Claves Matemáticas para interpretar el universo financiero

Jesús A. Zeballos y María Rosa R. de Estofán

Introducción

El mercado financiero en nuestro mundo globalizado ha alcanzado tal nivel de complejización que hizo imprescindible una paralela evolución en los modelos teóricos, para poder ser explicado científicamente.

En estas páginas, precisamente, nos proponemos analizar las interrelaciones epistemológicas entre la lógica, la matemática, las ciencias de las finanzas y las prácticas financieras, implicadas en estos modelos.

El mundo de las finanzas, enmarcado por los límites que fija el derecho, supone la confluencia de la economía y de la administración. Sumadas a estas disciplinas, utiliza dos ramas de la matemática aplicada, la estadística y la matemática financiera, que formalizan y ordenan la práctica real de las finanzas y, al mismo tiempo aportan los instrumentos para tomar decisiones y hacer pronósticos financieros.

Este último concepto introduce lo que en finanzas se denomina "valor tiempo del dinero". Las finanzas, efectivamente, poseen una dimensión temporal. La clave de su análisis consiste en que el presente sea comparable con el futuro o, para decirlo con más precisión, que el valor peso del futuro se confronte en algún momento con el valor peso del presente. Las decisiones financieras más fundamentales implican conocer con la mayor certeza posible cuál es el valor futuro de una suma de dinero y su confrontación con lo que esa suma representa en el día de hoy.

El valor presente apostado al futuro involucra el capital inicial más su rentabilidad, con un cierto margen de riesgo. Cuando no se conoce la razón probable entre riesgo y rentabilidad, la apuesta del valor presente se impregna de incertidumbre. Con estos tres elementos, riesgo, rentabilidad e incertidumbre, se juega el juego financiero.

Para minimizar este margen de incertidumbre las ciencias de las finanzas recurren a la lógica, a la estadística y a la matemática financiera. Mediante la lógica y la matemática financiera se analizan e interrelacionan los conceptos de capitalización, actualización, rentas, amortizaciones de préstamos, etc.

Desde el punto de vista de la lógica, todas las transacciones financieras se basan en un simple concepto elemental y pragmático: "el pago de un interés, como una recompensa o retorno por el uso de un capital, en un lapso de tiempo determinado, es una institución de la actual vida económica". Desde el punto de vista de la matemática, los modelos más relevantes de la teoría y la práctica financiera toman como base al *Binomio de Newton y las Series de Taylor y de Maclaurin* que, como se sabe, son conceptos de la matemática pura.

Formalización de la Práctica Financiera

Comenzamos con el desarrollo formal de las aplicaciones de la *matemática financiera*.

La matemática financiera es un amplio capítulo de la extensa rama de la matemática aplicada y exige a los profesionales de las finanzas conocimientos lógico-matemáticos previos. Efectivamente, los problemas financieros se resuelven a través de las siguientes instancias:

a) *Elaboración de un diagrama temporal*. Los procedimientos de la matemática financiera suponen construcciones racionales del tiempo real, expresadas en funciones matemáticas, cuya variable independiente es el tiempo.

b) *Ecuación de valor*. Una vez homogeneizado el tiempo de los vencimientos de prestaciones y contraprestaciones, se encuentran igualdades entre entradas y salidas que conforman las fluctuaciones del capital en el tiempo.

c) *Conclusiones financieras*. La lógica del sentido común permitirá inferir la solución óptima que surja de la confrontación de los resultados obtenidos.

Las presentes reflexiones se refieren especialmente al tema que consideramos fundamental en la práctica financiera: *la capitalización*. De la cabal comprensión de este tema se deriva la intelección de los restantes.

Capitalización

Toda operación financiera tiende a un único fin: la *capitalización.* La capitalización es el resultado final de la transformación en el tiempo de un *capital inicial*. Este proceso da como resultado un *capital final* que se denomina *monto*. El monto, o capital final, se consigue por la acción de dos factores, que son el *tiempo* y la *tasa de interés*. En términos económicos, se puede sintetizar: "El interés es el costo del tiempo".

Al considerar el interés en función del tiempo, el capital va incrementándose en nuevos montos a cada infinitésimo de tiempo, lo cual supone un régimen de *capitalización continua*. Sin embargo, en la práctica, resulta imposible registrar la secuencia infinita de la capitalización continua. Por lo cual se recurre a cálculos que reflejan la variación del capital inicial en un número finito de secciones temporales discretas. Este régimen constituye la denominada *capitalización discontinua.*

La capitalización se realiza bajo dos regímenes alternativos, que son el de *interés simple* y el de *interés compuesto*. En el primer régimen los intereses se calculan sobre el capital inicial, o sea que los intereses no producen interés; en tanto que en el segundo, también llamado acumulativo, se calcula sobre el monto obtenido en el período inmediato anterior.

Monto a interés simple

La fórmula financiera que representa el ***monto a interés simple***, se obtiene por medio del *principio de inducción completa.* De tal inducción resulta $C_n = C_0 (1 + n\,i)$ donde C_n es el monto, C_0 es el capital inicial, n el tiempo e i la tasa de interés. Esta expresión para el monto tiene la forma de una *función lineal* donde la variable independiente es el tiempo n, cuya gráfica es una recta con ordenada al origen C_0 y la pendiente es la tasa de interés i ganada en un período, la que debe estar en sincronía con la variable independiente n.

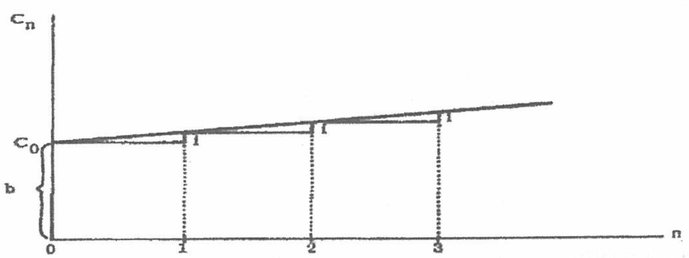

Gráfico N.º 1

Podemos apelar a la fórmula del interés simple para despejar diversas incógnitas. Supongamos, por ejemplo, los siguientes problemas:

a) ¿Cuál sería la tasa de interés anual por la cual un capital inicial de \$10.000 se incrementaría en 9 meses a un monto de \$10.600?.

Resolución: n = 9 meses $\Rightarrow \frac{9}{12} = 0{,}75$ años

$$C_n = C_0 (1 + n\,i) \Rightarrow i = \frac{1}{n}\left(\frac{C_n}{C_0} - 1\right) \Rightarrow i = \frac{1}{0{,}75}\left(\frac{10.600}{10.000} - 1\right) = 0{,}08$$

Respuesta: La tasa sería del 8% anual.

b) ¿En qué tiempo un pagaré de \$5.000 al 8% de interés mensual producirá \$280 de interés?. Rta.: 244 días. El trabajo algebraico es similar al del caso a), despejando n, que es la incógnita buscada.

c) Supongamos que la tasa de interés de interés actual es del 9%, ¿Cuál sería la oferta más ventajosa para la venta de un automóvil?.

i) \$21.000 de contado.

ii) \$7.000 al contado y el saldo en dos pagarés, uno de \$5.000 a 90 días y otro de \$10.000 a 180 días.

Resolución: Para poder comparar ambas formas de pago, se deben calcular los valores actuales de los dos pagarés de la oferta ii) siendo $C_0 = \frac{C_n}{1 + n\,i}$

$$n = 90 \text{ días} \Rightarrow \frac{90}{360} = \frac{1}{4} \text{ año} \Rightarrow C_0 = \frac{5.000}{1 + \frac{1}{4}\,0{,}09} = 4.889{,}98$$

$$n = 180 \text{ días} \Rightarrow \frac{180}{360} = \frac{1}{2} \text{ año} \Rightarrow C_0 = \frac{10.000}{1 + \frac{1}{2}\,0{,}09} = 9.569{,}38$$

El valor actual de la oferta ii) = 7.000 + 4.889,98 + 9.569,38 = 21.459,36

Respuesta: La oferta ii) es mejor por ser su valor actual mayor que el de la oferta i).

Monto a interés compuesto

Como se sabe, en cada período de tiempo convenido en una obligación se obtiene una capitalización, a la que se denominó “monto”. Si, sobre este monto se calculan los intereses correspondientes al siguiente período, los intereses se capitalizan, obteniéndose un nuevo monto. En este caso el capital inicial no permanece constante todo el tiempo; y, se dice que la operación financiera es a interés compuesto.

La fórmula del ***monto a interés compuesto***, $C_n = C_0 (1 + i)^n$, obtenida en base al *principio de inducción completa*, donde i es la tasa de interés por período de capitalización, nos muestra que los intereses devengados en cada período van creciendo en una proporción geométrica, cuya razón es $(1 + i)$. Esta expresión legaliforme, cuya forma es una función exponencial del tiempo n, es universalmente válida para cualquier par de valores sincrónicos de i y de n positivos, sea n entero o no.

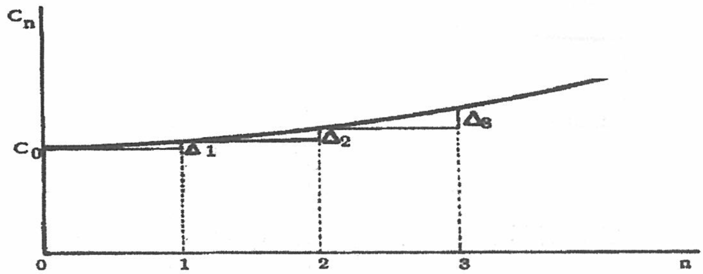

Gráfico N.º 2

El cálculo de $(1 + i)^n$ para distintos valores de i y de n, esta predeterminado en tablas financieras de aceptación universal, siguiendo los cánones del teorema del Binomio de Newton, en caso de que n sea entero positivo. En caso contrario se recurre al desarrollo de la Serie de Maclaurin.

La aplicación de la fórmula del interés compuesto, se ve claramente en transacciones como las de los préstamos bancarios. Supongamos que una persona obtiene en el Banco de Galicia y América del Sur, un préstamo de $25.000 a pagar en 6 años con interés del 9% anual, capitalizable semestralmente. ¿Cuál sería el monto total que el cliente aporta al banco?.

Resolución: La cantidad de períodos de capitalización en el año = 2

La cantidad de años = 6
La cantidad total de períodos = $2 \cdot 6 = 12$

$$\text{La tasa en el período} = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045$$

$C_n = C_0 (1 + i)^n = 25.000 \cdot (1+0{,}045)^{12} = 25.000 \cdot 1{,}69588143 = 42.397{,}04$
Respuesta: El cliente aporta al banco un total de $42.397,04.

De modo análogo podemos determinar el tiempo n recurriendo a una función logarítmica que, como se sabe, es la inversa de la función exponencial.

Cuando se quiere analizar el comportamiento del monto en función de la tasa i, manteniendo fijo el factor tiempo, se recurre a procedimientos del cálculo diferencial, como: *derivadas de funciones, análisis de crecimiento y decrecimiento, de concavidad...*

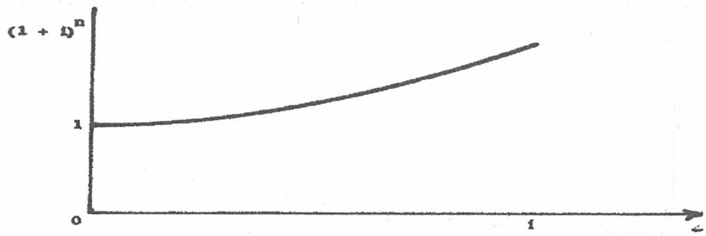

Gráfico N.º 3

Las diferentes empresas, según sus propios intereses, recurren a tablas específicas para calcular: interés simple, interés compuesto, seguros de vida, créditos, rendimientos de bonos y obligaciones, etc. Los criterios básicos para la construcción de cualquier tabla financiera son: alto grado de confiabilidad, mayor rapidez operacional y mínimo costo de los resultados.

Sin embargo, es preciso tener presente que ninguna tabla, sea esta financiera o de cualquier índole, es exhaustiva y contempla todos los infinitos casos posibles.

Para los casos no contemplados en la tabla, se utiliza *el método de interpolación lineal.* Pero, al interpolar, se incurre en errores inevitables, *por defecto o por exceso.* Esto se visualiza en las gráficas de $(1 + i)^n$ en función de i.

Si se quiere conocer el valor de i para un monto determinado se comete error por defecto, lo que se muestra en el siguiente gráfico.

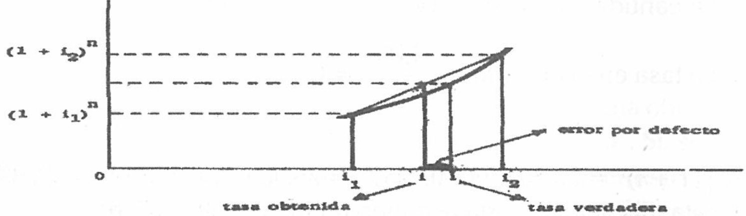

Gráfico N.º 4

En cambio, si se quiere conocer un valor de $(1 + i)^n$ cuando i es conocido, pero no tabulado, se comete error por exceso, según se aprecia en el siguiente gráfico.

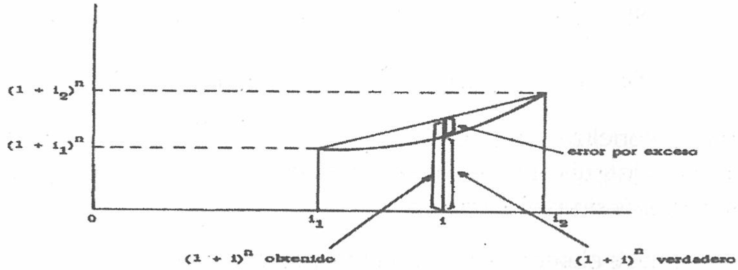

Gráfico N.º 5

Supongamos que se quiera conocer el monto de una deuda de $10.000 con una acumulación anual de intereses al 7,3% por cuatro años, contados desde la fecha de su vencimiento. Tal monto nos será dado por el cálculo de $(1+0{,}073)^4$ que, por no ser una tasa común en las operaciones comerciales, no se registra en las tablas financieras. Aquí es indispensable recurrir a cálculos de interpolación, para encontrar el monto aproximado.

Idéntico procedimiento se realiza cuando se quiere analizar el comportamiento del monto en función del tiempo n, manteniendo fija la tasa i. Los errores *por defecto o por exceso* que se cometen al interpolar, son respectivamente, cuando se quiere conocer un determinado valor de n o cuando se quiere conocer un valor de $(1 + i)^n$ y n está comprendido entre dos tabulados.

Comparación de montos a interés simple y compuesto

Ahora mostraremos cómo interactúan estos elementos en una confrontación formal del monto a interés simple con el monto a interés compuesto:

Frente a un capital inicial $C_0 = \$1$ comparamos el monto a interés simple $M_s = 1 + i\,n$ con el monto a interés compuesto $M_c = (1 + i)^n$

De la Serie de Maclaurin:

$$M_c = 1 + i\,n + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2!}\, i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\, i^3 + \ldots}_{\alpha} \Rightarrow M_c = M_s + \alpha$$

Según sea n, se pueden presentar tres casos:

1. Si $n < 1$ será $\alpha < 0$ entonces $\mathbf{M_c < M_s}$
2. Si $n = 1$ será $\alpha = 0$ entonces $\mathbf{M_c = M_s}$
3. Si $n > 1$ será $\alpha > 0$ entonces $\mathbf{M_c > M_s}$

De aquí se concluye que no siempre el monto a interés compuesto es mayor que a interés simple, pues si el tiempo es menor a un período, el monto a interés simple es mayor.

Esto también se observa en el siguiente gráfico:

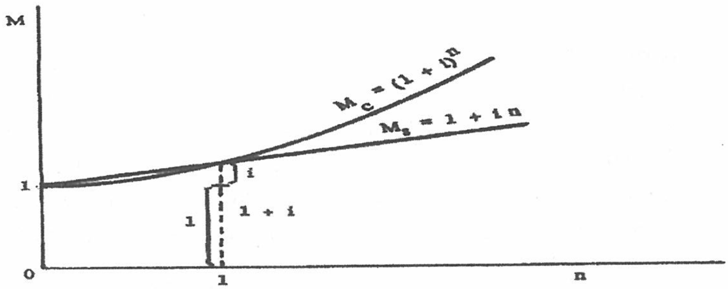

Gráfico N.º 6

Determinación del capital inicial

Para determinar el capital inicial $C_0 = C_n\,(1+i)^{-n}$ cuando se conoce el monto, la tasa de interés y el tiempo, se utiliza la fórmula recíproca con los valores tabulados de $(1+i)^{-n}$. Aquí se ve cómo, para distintos valores de i y de n, la tabla se fundamenta en un teorema de la matemática pura, la Serie de Maclaurin. Si tomáramos como monto un valor nominal de \$1, la tabla nos proporciona el valor actual o efectivo correspondiente, descontando n períodos antes de su vencimiento con descuento compuesto a la tasa i.

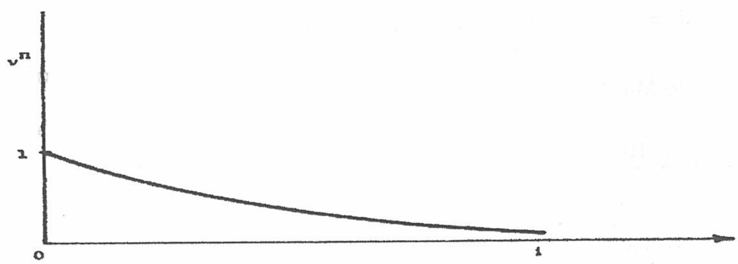

Gráfico N.º 7

Para encontrar datos de i, de n o de $(1 + i)^{-n}$, no registrados en la tabla, se recurre a *interpolación lineal*. En todos los casos se comete errores por exceso.

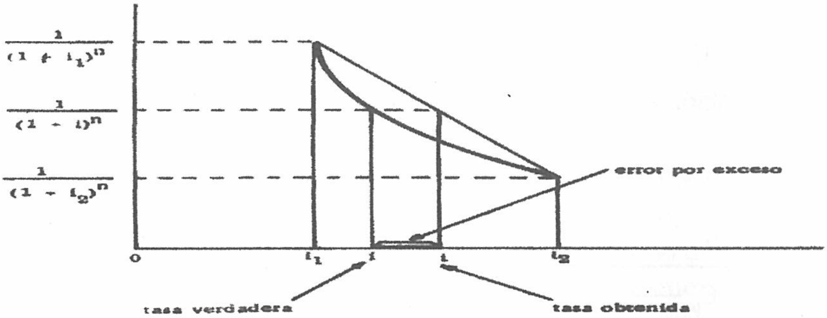

Gráfico N.° 8

Aplicaciones

Otros cálculos fundamentales en la práctica financiera son la *tasa media de inversión de varios capitales, monto en caso de tiempo fraccionario, monto con tasa variable.* Su determinación depende de una combinación entre procedimientos lógicos de derivación, interpretaciones formales de la naturaleza del tiempo y sus consecuencias en las diferentes tasas. Lo cual concluiría en una correcta aplicación de los instrumentos conceptuales matemáticos ya enunciados, combinaciones entre ellos y las variaciones en sus respectivas aplicaciones.

Cálculo del monto en tiempo fraccionario

Ilustraremos el anterior aserto con un único caso, muy frecuente en la cotidianeidad financiera: *el cálculo del monto en caso de tiempo fraccionario*. Supongamos que el tiempo sea representado por un lado como una parte entera y, por otro, una fraccionaria. Esta doble concepción temporal posibilita dos procedimientos lógico-matemáticos para calcular el monto:

1°- Combinación de ambos tipos de interés. Capitalización en la parte entera de tiempo a interés compuesto y en la fraccionaria a interés simple.

p/k

0 n' ⟷ n n'+1

C_0 ⟶ ⟷

a interés compuesto a int. Simple

$n = n' + p/k$, siendo n' la parte entera y p/k la fracción.

Entonces $C_n = C_0 (1 + i)^{n'} \left(1 + i \dfrac{p}{k}\right)$,

denominado monto comercial o bancario

2º- Capitalización en la parte entera y en la fraccionaria a interés compuesto.

p/k

0 n' ⟷ n n'+1

C_0 ⟶ ⟷

a interés compuesto a int. comp.

$$C_n = C_0 (1 + i)^{n'} (1 + i)^{p/k} = C_0 (1 + i)^{n'+p/k} = C_0 (1 + i)^n ,$$

denominado monto teórico.

Desde un punto de vista financiero, el primer procedimiento produce un monto superior al del segundo. Efectivamente, se observó que en las fracciones de período el monto a interés simple es mayor que a interés compuesto. Razón por la cual los bancos otorgan préstamos a interés simple, cuyas tasas son anuales pero recuperables en cuotas mensuales.

Así, por ejemplo, si un banco presta \$20.000 en 4 años 8 meses a una capitalización anual del 7%, ¿cuál sería el monto compuesto teórico, y cuál es el monto real que el banco recupera?.

$$n = 4 + \frac{8}{12} = \left(4 + \frac{2}{3}\right) \text{ años}$$

El monto teórico es:

$$C_n = C_0 (1 + i)^n = 20.000\,(1 + 0{,}07)^{4+2/3} = 20.000\,(1 + 0{,}07)^4\,(1 + 0{,}07)^{2/3}$$

$$C_n = 20.000 \cdot 1{,}31079601 \cdot (1{,}02280912)^2 = \$27.425{,}48$$

El monto real que el banco recupera es:

$$C_n = C_0 (1 + i)^{n'} \left(1 + i \frac{p}{k}\right) = 20.000\,(1 + 0{,}07)^4 \left(1 + 0{,}07 \frac{2}{3}\right)$$

$$C_n = 20.000 \cdot 1{,}31079601 \cdot 1{,}04666667 = \$27.439{,}32$$

Conclusiones

Al hablar de los plazos de vencimientos de prestaciones y contraprestaciones, hablamos de un tiempo homogeneizado. Una herramienta fundamental para la homogeneización del tiempo, es la elección de una *fecha focal*. Se entiende por ésta el momento coincidente en que se encontrarían, una vez transportados, todos los capitales diferidos temporalmente.

La fecha focal indica inicios o finales de tiempos financieros. Su naturaleza relativista y convencional, señala no obstante que el tiempo financiero es en sí mismo, como el tiempo newtoniano, continuo y no discreto. Sobre esta concepción del tiempo, continuo e infinito, se fundamenta el concepto de capitalización continua. En este caso, la teoría matemática parte de la concepción de que la variación del capital se produce en función de la variación del tiempo, o sea $C_0 = f'(t)$.

Si llamamos Δt al incremento de tiempo, entonces el monto $C_n = f(t) + \Delta f(t)$, siendo $\Delta f(t)$ los intereses obtenidos en el período.

Si hacemos tender Δt a cero, tendremos los intereses referidos a un infinitésimo de tiempo, que matemáticamente se define:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{df(t)}{dx} = f'(t)$$ que es la derivada de la función.

$f'(t)$ representa los intereses obtenidos en un período en función de lo ganado, acumulándolo constantemente en cada infinitésimo de tiempo. Ésta sería la base de la construcción matemática de todos los conceptos financieros desde el punto de vista continuo.

Cabe señalar que esta continuidad no alude solamente al discurrir del interés en el tiempo, sino que también es una característica temporal tanto de la actualización como de la capitalización.

Por razones prácticas se comienza habitualmente con el tratamiento discontinuo de estos conceptos financieros. Pero desde el punto de vista teórico, la capitalización continua es lógicamente prioritaria, es decir, tiene mayor fuerza lógica, porque es el fundamento de la capitalización discontinua. Lo cual señala también que, para el tratamiento de los temas de matemática financiera, es prioritario el manejo fluido de los conceptos de lógica y matemática puras.

Por último, queremos destacar que los adelantos tecnológicos en Inteligencia Artificial parecieran hacer prescindibles los análisis teóricos aquí desarrollados. En efecto, ya son de uso común las máquinas de cálculos financieros. Sin embargo, las reflexiones del presente trabajo se justifican, porque el análisis científico busca siempre la justificación racional de los procesos que han automatizado los razonamientos lógico-matemáticos. Así como la matemática financiera formaliza y esclarece los procesos financieros, con este trabajo procuramos esclarecer los fundamentos de la matemática financiera por medio de los conceptos de la Lógica y del Análisis Matemático. Desde un punto de vista epistemológico, diríamos que hemos procedido como aquel que esclarece los contenidos de una caja negra mostrando todos sus procesos internos, en consonancia con el concepto que titula esta publicación.

La matemática financiera procura proveer un grado de certeza en el mundo de las finanzas desde una mirada lógico-matemática. Éstas, como ciencias formales, son necesariamente verdaderas y universalmente válidas. ¿A qué se debe, entonces, que los mercados financieros padezcan de tamaña incertidumbre y sufran fluctuaciones imprevisibles y a veces catastróficas?... Ya hemos adelantado alguna justificación de ello en párrafos anteriores: "El valor presente apostado al futuro involucra el monto de la rentabilidad con un cierto margen de riesgo. Cuando no se conoce la razón probable entre riesgo y rentabilidad, la apuesta del valor presente se impregna de incertidumbre. Con estos tres elementos, riesgo, rentabilidad e incertidumbre, se juega el juego financiero.". En la medida en que las reglas de este juego estén dictadas desde la razón, los mercados se mueven razonablemente. Pero estos mercados son, también, hechuras del hombre, que no es pura razón. El interés humano, no es únicamente financiero; si no también, un "*inter-esse*", un ser-adentro, donde radican también la irracionalidad y la pasión.

Estas reflexiones no pretenden agotar el vastísimo y complejo universo de las finanzas. Sólo hemos querido mostrar la ingerencia de la matemática pura, la lógica formal y una concepción formalista del tiempo en alguna pequeña, aunque relevante esfera de ese universo.

Bibliografía

Botbol, J. (1982): *Curso General de Matemática Financiera*. Ed. Ergon, Buenos Aires.

González Galé, J. (1973): *Matemáticas Financieras. Intereses y Anualidades Ciertas*. Ed. Macchi, Buenos Aires.

Portus Govinden, L. (1975): *Matemáticas Financieras.* Ed. McGraw-Hill, Bogotá.

Pascale, R. (1998): *Decisiones Financieras.* Ed. Macchi, Buenos Aires.

Zeballos, J. (1997): "Modelos Económicos y Formas de Vida". *Siglo XXI*, Tucumán.

Zeballos, J.; Estofán, M. R.; Gatti, M. (1999): "La Lógica y la Matemática como Instrumentos Indispensables para las Ciencias Económicas". *Kipukamayo* 34, 24-25. Tucumán.

Zeballos, J.; Estofán, M. R. (1999): "Contextualización de las Ciencias Formales en las Ciencias Económicas". *V Jornadas de Epistemología de las Ciencias Económicas*. Buenos Aires.

Zeballos, J.; Estofán, M. R. (2000): "Formalización Económica". *Estudios de Epistemología* III, 255-265. Tucumán.

Zeballos, J.; Estofán, M. R.; Del Negro, M. P. (2001): "Intersecciones Entre la Matemática y la Economía". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 14, 195-201. México- Panamá.

Jesús A. Zeballos y María Rosa R. de Estofán. Facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán - Argentina
e-mail: vestofan@tucbbs.com.ar
jesuszeballos@tucbbs.com.ar

Espirales pétreas (*Luis Balbuena*).