diseño de un aparcamiento alternativo para descongestionar la zona de aparcamiento en la calle y aumentar la fluidez del tránsito rodado. En general, destaca la planificación del proyecto, así como la variedad de conocimientos matemáticos empleados, y el acierto con que lo han trabajado.

Se vieron obligados a tener que calcular la escala del plano del pueblo, puesto que no estaba indicada. Usaron la estadística para estimar el número de viviendas y llegar a la conclusión de que hay 1,2 coches por vivienda. Como cada vivienda tiene una plaza de aparcamiento en el mismo bloque, esto permite calcular que hay unos 54 coches de los vecinos residentes que han de aparcarse en la calle. Por otro lado, han hecho un cálculo estimado de los ingresos que genera esta zona de pago. Primero estiman el número de plazas ocupadas y luego lo que pagan. Lo han hecho diferenciando los días laborables de los fines de semana, cuando la ocupación es más alta, y en cada caso han diferenciado la mañana de la tarde. Al final llegan a la conclusión de que se recaudan unos 29 millones de pesetas al año. A todo ello han añadido un razonamiento que justifica los cálculos y exponen las limitaciones que pueden tener. En este sentido es interesante ver cómo han analizado las posibles situaciones que podrían introducir errores (véase Figura 1).

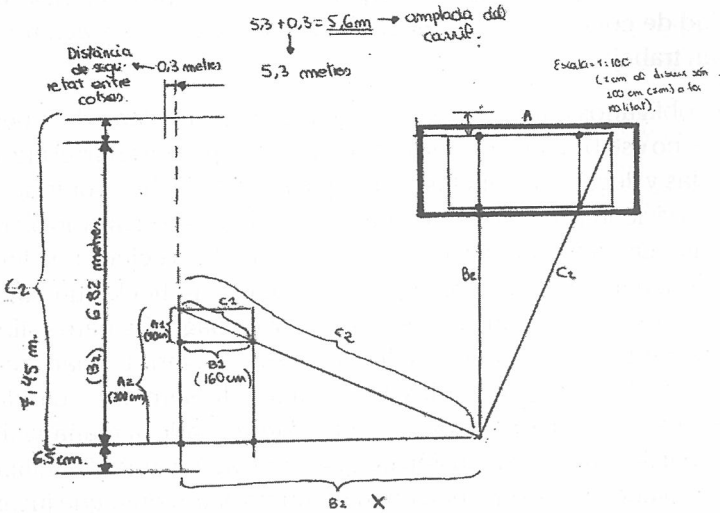
Debemos tener en cuenta que el número de coches aparcados en teoría se mantiene ya que los coches van aparcando y saliendo. Por ejemplo, a lo mejor una plaza de aparcamiento que hemos contado ha sido ocupada durante dos horas (máximo permitido) y el coche se ha ido, pero después en otra plaza que no hemos contado aparca otro coche que está dos horas y más o menos la cosa se equilibra, ya que el parquímetro ha cobrado un turno de 4 h (400 pts.) que es la forma que hemos empleado: multiplicando el número de plazas ocupadas por las 400 pts. Ciertamente es imposible saber con exactitud la cantidad de coches aparcados y el tiempo que han estado, porque hay otros factores que consideramos que no van a hacer variar mucho las medias. pero debemos conocerlos. Como por ejemplo:

- (a) coches que pagan por un periodo superior al que han estado realmente;
- (b) coches que no pagan; (c) coches que los vigilantes del aparcamiento detectan que no han pagado y les dejan un aviso de que si antes de una

hora pagan 500 pts., el parquímetro no les pondrá ninguna multa; y (d) también hay gente que paga para estar un tiempo determinado y el guarda no los ve y están más tiempo.

Figura 1. Texto de las alumnas Marta y Mariona (3.º de ESO) del proyecto "Aparcamiento en Vilassar"

En la segunda parte del trabajo, que trata del diseño de un aparcamiento, justifican las dimensiones y su organización a partir del cálculo que hacen del radio de giro de un coche tipo que reproducimos en la figura 2, ya que es suficientemente elocuente.



RADIO DE GIR:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} ; \frac{70 \text{ cm}}{300 \text{ cm}} = \frac{160 \text{ cm}}{X} ; X = \frac{300 \cdot 160}{70} ; X = 6,82 \text{ metros}$$

C₂ = (hipotenusa)

$$\text{hip}^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2 ; C_2^2 = B_2^2 + A_2^2 ; X^2 = 6,82_m^2 + 3_m^2 ;$$

$$46,5124 + 9 = X^2 ; X^2 = 55,5124 ; X = \sqrt{55,5124} ; X = 7,45 \text{ metros}$$

Figura 2. Cálculo del radio de giro de un coche realizado por Marta y Mariona.

Finalmente, en sus conclusiones (figura 3) manifiestan, tal como pretendíamos al hacer la propuesta, que la realización del proyecto les ha servido para comprobar que las Matemáticas se encuentran detrás de situaciones de la vida real y que les permiten obtener un amplio conocimiento de ellas.

CONCLUSIONES

La elaboración de este trabajo nos ha servido para repasar unos cuantos aspectos que hemos trabajado en clase durante todo el curso y otros que hemos aprendido sobre la marcha, además del conocimiento que tenemos ahora sobre las calles del centro de nuestro pueblo.

Hemos usado las medias aritméticas en la encuesta que hicimos a cincuenta vecinos de la zona estudiada, también la semejanza para saber la escala del mapa y para encontrar el radio de giro de un coche, y Pitágoras para encontrar la hipotenusa del triángulo que formaba el ángulo de giro; hemos pasado dibujos a escala, entre otras cosas. Todo eso ya lo habíamos visto en clase, excepto lo del radio de giro de un coche, lo hemos aplicado en la vida real y hemos comprobado que las matemáticas están en todas partes y se utilizan para hacer cualquier construcción, tanto de un aparcamiento, como en las calles, o en las casas.

Gracias a los estudios realizados, podemos sacar algunas conclusiones en lo que respecta a cómo se hace la construcción de un aparcamiento en la zona del mercado. Una sería que podría ser rentable ya que siempre estaría lleno porque hay mucha gente en la zona y los coches que siempre están aparcados fuera de la calle porque los propietarios sólo tienen una plaza, podrían tener otra de alquiler, y así su otro vehículo estaría más seguro. Además, la fluidez del tráfico, sobre todo por las calles Narcís Monturiol y Montevideo sería más tranquila y no habría tanta contaminación acústica, y sería un lugar más seguro para los niños, que a menudo están en la Plaza Picasso.

Figura 3. Conclusiones del trabajo de Marta y Mariona.

5. Trabajos de investigación en el Bachillerato

Como se ha indicado en la introducción, el alumnado escoge el tema del trabajo de investigación durante el Bachillerato, y normalmente son temas relacionados con las ciencias experimentales y sociales, dejando de lado las propuestas asociadas casi exclusivamente al mundo de las Matemáticas. Ello nos hizo reflexionar y aceptar la idea de que sólo llegaríamos a interesar al alumnado en la realización de trabajos de investigación matemática si modificábamos el objeto de investigación en nuestras ofertas que hasta ese momento había sido sólo el de las propias Matemáticas, es decir, si las ofertas de trabajos de investigación que hiciéramos desde el área de Matemáticas fueran lo suficientemente diversas como para abarcar: las situaciones reales más diversas; los intereses, gustos y aficiones de nuestros alumnos y alumnas; e, incluso si fuera necesario, sus propias necesidades de formación.

Pensamos que una forma de involucrar más a nuestros alumnos y alumnas en la investigación matemática era no sólo desarrollar sus capacidades de

investigación desde la ESO, como hemos descrito en las páginas anteriores, sino también abrir las perspectivas a nuevos tipos de investigaciones que estén más relacionados con situaciones de la vida real, y aplicar una metodología de trabajo que se acerque a la modelización (Niss, 1993; Matos, 1995) y facilite al alumnado su realización.

Lo que hacemos a continuación es describir las orientaciones iniciales de nuestra metodología de trabajo, destacando la influencia que han ejercido en los alumnos y las alumnas a la hora de elegir y orientar sus temas de investigación, y los resultados concretos de investigaciones con diferentes niveles de contenidos matemáticos.

La oferta de trabajos en el Departamento de Matemáticas.

Pensamos que los alumnos y las alumnas han de recibir indicaciones generales iniciales que les orienten y les enganchen en la realización de trabajos de investigación en el área de Matemáticas. Por tanto, el Departamento hará una oferta inicial basada más en ideas orientativas sobre ámbitos de investigación que en una lista de temas concretos. Esta oferta abarca diferentes situaciones en las que las Matemáticas están presentes; por ejemplo, podemos proponer investigaciones que relacionen las Matemáticas con las aficiones de alumnos y alumnas, como pueden ser el tenis, el baloncesto, la astronomía, la pesca, la música, la fotografía, etc. Sin olvidar la importancia de los componentes matemáticos de los juegos de estrategia (Nim, ajedrez de Dawson, etc.).

Hay alumnos y alumnas interesados por determinados aspectos de la ecología, la biología, el urbanismo, etc. Hemos de ser sensibles a estos intereses y proponerles investigaciones que relacionen esas disciplinas con las Matemáticas: el ruido, el corazón, la contaminación atmosférica, la energía en el mundo, las epidemias, la evolución del precio del suelo, etc.

Nuestra oferta también ha de incluir la identificación de las Matemáticas en las obras de, por ejemplo, Durero, Gaudí, Escher, etc., así como, el análisis desde el punto de vista matemático de determinadas obras de arquitectura antiguas o modernas. No olvidamos tampoco en la oferta del Departamento al alumnado que más le gusta las Matemáticas, para él proponemos investigaciones en las que prima principalmente el componente matemático, como pueden ser la razón áurea, la sucesión de Fibonacci, el teorema de los cuatro colores, etc.; o relacionadas con la modelización de diferentes situaciones reales (el aterrizaje de un avión, la optimización del empaquetamiento, la regulación y duración de los semáforos, etc.). En definitiva, nuestra idea inicial será la de orientar al alumnado hacia ámbitos

de investigación que sean de su agrado para aumentar su disponibilidad y su autonomía, actitudes que consideramos importantes para la realización de un buen trabajo de investigación.

La simple presentación de una propuesta como la que hemos resumido en los párrafos anteriores ha contribuido a modificar los objetivos de varias **investigaciones, orientadas inicial y exclusivamente hacia las ciencias experimentales y sociales.** Entre ellas citamos la de dos alumnas cuya intención era realizar un trabajo sobre trasplantes de corazón, dentro del campo de la Biología y la Medicina, y que actualmente están reorientando la idea original, analizando matemáticamente variables que influyen en la toma de decisiones sobre la cantidad y calidad de los medicamentos que los médicos recetan a sus pacientes después de un trasplante, a la vista de los resultados de los análisis que les practican.

Las reflexiones iniciales con cada alumno.

Para encontrar ámbitos de trabajo que interesen a los alumnos y las alumnas hemos de estar dispuestos a escuchar lo que nos dicen. Por ejemplo, Xavier nos dijo un día que le gustaba la música y que le gustaría investigar su relación con las Matemáticas. Lo primero que hemos de hacer en una situación así es reflexionar con él sobre si tiene alguna idea en la que pueda investigar. Esta reflexión será, al principio, general, con preguntas del estilo: ¿qué querías hacer?, ¿qué te interesa de la música?, ¿crees que la música tiene algo que ver con las Matemáticas?, etc.

Si no sabemos nada sobre el tema que pueda ser interesante, trataremos de hablar con alguna persona experta, a ver si nos da alguna idea. Al mismo tiempo, incitaremos al alumno o a la alumna a que busque información en Internet.

Aunque Xavier tenía claro que su idea era la de investigar sobre la generación de composiciones musicales y su relación con las Matemáticas —sus aficiones estaban asociadas a tocar en conjuntos musicales y, al mismo tiempo, le gustaban las Matemáticas—, las reflexiones con cualquier otro alumno podrían haber continuado en términos más concretos de la siguiente forma: ¿has pensado que las simetrías y las composiciones musicales pueden estar relacionadas?, ¿sabías que los logaritmos están relacionados con la construcción de las escalas musicales?, ¿has pensado que las medidas de las cuerdas de una guitarra están relacionadas con las notas musicales?, ¿te interesa el piano?, ¿quieres investigar los matemáticos que tocan o tocaban el piano?, ¿eres un fanático del órgano?, ¿quieres analizar matemáticamente el órgano de tu pueblo?, ¿conoces los aparatos de afinación?, ¿quieres trabajar sobre las Matemáticas y la afinación?, etc.

El caso de Ama fue bastante diferente pues quería investigar sobre algún tema relacionado con las Matemáticas, pero no tenía un interés especial por ninguno de ellos. Nuestra actuación con ella fue la de mostrarle diversos temas matemáticos que podían tener ramificaciones generales en diferentes campos: la arquitectura, con la razón áurea; las ciencias de la naturaleza, con la sucesión de Fibonacci; la cartografía, con los sistemas de representación; o las propias Matemáticas, con los sistemas de numeración y su evolución a lo largo de la historia; etc.

Entre estos dos casos extremos podemos encontrar casos intermedios sobre los que tengan alguna afición, pero que no tengan idea de cómo relacionarla con las Matemáticas. En estos casos podemos desarrollar las entrevistas en los siguientes términos (si la afición fuera, por ejemplo, la Astronomía): ¿te interesa hacer algo tradicional, recogiendo ideas sobre las fases de la luna, la influencia de la luna sobre las mareas, etc.?, ¿quieres trabajar sobre algún astrónomo catalán como Comas i Solà y sus cálculos?, o, ¿tal vez sobre la astronomía antigua en la Cataluña viajera de los almogávares, sus aparatos y sus cálculos?, ¿sabes que hay un asteroide llamado Barcelona?, ¿has pensado en analizar matemáticamente los aparatos astronómicos, las órbitas de los planetas, o, en general, la relación de los números con los cielos?, etc.

Puede ser que el mismo profesor conozca el tema sobre el que su alumno quiere investigar, en cuyo caso puede darle alguna referencia básica, o mostrarle algún trabajo ya realizado. Pensamos que es importante mostrar al alumnado un trabajo de cursos anteriores para que vea cómo está hecho formalmente y qué le estamos pidiendo como resultado final; en cambio, ha de ser él o ella quien concrete el tema y la pregunta sobre la que quiere investigar.

La actuación del profesorado en esta fase del trabajo ha de ser orientativa para que la pregunta sobre la que se centre la investigación tenga un interés objetivo, independientemente de que sea del agrado de sus alumnos. Así pues, hemos de concienciar al alumnado de que se ha de involucrar en la búsqueda de información para concretar, primero, y empezar a desarrollar, después, el tema de investigación.

6. Las investigaciones y sus aportaciones

Las aportaciones de las investigaciones matemáticas se pueden producir en dos sentidos: a) las que tienen que ver con *el desarrollo de las capacidades de investigación* de los alumnos y el uso de las Matemáticas para generarlas, entre las que podemos citar las que están relacionadas

con la planificación, el conocimiento de la realidad y la integración, la claridad en la comunicación de los contenidos, la capacidad de análisis de las situaciones que se presentan, etc. (véase Grupo Vilatzara, 2000); y b) las aportaciones relacionadas con *la novedad de los procedimientos utilizados* –ya sea en el enfoque de los temas desde diferentes puntos de vista o de las clasificaciones o de la búsqueda bibliográfica de aplicaciones de un determinado concepto matemático–, y de los resultados obtenidos.

Por lo que se refiere a la novedad de los procedimientos que el alumnado utiliza, podemos citar algunos trabajos concretos que nuestros alumnos y alumnas han realizado: “recopilación de propiedades de los triángulos”, cuya finalidad es la búsqueda bibliográfica y la posterior clasificación de las propiedades más significativas de los triángulos; “comprobaciones de propiedades y teoremas con Cabri-Géomètre”, en el que se hace una revisión de algunos conceptos, propiedades y teoremas referidos básicamente al triángulo, circunferencia, rectas y segmentos, etc., y se comprueban, utilizando el Cabri-Géomètre, incluso en condiciones extremas; “la sucesión de Fibonacci”, con el que se realiza una recopilación de las situaciones en las que aparece la mencionada sucesión.; y “el teorema de los cuatro colores”, que permite una reflexión matemática profunda sobre dicho teorema tomando como excusa el estudio de la evolución histórica de su demostración.

En algunos casos se producen resultados nuevos, como en el caso de la generación de piezas musicales o de curvas del tipo de Escher utilizando transformaciones geométricas planas, lo que justifica que también en el nivel de Bachillerato es posible hacer aportaciones nuevas.

En las páginas que siguen describiremos con un poco más de detalle dos de los trabajos mencionados en los párrafos anteriores.

i) *La sucesión de Fibonacci.*

En la planificación de este trabajo, Aina tuvo claro desde el principio que había dos partes bien diferenciadas (Faura, 1999; del que mostramos la introducción en la figura 4). Por un lado, todo lo relacionado con el estudio matemático de la sucesión de Fibonacci: el problema original que dio pie a la sucesión, la ley de formación, algunas propiedades sobre diferentes maneras de sumar sus términos, las propiedades relacionadas con los determinantes, el cuadrado de un número de la sucesión, etc. Y una segunda parte, en la que trataría de hacer una recopilación de las diferentes situaciones en las que aparece la sucesión de Fibonacci.

INTRODUCCIÓN

¿Cuál es el tema principal de la memoria?

Una parte del trabajo de investigación está dedicada a Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, y la otra parte, que es la principal, se centra en la sucesión que inventó Leonardo de Pisa en el siglo XII. Esta sucesión es conocida como la sucesión de Fibonacci y en este trabajo nos ocuparemos de su enunciado, de algunas propiedades y, sobre todo, de apariciones de la sucesión en diferentes ámbitos como, por ejemplo, en la Naturaleza, etc...

¿A dónde he recurrido para encontrar información?

Para buscar información sobre este tema, lo he tenido muy complicado, en primer lugar porque en muchas bibliotecas no había ningún libro que lo mencionara, ni siquiera en la central ni en la de matemáticas. A pesar de ello, he sabido continuar con el trabajo y conseguir finalmente toda la información necesaria. Esta información me la ha facilitado mi tutor del trabajo de investigación, por internet y libros que me han dejado profesores de matemáticas. No ha sido tarea fácil ya que buena parte de la información estaba en francés y la otra en inglés. La que estaba en francés hace referencia a las propiedades y la que estaba en inglés, al resto de información, exceptuando la bibliografía que era la única que he encontrado en castellano.

¿Cómo he realizado el trabajo?

Al principio no le ponía muchas ganas ya que el tema me era desconocido, pero a medida que fui buscando información me fui animando y empecé a hacer alguna cosa hasta conseguir el trabajo que viene a continuación.

Se ha de decir que en los primeros meses no hacía nada, pero empezado el segundo trimestre el trabajo fue tomando forma, pero no podía ir muy rápido ya que mi fuente de información estaba en lengua extranjera y esto era un factor que comportaba que el trabajo avanzara lentamente.

Ya para acabar, sólo hay que decir que lo que verán a continuación es el resultado de 5 meses de trabajo en los cuales además teníamos que pensar en otras asignaturas que tenemos y esto hace que no le hayamos dedicado todo el tiempo que hubiéramos querido.

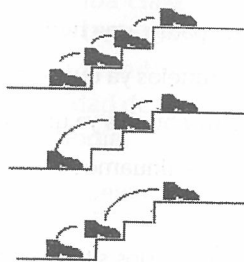
Figura 4. Página introductoria de la investigación de la alumna Aina Faura (2.º de Bachillerato), donde presenta su trabajo

La primera parte del trabajo de Aina resulta conocida por los profesores y profesoras de Matemáticas, sin embargo, destacamos un par aplicaciones (figura 5) de la sucesión poco conocidas, de las muchas que Ama ha recopilado (el árbol genealógico de las abejas, las diferentes formas de subir una escalera, los cuadrados mágicos, la reproducción de la sucesión de Fibonacci, Fibonacci en el triángulo de Pascal, en la razón áurea, en las paredes de ladrillo, en el comportamiento de los números primos, en las

colmenas, en la disposición de casas en diferentes parcelas, en la devolución del cambio, en los árboles telefónicos, y otras identificaciones de la sucesión de Fibonacci en la naturaleza, como pueden ser el número de pétalos de algunas flores, la ordenación de las hojas y ramas en algunos árboles, el número de espirales de una piña, etc.

Los pasos de Leonardo

Esta curiosidad es muy similar a la anterior, sin embargo presenta una pequeña diferencia y es que en lugar de presentar el problema en un plano lo presenta en unas escaleras.



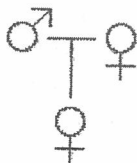
Aquí nos preguntamos de cuántas maneras podemos, por ejemplo, llegar al tercer escalón teniendo en cuenta que sólo podemos subir de uno en uno, o bien, de dos en dos. La respuesta a esta pregunta vuelve a ser otra vez la sucesión de Fibonacci ya que: para ir al primer escalón sólo hay una posibilidad; para ir al segundo escalón hay dos posibilidades, de uno en uno, o bien, sin pasar por el primer escalón; para ir al tercero habrá tres maneras, tal y como se observa en el dibujo, y así continuando la sucesión.

Abejas, los números de Fibonacci, y el árbol genealógico

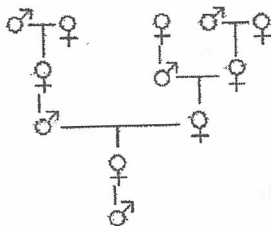
Otra curiosidad relacionada con los números de Fibonacci es la relación que hay entre éstos y las abejas. Se ha descubierto que el árbol genealógico de las abejas muestra la sucesión de Fibonacci. En primer lugar, antes de explicar cómo sucede, se han de saber algunas características poco usuales de la abejas, como por ejemplo, que no todas tienen dos padres. Las otras son las siguientes:

- En una colonia de abejas hay una hembra especial llamada la reina.
- Muchas abejas hembras son trabajadoras, pero no son como la abeja reina, ya que no pueden poner huevos.
- Después aparecen los abejorros, todos machos y que no trabajan. Los machos son producidos por huevos de la abeja reina no fertilizada, así pues, los machos tienen una madre, pero no tienen ningún padre.
- Todas las hembras son producidas cuando la reina se ha apareado con un macho, así pues las hembras tienen dos padres.

Como ya he dicho antes, las hembras tienen dos padres, mientras que los machos solo tienen uno, una hembra. Así pues, esto se representa de la siguiente manera:



Así pues, si suponemos un árbol genealógico de una abeja macho nos aparecerá ni más ni menos la sucesión de Fibonacci, tal y como se observa en el siguiente árbol genealógico.



Por lo tanto, el abejorro tiene:

- un padre, una hembra.
- 2 abuelos ya que su madre tiene dos padres, un macho y una hembra.
- 3 bisabuelos ya que su abuela tiene dos padres y su abuelo sólo uno.
- Si continuamos así nos va apareciendo la sucesión de Fibonacci.

Figura 5. Dos situaciones propuestas en el trabajo de Aina Faura sobre los números de Fibonacci que el docente desconocía.

La profundidad de las reflexiones matemáticas, así como la amplitud de la recopilación de aplicaciones de la sucesión de Fibonacci y la rigurosidad de las explicaciones sobre ellas, hacen que las principales aportaciones de este trabajo estén relacionadas con procedimientos tales como la búsqueda bibliográfica y la clasificación de aplicaciones.

ii) *Generación de composiciones musicales mediante la aplicación de transformaciones geométricas planas.*

Puesto que Xavier tenía claro el tipo de trabajo de investigación que quería hacer, ya en la primera entrevista le dimos dos artículos (O'Shea, 1979 y Haak, 1982) con la finalidad de que concretara un objetivo e hiciera una planificación. Tras la segunda entrevista Xavier ya tenía claro que su trabajo constaría de cuatro apartados: en el primero haría un breve resumen de la relación entre las Matemáticas y la Música; en el segundo describiría las características musicales de Schoenberg y del sistema dodecafónico; en el tercero estudiaría las transformaciones geométricas planas; y en el último generaría composiciones musicales aplicando dichas transformaciones a una sucesión de notas musicales elegidas de acuerdo con las normas del sistema dodecafónico.

A pesar de que esta planificación perduró a lo largo del desarrollo del trabajo, durante el mismo, Xavier decidió darle un carácter más filosófico planteándose preguntas en la introducción, que trató de responder al final: ¿se puede componer utilizando procedimientos científicos?, ¿dónde está la barrera entre la ciencia y el arte? Estas preguntas le condujeron a

una reflexión mucho más profunda sobre lo que estaba haciendo, y no sólo a la simple composición de una pieza musical y al estudio de sus características musicales.

En esencia, el fundamento matemático del trabajo de Xavier es la utilización que O'Shea (1972) hace de la representación gráfica —mediante funciones escalonadas— de una sucesión de notas musicales de la siguiente forma: divide las teclas del piano en clases de equivalencia (cada clase es una octava) y asigna un número a cada nota, por ejemplo el 0 al Do3, el 12 al Do4, el -12 al Do2, etc., y representa en unos ejes de coordenadas tiempo/notas la sucesión de notas musicales, tomando como unidad de tiempo en el eje de abscisas la longitud de una nota típica de la melodía.

Las composiciones base (figura 6a), pueden trasladarse, repetirse de forma simétrica, etc. (figura 6b).

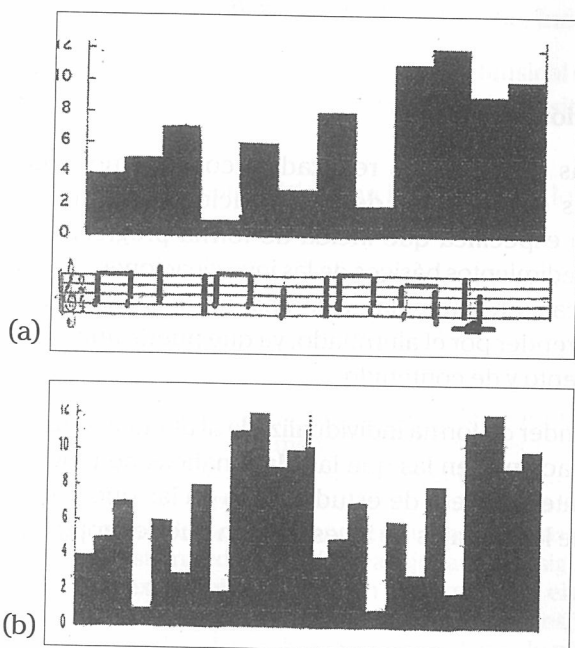


Figura 6. (a) Composición y representación gráfica asociada en ejes coordenados. (b) Repetición trasladada.

La elección de una sucesión de doce sonidos de la octava —elegidos de acuerdo en el orden que decida el compositor—, y la aplicación a dicha sucesión de diferentes transformaciones geométricas (figura 6b) en el orden que el compositor considere oportuno, le permiten obtener una pieza con unas características musicales que dependerán de los sonidos elegidos y de las transformaciones que se le apliquen (figura 7).



Figura 7. Una de las composiciones que Xavier generó, presentada también en casete audio.

7. Consideraciones finales

A partir de las experiencias realizadas, constatamos que es posible desarrollar las capacidades de investigación del alumnado con una programación específica que incida de forma progresiva y sistemática sobre los procedimientos básicos de las investigaciones en general, y sobre las Matemáticas, en particular. Además, hemos de estar dispuestos a dejarnos sorprender por el alumnado, ya que puede aportar ideas nuevas de procedimiento y de contenido.

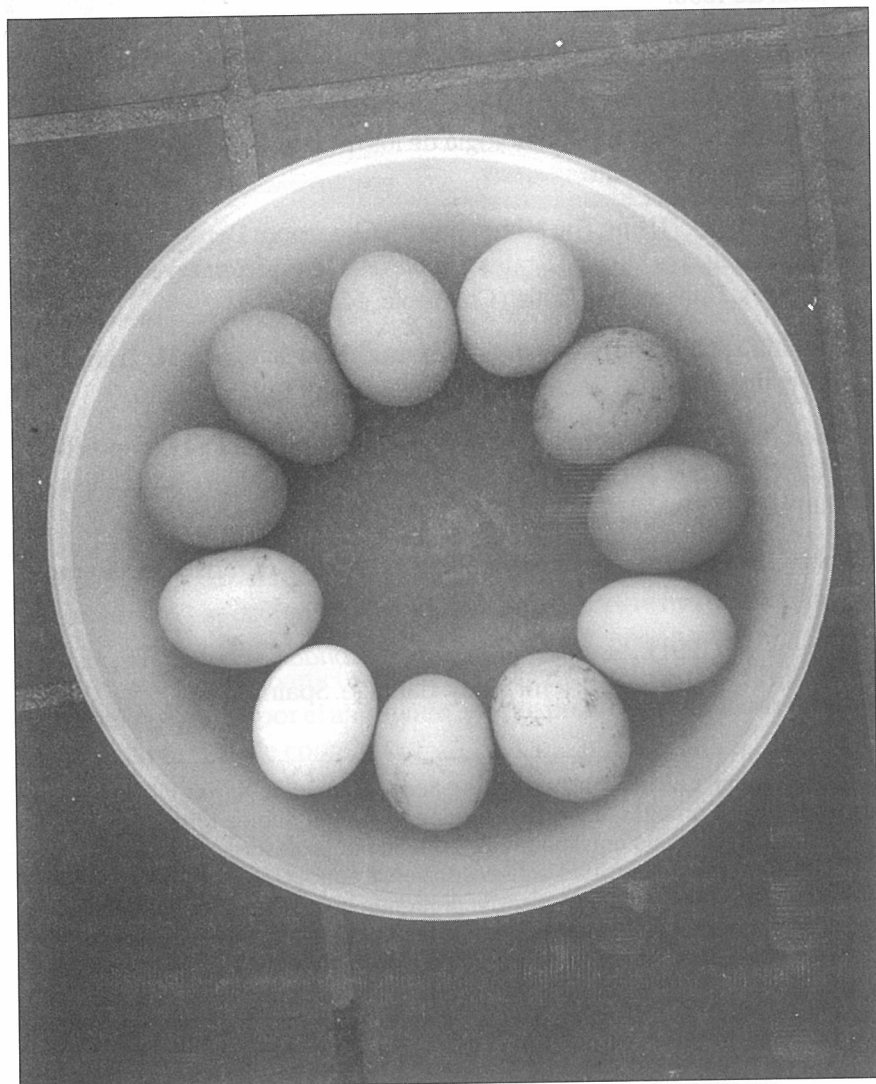
Hemos de atender de forma individualizada al alumnado para reorientarlo hacia investigaciones en las que las Matemáticas no tengan por qué ser necesariamente el objeto de estudio, pero en las que sí que sean el eje vertebrador de los trabajos de investigación que se propongan.

Bibliografía

- Abrantes, P. (1994): *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática* (tese de doutoramento). Lisboa. APM.
- Alsina, C.; Fortuny, J. y Giménez, J. (1993): *Bon dia mates 12-16*. Barcelona. Generalitat de Catalunya.
- D. E. (Departament d'Ensenyament) (1998-1999): "Fulí de disposicions i actes administratius", normativa del curs 1998-1999 (pp. 1852-1853). Barcelona. Generalitat de Catalunya.

- DOGC (Diari oficial de la Generalitat de Catalunya) (1996): Decret 82/1996, del 5 de marzo de 1996.
- DOGC (Diari oficial de la Generalitat de Catalunya) (1998): Orden del 31 de juliol de 1998.
- Faura, A. (1999): "La sucesión de Fibonacci". Trabajo de investigación en el Bachillerato, dirigido por Manel Sol. Premio Cirit 1999. Inédito.
- Grup Vilatzara (1999): "Metodología de los trabajos de investigación en el Bachillerato". Inédito.
- Haak, S. (1982): "Using The Monochord: a Classroom Demonstration on the Mathematics of Musical Scales". *Applications of Secondary School Mathematics*. University of British Columbia. 143-149.
- Matamala, F.X. (1998): "La música... una ciencia exacta?". Trabajo de investigación en el Bachillerato, dirigido por P. Cobo. Inédito.
- O'Shea, T. (1972): "Geometric Transformations and Musical Composition". *Applications of Secondary School Mathematics*. University of British Columbia. 97-102.
- Sol, M. (1998): "Proyectos matemáticos en la ESO: cómo los evaluamos". *UNO*, n.º 17.
- Stephens, M. (1991): *Assessing Projects for Secondary schools*. In C. Alsina & M. Niss (eds) *Proceed. Icmi Study*. Calonge. Spain.

Jesús Bondia, Carme Chalaux, Jaume Serra, Manel Sol, Xavier Vilella, Pedro Cobo, Jordi Comellas, Joaquim Giménez y Carles Subies forman el grupo Vilatzara, constituido en septiembre de 1996 por profesores de matemáticas de secundaria y universidad, interesados en la educación matemática y en la producción de material didáctico. Se proponen buscar recursos útiles para las exigencias del nuevo sistema educativo. Sus trabajos actuales siguen las cuatro líneas siguientes: reflexión sobre educación matemática y elaboración de actividades didácticas, participación en encuentros de profesores, colaboración en actividades de formación del profesorado, y por último, la publicación de algunos trabajos en revistas como UNO, Cuadernos de Pedagogía y Biaix.



Stella ovatus

Luis Balbuena Castellano.