El rincón de la calculadora gráfica
A cargo de Francisco Puerta García

Sacando decimales

Por Francisco Puerta García

Desarrollos decimales

Cuando pido a mis alumnos de secundaria que hallen, con una calculadora normal, el cociente y el resto de una división entera, me preguntan con perplejidad: ¿con qué tecla? ¿...no tiene? y, entonces... ¿cómo se hace? Yo los animo a que lo piensen y al cabo de un rato alguno de ellos descubre que si usa la tecla normal de división, la parte entera del resultado es el cociente, y que la llamada *prueba* de la división le permite hallar el resto: $r = D - d \cdot c$. Por ejemplo, si divide 75 entre 4 ve 18.75 en la pantalla, de donde puede deducir que el cociente entero es 18 y el resto
$r = D - d \cdot c = 75 - 4 \cdot 18 = 75 - 72 = 3$.

Después de que se familiaricen con este método hablamos de los distintos casos que se pueden presentar al efectuar una división decimal. El resultado puede ser entero (45 : 13 = 15), decimal exacto, (75 : 4 = 18.75), periódico puro, (1 : 3 = 0.3333...),... etc. El problema con la calculadora es que al efectuar ciertas divisiones, por ejemplo 1 entre 17, obtenemos un número (0.05882352941, si la pantalla es de 12 cifras) que no podemos saber a qué categoría pertenece. Por ello, –les digo– es necesario superar la incapacidad de la calculadora usando nuestra inteligencia; y les sugiero que usen el truco anterior: tomar una cantidad cualquiera de cifras del cociente, por ejemplo los ocho primeros decimales, hallar qué resto corresponde a esa fase del cálculo, dividirlo entre 17 y continuar el desarrollo. Para mayor claridad se pueden adjuntar ceros al numerador para que el resto salga entero directamente. Así, como 100000000:17 da 5882352.94118,

> En esta sección ofrecemos a los lectores un foro en el que exponer ideas, consultar dudas y debatir planteamientos didácticos respecto al uso de las calculadoras gráficas y otras tecnologías portátiles en la enseñanza de las matemáticas. Envía tus aportaciones a **Francisco Puerta García**, Instituto "Isabel de España", calle Tomás Morales, 39, 35003 Las Palmas de Gran Canaria. Correo electrónico fpuertagarcia@sinewton.org.
> Todos los artículos publicados están disponibles en Internet
> http://www.sinewton.org/elrincon

el cociente entero será 5882352 y el resto 16 ($r = D - d \cdot c = 100000000 - 17 \cdot 5882352 = 100000000 - 99999984 = 16$). En la siguiente etapa, efectuando 1600000000:17 tedremos 94117647 como cociente entero y 1 como resto ($r = 1600000000 - 17 \cdot 94117647 = 1$). Ahora bien, este 1 nos devuelve a la situación de partida, y nos indica, sin ninguna duda, que 1:17 es una fracción periódica pura con período de 16 cifras: $\frac{1}{17} = 0'\overline{0588235294117647}$

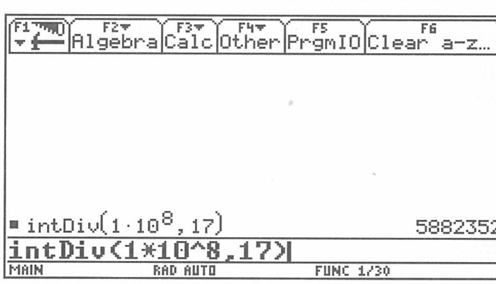
Si mis alumnos hubieran realizado este desarrollo con lápiz y papel, el trabajo mecánico probablemente les hubiera impedido captar la cuestión verdaderamente crucial de este asunto, darse cuenta de que si un resto se repite todo el desarrollo se repetirá también, y que esto les asegura que la fracción *tiene* que ser periódica sin necesidad de conocer todos sus decimales. Al disponer de una máquina que evita el trabajo pesado, –pero que como vimos al principio no los libra de pensar– los alumnos tienen más oportunidades de observar cómo se comportan los desarrollos decimales de las fracciones. Se trata de que descubran que si uno de los restos es cero la fracción es decimal exacta, pero que si no es imposible que los restos no se repitan porque sólo hay un número finito de ellos (nunca superan al divisor que, obviamente, es un número finito). Así que los restos de 100000000:17 sólo pueden ser 1, 2, 3, ..., 15 y 16 (no necesariamente en ese orden), y una vez han aparecido los dieciséis alguno de ellos ha de repetirse. Por otro lado, no es difícil encontrar fracciones donde la repetición comienza pronto y su período tiene menos cifras que el máximo posible.

Lo irracional

Muchas veces los libros de texto piden a los alumnos que reconozcan como irracionales números del estilo de 0.1010010001000010000001...., 1.41421356237.... o 3.14159265359...., cuando en realidad cada uno de ellos plantea un problema muy diferente. Si los alumnos han trabajado actividades parecidas a las expuestas aquí, observarán de inmediato que el primero es irracional, en el supuesto que sus cifras continúen indefinidamente con la misma pauta (cosa que a veces no se explicita). Con el segundo ocurre al revés; no tiene pauta evidente, pero existe un razonamiento relativamente sencillo que demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional, lo que nos asegura que su desarrollo nunca podrá entrar en un ciclo periódico por muy lejos que busquemos. El tercer número, conocido desde la antigüedad, es de una clase muy diferente: hubo que esperar a las sofisticadas técnicas del análisis infinitesimal del siglo XIX para determinar su irracionalidad. Y, lo que es peor, este tipo de números reales prolifera infinitamente más que los otros, y salvo contadas excepciones, se llega a sospechar su irracionalidad pero difícilmente se logra demostrarla. Por eso, creo que es necesario que los alumnos adquieran una amplia experiencia acerca de los desarrollos decimales de las fracciones para que puedan apreciar verdaderamente qué significa decir que un número es irracional, y darse cuenta de la dificultad de sacar conclusiones sobre su carácter conociendo sólo un número finito de sus cifras, por muchas que sean. Cualquiera que intente hallar a mano el período de una fracción tan inocente como 1:1861 pronto llegará pensar que nunca se repite (o que ha olvidado el algoritmo de la división), puesto que su período tiene nada menos que 1860 cifras.

Así pues, está claro que sería muy útil didácticamente disponer de una ayuda mecánica para desarrollar indefinidamente cualquier fracción. En lo que sigue voy a mostrar cómo hacerlo –sin utilizar programación– con cualquier máquina que disponga de variables para guardar los datos y resultados de los cálculos, una tecla $\boxed{\text{ENTER}}$ que repita la última acción al pulsarla repetidamente y una línea de entrada en la que se puedan escribir comandos múltiples, normalmente separados por algún símbolo como ':'. Estas características están presentes en prácticamente todas las calculadoras gráficas del mercado, pero aquí vamos a usar la TI-92 que nos facilita el procedimiento porque tiene incorporadas las funciones intDiv (división entera) y mod (resto módulo un número) para calcular el cociente y el resto directamente[1]. Veamos cómo se efectuaría con ella el desarrollo de $\frac{1}{17}$ en bloques de 8 cifras.

- En primer lugar, la función "división entera" IntDiv(100000000,17) nos da 5882353, cociente entero de la división de 100000000 entre 17.



[1] Hay que advertir que no es imprescindible disponer de una calculadora TI–92. El método se puede adaptar a cualquier otra que tenga las características señaladas y, al menos, la función "parte entera" para poder calcular los restos. Véase mi artículo "Procesos iterativos en la pantalla principal" publicado en El rincón de la calculadora gráfica, *Números*, vol 36, pp 75-79, diciembre de 1998.

- A continuación, la función "módulo" mod(100000000,17) nos muestra que el resto correspondiente es 16.

```
■ mod(1·10^8, 17)                                16
mod(1*10^8,17)
MAIN            RAD AUTO            FUNC 2/30
```

- Usando 16 como dividendo, la expresión intDiv(16*10 ^ 8,17) nos da las 8 cifras siguientes del desarrollo (94117647), y la función mod(1*10 ^ 8,17) nos da 1, que es el resto correspondiente.

```
■ intDiv(16·10^8, 17)                      94117647
■ mod(16·10^8, 17)                                1
mod(16*10^8,17)
MAIN            RAD AUTO            FUNC 4/30
```

Al coincidir este resto con el divisor inicial, es claro que continuar el desarrollo sólo puede dar lugar a la repetición de los resultados anteriores, por lo que ya no hay duda de que $\frac{1}{17} = 0'\overline{0588235294117647}$, fracción periódica pura[2].

Automatizar el procedimiento

Para automatizar el procedimiento recurriremos al uso de variables que nos permitan guardar el denominador, el cociente y el resto para que estén disponibles en la siguiente iteración.

Procedimiento I

1. Cargar las variables con sus valores y pulsar ENTER 17 →d: 1→r

```
■ 17 → d : 1 → r                                  1
17→d:1→r
MAIN            RAD AUTO            FUNC 1/30
```

2. Introducir la expresión iterativa
intDiv (r*10 ^ 8,d)→c:mdo(r*10 ^ 8,)→r:c

```
intDiv(r*10^8,d)→c:mod(r*10^8…
MAIN            RAD AUTO            FUNC 1/30
```

3. Pulsar ENTER tantas veces como bloques de 8 decimales queramos extraer

```
■ intDiv(r·10^8, d) → c : mod(r·10^8, d) → r :▸
                                           5882352
■ intDiv(r·10^8, d) → c : mod(r·10^8, d) → r :▸
                                          94117647
…*10^8,d)→c:mod(r*10^8,d)→r:c
MAIN            RAD AUTO            FUNC 3/30
```

[2] Deducimos que delante del 5 hay que colocar un cero porque el primer cociente sólo tiene 7 cifras.

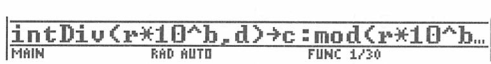
Vamos a analizarlo. En el paso 1, las variables d y r guardan respectivamente el denominador y el numerador. Al pulsar ENTER después del paso 2, la expresión intDiv(r*10 ^ 8,d)→c guarda el cociente en la variable c, y mod(r*10 ^ 8,d)→r guarda el resto correspondiente en r; la última c de la línea de comando sirve únicamente para presentar el cociente en pantalla. Como se ve, cada pulsación de ENTER repite la acción anterior con los valores actuales de r, y actualiza su valor para dejarla preparada para la siguiente iteración, de manera que se pueden sacar tantos bloques de 8 cifras como se quiera con solo pulsar dicha tecla sucesivamente.

Como la calculadora sólo muestra el último de los resultados de una línea de comandos múltiple, este procedimiento tiene el defecto de que guarda el valor del resto en r, para usarlo en la siguiente iteración, pero no lo presenta en la pantalla. Podemos arreglarlo usando una lista[3] de dos componentes que muestre el resto simultáneamente con el cociente. Otra pequeña mejora será poder cambiar más fácilmente el número de cifras de los bloques.

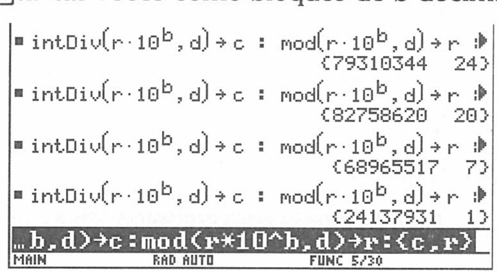
Procedimiento II

1. Cargar las variables con sus valores y pulsar ENTER
29 →d: 23→r:8b:{d,r}

2. Introducir la expresión iterativa
intDiv (r*10 ^ b,d)→c:mdo(r*10 ^ b,d)→r:{c r}



3. Pulsar ENTER tantas veces como bloques de b decimales queramos extraer



[3] Una lista es una estructura de datos capaz de contener una serie de valores del mismo tipo separados por comas y encerrados entre llaves.

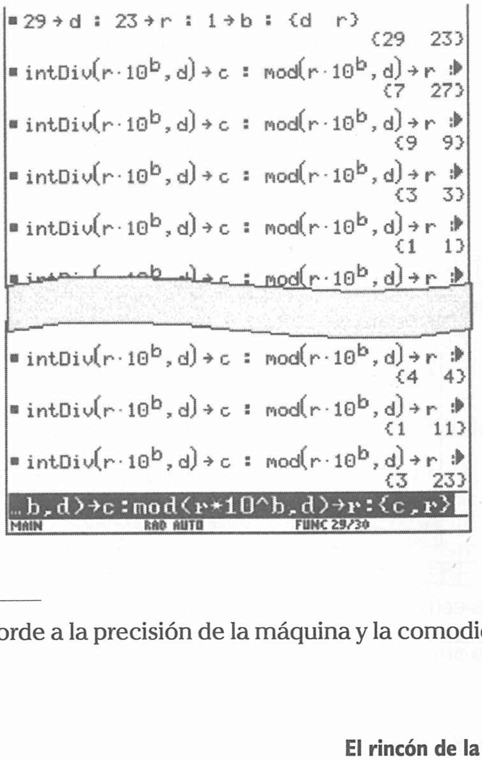
En el paso 1 hacemos lo mismo que antes, pero guardamos el número de cifras del bloque[4] en la variable b, y colocamos al final de la línea de comandos la lista {d,r} para mostrar en pantalla el denominador y numerador de la fracción que vamos a desarrollar. En el paso 2 calculamos el cociente y el resto y los almacenamos en sus correspondientes variables c y r, y terminamos la línea con la lista {c,r}para que ambos se vean simultáneamente en pantalla.

De la salida que vemos en la última pantalla concluimos que

$\frac{23}{29} = 0'79310344^{\underline{24}}82758620^{\underline{20}}68965517^{\underline{7}}24137931...$ (los superíndices indican el valor del resto en ese momento del desarrollo decimal) y nos damos cuenta de que su primer período termina en la secuencia de dígitos 2413, porque a partir de ahí ya observamos repetición de los decimales, y siendo 29 el divisor su período no puede tener más de 28 cifras.

Es decir, $\frac{23}{29} = 0'\overline{7931034482758620689655172413}$

Si quisiéramos efectuar el desarrollo visualizando todos los restos intermedios como si fuera una división larga con lápiz y papel, bastaría guardar un 1 en la variable b y pulsar $\boxed{\text{ENTER}}$ 28 veces.



[4] Lo elegiremos acorde a la precisión de la máquina y la comodidad de lectura.

Es decir,

$$\frac{23}{29} = 0'7^{\underline{27}}9^{\underline{9}}3^{\underline{3}}1^{\underline{1}}0^{\underline{10}}3^{\underline{13}}4^{\underline{14}}4^{\underline{24}}8^{\underline{8}}2^{\underline{22}}7^{\underline{17}}5^{\underline{25}}8^{\underline{18}}6^{\underline{6}}\ 2^{\underline{2}}0^{\underline{20}}6^{\underline{26}}8^{\underline{28}}9^{\underline{19}}6^{\underline{16}}5^{\underline{15}}5^{\underline{5}}1^{\underline{21}}7^{\underline{7}}2^{\underline{12}}4^{\underline{4}}1^{\underline{11}}3^{\underline{23}}$$

Conclusión

En la clase de matemáticas no siempre es necesario sacar decimales; pero me parece que siempre será una actividad enriquecedora para nuestros alumnos. Si lo hacen a mano, al menos practicarán el algoritmo de la división. Si les pedimos que lo hagan con la calculadora científica tendrán que reflexionar sobre el sentido de la división e ingeniárselas para calcular el resto, y si usan calculadoras gráficas adquirirán una incomparable experiencia sobre el significado, el comportamiento y las propiedades de los números racionales que además de su valor intrínseco les facilitarán el acercamiento al paradójico mundo de los números irracionales.

Francisco Puerta García es profesor del Instituto "Isabel de España" (Las Palmas de Gran Canaria) y se interesa por la aplicación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Inició "El rincón de la calculadora gráfica" en la revista Números en marzo de 1997.
fpuertagarcia@sinewton.org

X Concurso de Fotografía y Matemáticas

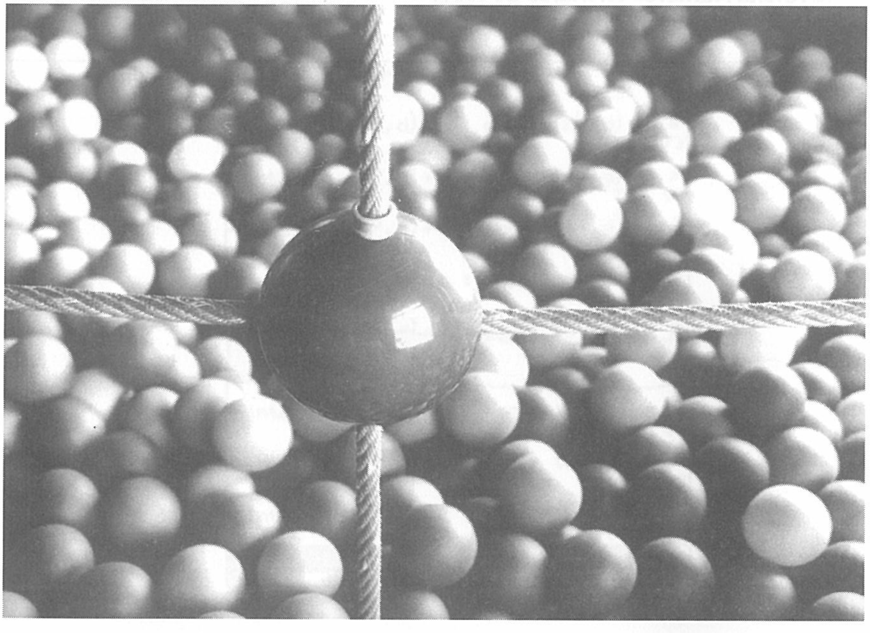
Presentación

El 12 de mayo es el Día Escolar de las Matemáticas. Esta circunstancia nos permitirá hacer una reflexión colectiva en torno a la importancia de las Matemáticas en la formación de los alumnos y alumnas. Para el año 2002, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas ha propuesto el tema "Matemáticas y Gulliver: lo grande y lo pequeño".

El presente concurso (que llega a su décima edición y cuyo fallo se hará público ese día), permite a los Centros programar esta actividad como una oferta más para acercarse a las Matemáticas de una forma distinta a la habitual y enviar los trabajos realizados para participar en el concurso.

La Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas se suma a la iniciativa animando e invitando al profesorado a participar.

Su aportación se concreta creando un premio especial para el profesor o profesora que destaque por su labor de orientación y de estímulo hacia sus alumnos y alumnas animándoles a participar y a desarrollar su imaginación y creatividad matemática a través de la fotografía.



Bolas cartesianas. Diana González González, IES Ingenio.
IX Concurso Fotografía y Matemáticas 2000-2001

Bases del Concurso

1. Podrán concursar todos los alumnos y alumnas matriculados en cualquier Centro de Enseñanza Secundaria de la Comunidad Autónoma de Canarias.

2. Temas del concurso:

Categoría A: Tema libre. Cualquier fotografía que encierre un mensaje matemático.

Categoría B: Presentación de un reportaje sobre algún tema monográfico elegido por el autor o autora. Se puede presentar en color o en blanco y negro, debe contener un mínimo de cinco fotografías y acompañarse de una memoria en la que se explique el significado del reportaje. A título orientativo, posibles temas: las matemáticas en la calle principal; las matemáticas en el deporte; lo redondo de la naturaleza; las espirales en mi entorno; matemáticas en mi centro; paralelas en la calle, etc.

3. Cuota de Inscripción: Gratuita.

4. Las fotografías se pueden presentar en blanco y negro o en color, no sobrepasando en tres, por cada participante, el número de obras para la Categoría A, y su tamaño será como mínimo 15 x l0 y como máximo 30 x 40 centímetros.

5. Las fotografías de la Categoría A se entregarán convenientemente montadas sobre cartulina o cartón, que sobresalga cuatro centímetros alrededor de la fotografía en los márgenes superior y laterales y cinco centímetros en el inferior donde se debe colocar, centrada, una pegatina o ficha con los datos que se indican en el anexo 1. En el reverso de la misma deben figurar los datos que se piden en el anexo 2.

6. Las fotografías de la Categoría B se montarán igual que en el caso anterior, irán numeradas y en cada foto se indicará el título del reportaje además del título de la foto, si tiene. La memoria se presentará en carpeta aparte.

7. Los trabajos se presentarán o enviarán por correo al Departamento de Matemáticas del IES Viera y Clavijo, Avda. Lora Tamayo, s/n. 38205 La Laguna (Tenerife); o a Boutique de la Fotografía, C/. Herradores, 20 y 24. 38204 La Laguna (Tenerife).

El plazo de entrega finaliza el día 12 de abril de 2002.

8. Un Jurado nombrado al efecto, fallará el concurso. Se valorará, fundamentalmente, el mensaje o idea matemática que encierre la fotografía, así como el título de la misma. Para los reportajes, el texto que acompañe a las fotos.

9. Las fotografías enviadas se expondrán en las instalaciones del Museo de las Ciencias y el Cosmo, La Laguna, Tenerife, a partir del día 10 de mayo de 2002, en el que se

celebrará el "Día Escolar de las Matemáticas" y hasta el 30 de mayo.. Pasada esa fecha, los Centros participantes pueden solicitarlas para su exhibición.

10. A los ganadores se les entregará el premio en el acto institucional que se celebrará con motivo del Día Escolar de las Matemáticas. Los premiados residentes en otras islas serán invitados a dicho acto acompañados de su profesor o profesora.

11. El fallo del Jurado será inapelable y podrá declarar, además, desiertos los premios convocados, cuando a su juicio, las obras presentadas no tuvieran el suficiente nivel. Igualmente podrá otorgar premios de accesit.

12. Premios:

Primer premio de la Categoría A: Una cámara digital AGFA modelo Clik, CL30; un libro de matemática recreativa y 30 € en metálico.

Segundo premio de la Categoría A: Una cámara digital AGFA modelo Clik, CL18, un libro de matemática recreativa.

Primer premio de la Categoría B: Una cámara digital AGFA modelo Clik, CL30, un bolso de fotógrafo, un libro de matemática recreativa y 60 € en metálico.

Segundo premio de la Categoría B: Una cámara digital AGFA, modelo Clik, CL18, un bolso de fotógrafo, un libro de matemática recreativa.

Premio especial para el profesorado: Una cámara compacta de fotografías.

13. Las obras premiadas pasarán a ser propiedad del Departamento de Matemáticas del IES Viera y Clavijo, que se reserva el derecho de publicación de cualquier trabajo presentado, reseñando el nombre del autor o autora, así como exponer aquellos trabajos que, aún no siendo premiados, se consideren de interés didáctico.

14. Las obras no premiadas se podrán retirar en un plazo de un mes a partir del cierre de la exposición. Cualquier obra no retirada en ese plazo se considerará propiedad del citado Departamento de Matemáticas.

15. La participación en este concurso implica la aceptación de estas Bases. Cualquier caso no previsto en ellas será resuelto por el Departamento de Matemáticas del IES Viera y Clavijo.