

La resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos

María Aurelia Noda Herrera

En este trabajo recogemos un breve resumen¹ de la Tesis Doctoral "*Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de Matemáticas bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del Primer Ciclo de la ESO y Maestros en formación*" que, bajo la dirección de los Doctores D. Martín M. Socas Robayna y D^a. Josefa Hernández Domínguez, ha sido realizada, por M. Aurelia Noda Herrera, en el Área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático.

La decisión de situar nuestra investigación en el campo de la resolución de problemas de Matemáticas en el sistema escolar, es consecuencia de que el planteamiento y la resolución de problemas ha sido y es uno de los objetivos prioritarios de la Matemática, siendo un tema central en la construcción del conocimiento matemático y constituyendo una actividad cognitiva básica, que ha sido reconocida como esencial por la teoría y la práctica educativa.

No obstante, la investigación en este campo, se mueve en un amplio abanico de posibilidades que van desde consideraciones cognitivas que identifican la "resolución de problemas" con la "cognición" (Mayer, 1986) hasta consideraciones epistemológicas sobre la noción de problema de matemáticas. Por tanto, plantear este trabajo como un estudio de la resolución de problemas de matemáticas en el sistema escolar era excesivamente amplio y heterogéneo, por ello fue preciso delimitarlo, determinando los estudios posibles que queríamos abordar y los procesos que queríamos estudiar.

Las primeras cuestiones que nos planteamos estaban relacionadas con el fracaso de los alumnos en la resolución de problemas: ¿por qué hay alumnos que no logran resolver un problema y, sin embargo, muestran un conocimiento correcto de la teoría, están interesados por aprender y resuelven sin dificultad ejercicios estándar?, ¿por qué muchos alumnos, ante la tarea de resolver un problema, lo primero que buscan es la operación o fórmula que les permita, con todos los datos del problema, obtener un

¹ En aquellos aspectos de la investigación, que han sido ya publicados, no nos extenderemos sino que indicaremos las referencias de los mismos.

resultado que dé respuesta al objetivo pedido? ¿falta una reflexión cualitativa previa?, ¿el operativismo mecánico con el que se abordan habitualmente los problemas, es quizás debido a que la orientación habitual de la resolución de problemas suele impulsar el manejo abstracto de fórmulas, buscando ecuaciones que relacionen datos e incógnitas y poniéndose a realizar cálculos inmediatamente?

Del análisis de estas primera cuestiones surgen nuevas preguntas de investigación: ¿qué ocurriría si los resolutores se enfrentaran a problemas donde la información dada es insuficiente o hay información no necesaria?, ¿se potenciaría el nivel de razonamiento y la comprensión conceptual, al tener que hacer un estudio cualitativo de la situación, intentando acotar y definir de manera precisa el problema, expresando con claridad qué es concretamente lo que se pide, precisando y explicitando las condiciones que se consideran imperantes en la situación abordada, como hacen habitualmente los expertos ante un verdadero problema?, ¿el trabajo con este tipo de problemas es un paso previo al tratamiento de verdaderos problemas de investigación?

Estas cuestiones planteadas hizo que decidiéramos limitar el campo de estudio, a la resolución de problemas de Matemáticas no habituales hasta ahora, en los libros escolares y en la práctica diaria del aula, como son aquellos en los que falta o sobra información, realizando un estudio descriptivo de las actuaciones de los estudiantes, a fin de comprender de manera coherente la naturaleza de los procesos de solución asociados con dichos problemas, y analizando el impacto que el experimentar con estos problemas puede tener sobre el estudiante, que aprende importantes ideas matemáticas.

Problema de investigación

Tras la revisión específica del campo de estudio de nuestra investigación desde el punto de vista curricular y de la investigación, así como del análisis de la noción de problema, su significado y caracterización y las preguntas de investigación planteadas, nos conduce a plantear como problema general de la investigación:

Analizar y describir los comportamientos de los resolutores, frente a problemas de encontrar bien y mal definidos en contextos diferentes, (aritmético, algebraico y geométrico), analizando fundamentalmente la fase de comprensión de la situación problema, observando para ello ¿cómo identifican las situaciones problema?, ¿cómo actúan sobre las condiciones y/o el objetivo? ¿qué relaciones establecen entre las

condiciones y el objetivo? ¿qué recursos utilizan para justificar sus actuaciones? ¿cómo conviven en el contexto escolar situaciones problema bien y mal definidas?

Esta investigación, tiene un interés curricular, ya que observamos cómo las tendencias curriculares más recientes para la enseñanza de las matemáticas han insistido en la necesidad de situar en un primer plano las capacidades de “orden superior”, es decir, las que están ligadas a la identificación y resolución de problemas, al pensamiento crítico y al uso de estrategias metacognitivas.

En estos últimos años, la resolución de problemas “mal definidos” o “no rutinarios” o “abiertos” ha tomado un interés específico desde el punto de vista de la instrucción y la evaluación, siendo estos problemas y sus procesos implicados, centrales en la disciplina matemática y en la naturaleza del pensamiento matemático, tal como ocurre en la matemática en sí misma y en la aplicación de la matemática para resolver problemas aplicados (ATM, 1985; NCTM, 1989-1991-2000; MEC, 1989; Anon, 1990; Stacey, 1995; Shimada, 1997; Hashimoto, y Swada, 1984; Nohda, 1986; Pekhonen, 1995).

Por otra parte, estos problemas tienen un interés desde el punto de vista de la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Dentro de la investigación en resolución de problemas en esta última época, aparecen múltiples líneas. Una de ellas, que es donde situamos el trabajo que se presenta, se ocupa de los diferentes usos de los problemas “mal definidos”, “mal estructurados”, “abiertos”, etc. y los procesos cognitivos y metacognitivos asociados a la resolución de estos problemas, convirtiéndose la formulación o invención de problemas (“problem posing”) en un importante tópico, dentro de esta corriente, que es objeto actualmente de numerosas investigaciones.

Este interés desde la investigación se pone de manifiesto por los intentos de diferentes autores por caracterizar y dar tipologías de problemas y por el desarrollo de investigaciones en la resolución de este tipo de problemas.

Como aspectos más relevantes de esta revisión tuvimos en cuenta los aspectos siguientes: a) con respecto a las tipologías de problemas observamos las dificultades existentes para hacer clasificaciones precisas, ya que muchas de éstas presentan aspectos comunes en las diferentes categorías; b) tras analizar los términos que aparecen en las propuestas curriculares, en la revisión de las tipologías de problemas, y en las diferentes investigaciones existentes, observamos que en muchas ocasiones se utiliza un mismo término para referirse a situaciones diferentes, e incluso, la designación de una misma situación con diferentes términos; c) a pesar del interés actual por los problemas “mal definidos”, se observa una esca-

sez de investigaciones sobre el uso efectivo de tales problemas en la instrucción y evaluación; aún, hay claramente una necesidad de que la investigación sea mucho más sistemática en esta área, a fin de comprender de forma coherente la naturaleza de los procesos de solución asociados con dichos problemas.

Objetivos

Para dar respuesta al nuestro problema de investigación, planteamos tres objetivos generales:

1º) *Presentar una propuesta de organización conceptual de los términos usados. Elaborar un Modelo de Competencia formal.* En este sentido pensamos, que disponer de un modelo formal abstracto de problema que caracteriza una situación ideal, con relación o no a un usuario ideal, permite al menos a nivel "local", una organización que incluye todos los tipos de problemas que queremos tratar diferenciándolos unos de otros y caracterizándolos y además, nos puede servir de referencia para analizar la ejecución de los resolutores.

2º) *Estudiar la naturaleza de las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación, frente a problemas de encontrar bien y mal definidos, determinando los comportamientos regulares e invariantes.*

3º) *Estudiar las justificaciones que utilizan los alumnos en la fase de preparación, para validar y refutar los problemas de encontrar bien y mal definidos. Establecer categorías de análisis de las justificaciones utilizadas.*

Estos objetivos generales suponen de hecho, abordar tres estudios diferenciados que tienen en sí mismos identidad propia, pero que están estrechamente relacionados, donde se concretan y particularizan cada uno de los objetivos anteriores.

Fundamentos del marco teórico

El marco teórico conceptual en el que desarrollamos nuestra investigación se fundamenta o sustenta en componentes de naturaleza epistemológica y de naturaleza cognitiva, que de manera específica se concreta en: La búsqueda de un Modelo de Competencia Formal (MCF) de problemas de encontrar bien y mal definidos, desde la componente epistemológica, y en Modelos de resolución de problemas, Esquemas de análisis para observar la actuación de los resolutores y Análisis de las justificaciones, desde la componente cognitiva.

Para la construcción del MCF (Noda, Hernández, y Socas, 1998b, 1999b, 1999d), tenemos en cuenta, únicamente, al problema en su organización lógico formal de los objetos implicados, es decir, conceptos, relaciones y procedimientos que lo caracterizan. Consideramos los “problemas de encontrar” de la clasificación de Polya (*En un problema de encontrar hay incógnita, datos y condición, y el propósito es descubrir la incógnita*. Polya 1962), y adaptamos algunos elementos utilizados en la definición de espacio problema de Newell y Simon (1972). Pensamos que disponer de un modelo formal abstracto de problema, que caracteriza una situación ideal, con relación o no a un usuario ideal, permite al menos a nivel “local”, una organización que incluye todos los tipos de problemas que queremos tratar, diferenciándolos unos de otros y caracterizándolos y además, nos puede servir de referencia para analizar la ejecución de los resolutores.

En nuestra investigación, no pretendemos analizar todas las fases de resolución de un problema bien o mal definido, sino centramos en aquella que dé respuesta a nuestras preguntas de investigación: ¿Cómo identifican los resolutores las situaciones problema en términos de bien o mal definidos? ¿Qué relaciones establecen entre los datos y el objetivo? Es por ello por lo que recurrimos a los distintos modelos del proceso de resolución de problemas de matemáticas y consideramos en nuestro trabajo la “fase de preparación” (Bourne y otros, 1971) y nos centramos en la actuación de los alumnos en esta fase, que Dewey (1933), concreta en: identificación de la situación problemática, definición precisa del problema y análisis de medios-fines, esto es, cómo analizan e interpretan los resolutores los datos disponibles inicialmente, las restricciones y cómo identifican el criterio de solución (comprender y concebir un plan, Polya, 1954, 1957).

Para poder profundizar en el comportamiento de los resolutores en esta fase, elaboramos un Esquema de análisis que adaptamos del modelo de actuación de Schoenfeld (1985) (Noda, Hernández, y Socas, 1998b, 1999b, 1999d).

Nuestro MCF y el Esquema de análisis construido, nos permitió establecer unas categorías de análisis que dan respuesta a algunas de nuestras preguntas de investigación, que nos permiten categorizar los comportamientos de los resolutores y establecer la existencia o no de comportamientos regulares e invariantes (Noda, Hernández, y Socas, 1999b, 1999c).

Por otra parte, el análisis de determinados episodios del Esquema de análisis construido, nos permite observar las justificaciones que utilizan los resolutores en sus actuaciones en esta fase de preparación, e intentar construir un sistema de categorías de análisis de las justificaciones utilizadas.

Metodología

En la investigación distinguimos dos etapas: el estudio piloto y el estudio definitivo. El estudio piloto permite la elaboración de un instrumento contrastado de recogida de datos, adecuado para los propósitos de nuestra investigación, y la concreción de los instrumentos de análisis. Con ello diseñamos e implementamos el estudio definitivo.

En ambas etapas, se utilizó una metodología cualitativa, que nos permitió, tras la elaboración y aplicación de distintos cuestionarios y realización de pruebas videograbadas, realizar un análisis sobre el proceso de resolución seguido, estableciendo la existencia de comportamientos regulares e invariantes, así como un análisis de las justificaciones que usaban los resolutores en términos de prueba y argumentación.

La metodología cualitativa es complementada con una metodología cuantitativa en términos de porcentajes que, tras la elaboración y aplicación de distintos cuestionarios y realización de pruebas escritas, nos permitió obtener datos globales sobre la actuación de los alumnos en la fase de "preparación" y la búsqueda de comportamientos regulares e invariantes.

Las pruebas escritas se realizaron con alumnos² de tercer curso de la Especialidad de Educación Infantil del Título de Maestro del C.S.E. de la Universidad de La Laguna, en el estudio piloto y, con 20 alumnos de 2º curso de la ESO pertenecientes al colegio Público Isabel la Católica de Santa Cruz de Tenerife y 23 alumnos de primer curso de la Especialidad de Educación Infantil del Título de Maestro del C.S.E. de la Universidad de La Laguna, en el estudio definitivo.

Las pruebas videograbadas se realizaron con alumnos seleccionados por su expediente académico en matemáticas (nivel académico alto, medio y bajo) y la opinión de sus respectivos profesores en dicha materia. En el estudio piloto, con tres alumnos de tercer curso de la Especialidad de Educación Infantil del Título de Maestro del C.S.E. de la Universidad de La Laguna, y, en el estudio definitivo con tres alumnos de 2º curso de la ESO pertenecientes al Instituto de Enseñanza Secundaria El Chapatal de Santa Cruz de Tenerife y 3 alumnas de primer curso de la Especialidad de Educación Infantil del Título de Maestro del C.S.E. de la Universidad de La Laguna.

Síntesis general de la investigación

A modo de estructura general de la investigación, y antes de pasar a co-

² 9, 13 y 21 alumnos, en las diferentes pruebas del estudio piloto.

mentar los resultados y las conclusiones de la investigación, exponemos la relación entre las distintas partes que conforman esta investigación.

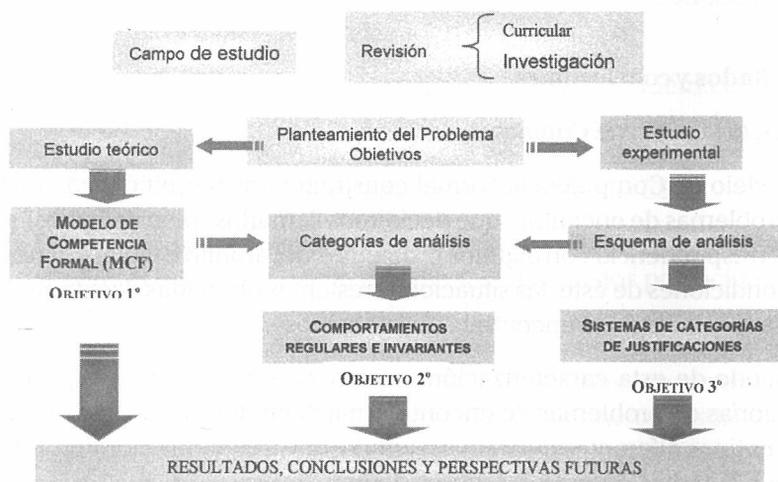


Figura 1

Tras situar nuestra investigación en el campo de estudio correspondiente y realizar una revisión desde el punto de vista curricular y de la investigación, planteamos el problema general de la investigación y formulamos los objetivos correspondientes. Posteriormente abordamos el estudio teórico de la investigación construyendo el modelo de competencia formal de los problemas de encontrar bien y mal definidos (MCF), que es el primer objetivo planteado.

El MCF permitió elaborar un primer sistema de categorías de análisis con el que comenzamos a realizar el estudio piloto, que nos condujo a la elaboración de un instrumento contrastado de recogida de datos, adecuado para los propósitos de nuestra investigación, a la construcción de un Esquema de análisis y a la concreción de los instrumentos de análisis. Con ello diseñamos e implementamos el estudio definitivo.

El Esquema de análisis, hizo posible la concreción del sistema de categorías de análisis con el que abordamos el estudio de los comportamientos regulares e invariantes, que es el segundo objetivo planteado en la investigación.

Por otra parte, algunos episodios del Esquema de análisis nos permitieron observar los recursos utilizados por los resolutores para justificar sus ac-

tuciones, pudiendo de esta manera establecer un sistema de categorías de las justificaciones, que es el tercer objetivo planteado.

Resultados y conclusiones

Sobre el Modelo de Competencia Formal

El Modelo de Competencia Formal construido nos permitió caracterizar los problemas de encontrar, que decidimos llamarlos "bien definidos" por su correspondencia con algunos problemas del ámbito escolar y al negar las condiciones de éste, las situaciones restantes obtenidas decidimos llamarlas problemas de encontrar "mal definidos".

Partiendo de esta caracterización, nos encontramos con siete posibles categorías de problemas de encontrar mal definidos que se concretaron en tres tipos diferentes que tenían sentido, que denominamos tipo T_1 (sin datos), T_2 (faltan datos) y T_3 (sobran datos).

Por otra parte, el MCF permite establecer categorías de análisis para caracterizar y categorizar las actuaciones de los resolutores.

Sobre la existencia de comportamientos regulares e invariantes³

- A pesar de que los problemas presentados implicaban contenidos matemáticos, de niveles de enseñanza anteriores a los que cursaban los alumnos objeto de este estudio, éstos tuvieron dificultades para identificar de forma correcta dichos problemas.
- Se pone de manifiesto en la investigación que, el contexto del problema presentado así como la tipología del mismo, tienen influencia en los comportamientos de los resolutores, tanto de la ESO como del

³ El criterio establecido es diferente según el tipo de prueba realizado. En las pruebas escritas, un comportamiento es regular si entre un 25% y un 75% del alumnado presentan la misma secuencia de comportamientos, y es invariante si la presentan un 75% o más del alumnado. En las pruebas videograbadas adoptamos dos criterios: a) si el análisis lo hacemos ante un problema determinado, un comportamiento es regular si dos alumnos de la misma población de estudio presentan una misma secuencia de comportamientos, y es invariante si la presentan los tres; b) si el análisis lo hacemos según la tipología del problema y nivel académico del resolutor, un comportamiento es regular si el alumno manifiesta una misma secuencia de comportamientos, entre un 25% y un 75% de los problemas presentados de ese tipo, y es invariante si lo manifiesta en un 75% o más, de los problemas presentados de ese tipo.

CSE, siendo en los problemas de contextos geométrico y algebraico, así como en los mal definidos tipo del T_3 (sobran datos), donde más actuaciones incorrectas observamos, con respecto a su identificación y a las acciones realizadas sobre los datos.

- Si el análisis lo hacemos atendiendo al nivel académico de los resolutores, observamos que las actuaciones más incorrectas, en todas las categorías estudiadas, se dan en los resolutores de niveles académicos medio y bajo, tanto del CSE como de la ESO.
- Encontramos comportamientos invariantes, que reflejan tanto actuaciones correctas⁴ como incorrectas⁵, en las dos poblaciones de estudio (CSE y ESO), destacando que la existencia de comportamientos invariantes es más frecuente en los alumnos del CSE. Los comportamientos invariantes que indican actuaciones incorrectas, se observan en los problemas de encontrar caracterizados desde la competencia como mal definidos, tanto en los alumnos del CSE como en los de la ESO.

Problemas bien definidos	Problemas mal definidos Faltan datos (T_2)	Problemas mal definidos Sobran datos (T_3)
ESO -----	No saber identificarlo (en contexto geométrico)	
CSE -----	-----	Identificarlo como bien definido (en contexto aritmético)

- Observamos comportamientos regulares, que reflejan tanto actuaciones correctas como incorrectas, en las dos poblaciones de estudio, CSE y ESO, y en los tres tipos de problemas estudiados, bien definidos, mal definidos porque faltan datos (Tipo T_2) y mal definidos porque sobran datos (Tipo T_3). Los comportamientos regulares que indican actuaciones incorrectas son los siguientes:

⁴ Identifican el problema presentado de forma correcta y, si se trata de un problema de encontrar caracterizado desde la competencia como mal definido, lo transforman en un problema bien definido.

⁵ Identifican el problema presentado de forma incorrecta y/o lo transforman en un problema mal definido.

	ESO	CSE
Problemas bien definidos	No saber identificarlo (en los tres contextos)	No saber identificarlo (en contexto geométrico)
Problemas mal definidos. Faltan datos (T_2)	Identificarlo como bien definido (en contexto algebraico) Identificarlo como mal definido y transformarlo en otro problema mal definido (en contexto geométrico)	Identificarlo como bien definido (en contexto algebraico)
Problemas mal definidos. Sobran datos (T_3)	Identificarlo como bien definido (en contexto algebraico) No saber identificarlo (en contexto algebraico)	Identificarlo como bien definido (en contexto geométrico) Identificación como mal definido y transformarlo en otro problema mal definido (en contextos aritmético y geométrico)

- Con respecto a los comportamientos regulares observados en las pruebas videograbadas, éstos son más frecuentes entre los resolutores de niveles académicos alto y medio, tanto en los alumnos del CSE como en los de la ESO.
- El trabajo con problemas mal definidos hace más rica la fase de preparación, en la investigación, que si únicamente propusiéramos problemas bien definidos.
- El planteamiento conjunto de problemas de encontrar bien y mal definidos, no parece generar confusión en los resolutores, por lo que pensamos que puede favorecer la resolución de problemas bien definidos, al potenciar la fase de preparación.

Sobre los recursos utilizados por los resolutores para justificar sus actuaciones

Para hacer el análisis de los recursos utilizados por los resolutores para justificar sus actuaciones, en términos de validar (aceptar como válido el problema presentado, tanto si es bien definido como si es mal definido) y refutar (no aceptar como válido el problema presentado), seguimos un proceso de tres fases de observaciones descriptivas (Noda, Hernández, y Socas, 1999b, 2000a). De esta manera, partimos de unas observaciones descriptivas muy generales, y tras ir focalizando dichas observaciones, pudimos construir un sistema de categorías de justificaciones, utilizadas por los resolutores.

El análisis realizado en el estudio definitivo, nos permitió no solo confirmar y ampliar los tipos de justificaciones observadas en el estudio piloto, sino precisar algunas de ellas, de manera que el sistema de categorías de análisis de las justificaciones utilizadas por los resolutores es el siguiente:

RECURSOS		
Prueba		Argumentación
Naturaleza interna	Naturaleza externa	
<ul style="list-style-type: none"> • Empírico • Analítico • Contradicción • Contraejemplo 	<ul style="list-style-type: none"> • Ritual • Creencias 	<ul style="list-style-type: none"> • Descripción-Explicación • Comparación-Analogía • Ridículo o ironía
	<ul style="list-style-type: none"> - Autoridad de la tarea - Autoridad del profesor - Autoridad del compañero competente 	

Sobre la metodología e instrumentos utilizados

Con el objeto de poder desarrollar la investigación, nos vimos en la necesidad de elaborar modelos de competencias, tanto a nivel epistemológico como cognitivo, de manera que nuestras aportaciones, a nivel metodológico, se concretaron en:

- Elaboración de un Modelo de Competencia Formal, que nos permitió caracterizar las actuaciones de los resolutores.
- Elaboración de un Esquema de análisis para observar la actuación de los resolutores reales en la fase de preparación con problemas de encontrar bien y mal definidos. La construcción de este modelo de actuación es una adaptación del modelo de Schoenfeld (1985), que se concreta después de varios trabajos preparatorios.
- Elaboración de un sistema de categorías que configura un instrumento de análisis y valoración de los comportamientos de los resolutores, que permitió categorizar las actuaciones de los mismos, y determinar la existencia o no, de comportamientos regulares e invariantes.
- Construcción de un sistema de Categorías de análisis de las justificaciones utilizadas, que se convierte en un instrumento teórico que relaciona y tipifica las justificaciones de los estudiantes, frente a problemas de encontrar bien y mal definidos, en la fase de preparación

Estas cuatro elaboraciones dan consistencia al marco teórico y al modelo metodológico elaborado para la investigación.

A modo de síntesis, de las secuencias de comportamientos categorizados que nos permitieron establecer los comportamientos regulares e invariantes, si comentamos la primera parte de las secuencias que nos indica cómo identifican el problema presentado, y, la relacionamos con el resto de las secuencias que indican si actúan o no sobre el problema planteado y en qué lo transforman, podemos determinar cinco grupos de comportamientos que hemos denominado A, B, C, D y E. Si además incorporamos a estos comportamientos, las justificaciones utilizadas en su actuación en términos de validar o refutar, podemos expresar mediante un *gráfico*, los cinco comportamientos que describen las actuaciones de los resolutores en la fase de preparación, cuando se enfrentan a la tarea de resolver problemas de encontrar bien y mal definidos, pudiendo de esta manera, ubicar en el mismo, el comportamiento de los resolutores a lo largo de los diferentes espacios semióticos que presentan en sus actuaciones⁶.

⁶ BD y MD indican, respectivamente, bien definido y mal definido.

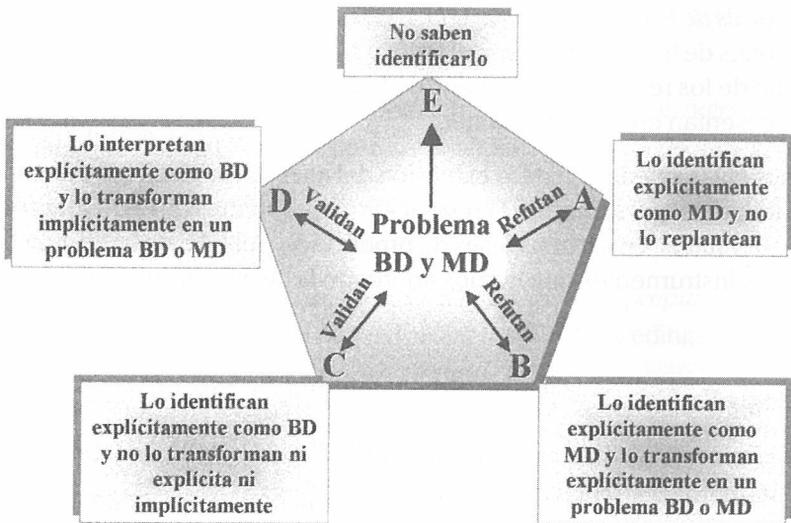


Figura 2

Finalmente, comentar que a lo largo del desarrollo del trabajo de investigación, han quedado abiertas muchas cuestiones, que nos proponemos abordar en el futuro.

El replanteamiento de problemas, que en nuestra investigación surge de las transformaciones realizadas sobre el problema dado, nos planteó nuevos interrogantes: ¿Qué ocurrirá en las fases de producción y enjuiciamiento, cuando el resolutor replantee un problema dado en otro mal definido? ¿Cómo lo identificará? ¿Cómo justificará su actuación?

Nuestra intención es realizar el estudio de potencialidades y dificultades que genera la implementación en el aula de los problemas de encontrar bien y mal definidos, mediante el diseño de materiales curriculares, consensuado con los profesores de Primaria y Secundaria Obligatoria. Pensamos que este tipo de investigación, muy relacionado con la práctica, podría ayudar al estudio acerca del desarrollo de habilidades útiles para la resolución de problemas en general.

Para ello, contamos con los instrumentos teóricos elaborados en términos de modelos de competencia, tanto desde el punto de vista epistemológico: *el MCF de problemas de encontrar bien y mal definidos*, como desde el punto de vista cognitivo: el Esquema de análisis o modelo de actuación; *el Sistema de categorías*, que configura un instrumento de análisis y valoración de los comportamientos de los resolutores; *el Sistema de categorías*

de análisis de las justificaciones utilizadas, que relaciona y tipifica las justificaciones de los estudiantes; y, *el gráfico* que permite ubicar el comportamiento de los resolutores a lo largo de los diferentes espacios semióticos que presentan en sus actuaciones.

En particular, queda abierta la extensión del análisis de los diferentes comportamientos que surgen en la resolución de problemas de encontrar bien y mal definidos, en las otras fases de producción y enjuiciamiento, con los mismos instrumentos que hemos abordado la fase de preparación.

Bibliografía.

Association of Teachers of Mathematics (1985). ATM at Wesminster. Mathematics Teaching, 111, pp. 44-46.

Bourne, L.E.; Ekstrand, B.R. y Dominowski, R.L. (1971). The Psychology of Thinking. (Traducida al castellano: 1975. Psicología del pensamiento. Ed. Trillas: Mexico).

Hashimoto, Y. y Sawada, T. (1984). Research on the mathematics teaching by developmental treatment of mathematical problems. E. T. Kawaguchi (Ed.), Proceedings of the ICMI-JSME regional Conference on mathematical education, pp. 309-313. Japan Society of Mathematical Education: Japan.

Mayer, R.E. (1986). Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Ed. Paidós Ibérica: Barcelona.

MEC (1989). Diseño Curricular base. Educación Primaria. Servicio de publicaciones del MEC: Madrid.

NCTM (1980). An agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s. NCTM: Reston, Va.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. NCTM: Reston, Va. (Traducción al castellano: 1991, Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. SAEM THALES: Granada).

NCTM (1991). Professional Standards for Teaching Maths. NCTM: Reston, Va.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. NCTM: Reston, Va.

- Newel, A. y Simon, H. (1972). *Human Problem Solving*. Prentice Hall: New Jersey.
- Nohda, N. (1986). *A study of "open-approach" method in school mathematics*. Tsukuba Journal Educational Study in Mathematics. 5, pp. 119-131.
- Nohda, N. (1993). *Teaching and evaluating using "open-ended problems" in classroom*. ZDM, 95/2, pp.57-61.
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1997). *Study of the preparation stage in the resolution of badly defined problems*. En Proceedings of the 21st Conference PME, vol. 1, pp. 282. Finland.
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1998a). *Analysis of students' behaviour regarding badly defined problems*. En Proceedings of the PME-22. Vol. 4, pp. 291. South Africa.
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (1998b). *Estudio del comportamiento de alumnos de Magisterio en la resolución de problemas mal definidos*. Guinigüada. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- Noda, A., Hernández, J., y Socas, M. M. (1999b). *Study of justifications made by students at the "Preparation stage" of badly defined problems*. En O. Zaslavasky (Ed.), Proceedings of the International Group for the PME-23. Vol. 3, pp. 345-352. Haifa, Israel.
- Noda, A.; Hernández, J. y Socas, M. M. (1999c). *Acciones e invariantes en la resolución de problemas mal definidos*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 12, tomo 1, pp. 179-184. Grupo Editorial Iberoamérica: Mexico.
- Noda, A.; Hernández, J. y Socas, M. M. (1999d). *Problemas de encontrar bien y mal definidos. Una propuesta de caracterización*. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds), Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, pp. 187-200. Universidad de La Laguna.
- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (2000a). *Argumentaciones y Pruebas de validación o refutación, utilizadas por alumnos del CSE y de la ESO, en la fase de "preparación" ante problemas de encontrar bien y mal definidos*. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds), Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática. Universidad de La Laguna.

- Noda, A., Hernández, J. y Socas, M. M. (2000b). *Study about the problem solving badly defined. Actions e invariants*. Nordisk Matematikdidactikk (Nordic Studies in Mathematics Education). (Pendiente).
- Pehkonen, E. (1995). *Using open-ended problems in mathematics*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), vol. 2, pp. 55-57.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton. University Press. (Traducción al castellano: 1966. *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid).
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton University Press: New Jersey. (Traducción al castellano: 1976. *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas: Mexico).
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery*. John Wiley and Sons: New York.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press: New York.
- Shimada, S. (Ed.) (1977). *On lessons using open-ended problems in mathematics teaching*. Mizuumishobo: Tokyo.
- Stacey, K. (1995). *The challenges of keeping open problem-solving open in school mathematics*: ZDM27 (2), pp. 62-67.

María Aurelia Noda Herrera. Es en la actualidad profesora asociada de la Universidad de La Laguna, adscrita al Área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático. Sus publicaciones se sitúan en la Didáctica de las Matemáticas y principalmente en el campo de la Resolución de problemas.

E-mail: mnoda@ull.es

Web: <http://webpages.ull.es/users/mnoda/>