La organización de los sistemas numéricos desde su escritura decimal. Algunas expresiones ambiguas.

Martín M. Socas

Resumen

La enseñanza-aprendizaje de los números constituye un dilatado proceso que se desarrolla a lo largo de toda la enseñanza no universitaria. Esta enseñanza-aprendizaje se organiza en torno a diferentes sistemas numéricos, que comienza con los primeros números naturales, para acabar con la introducción de los números reales y complejos en el bachillerato.

En el desarrollo de los sistemas numéricos surge el conjunto D de los números decimales (fracciones decimales), en el que el objeto número decimal es caracterizado erróneamente y donde la representación decimal de los diferentes números es identificada como número decimal.

En este trabajo analizamos el estatus matemático de los números decimales (fracciones decimales) desde las perspectivas histórica y epistemológica en el marco de los sistemas numéricos, así como su presentación en el currículo de Matemáticas en las enseñanzas no universitarias, y formulamos una propuesta curricular diferente para su organización.

Introducción

La expresión actual del valor numérico no entero por medio de "fracciones decimales", por ejemplo, expresar el resultado de la división de 11 entre 4 como 2,75, que significa que el cociente es dos unidades más siete décimas más cinco centésimas, habría sido representado, por lo general, con anterioridad al siglo XVI, como el número mixto $2\frac{3}{4}$, es decir, mediante fracciones ordinarias, ya que el expresar valores numéricos no enteros por medio de números decimales (fracciones decimales) es una costumbre que comenzó a introducirse en el último tercio del siglo XVI y que no se generalizó hasta el XVII.

Los números decimales o fracciones decimales han ido ganando la batalla a las fracciones ordinarias, en particular a las binarias o sexagesimales y se han convertido, en estos últimos años, en los protagonistas de todos los cálculos, ordenadores, calculadoras,... Sin embargo, su tratamiento en el ámbito escolar, propuestas curriculares en programas oficiales y desarrollos didácticos, no parece estar a la altura de las circunstancias, y no sólo por el interés del cálculo con calculadoras y ordenadores sino, también, por el papel determinante que pueden jugar en la organización y comprensión de los sistemas numéricos.

El efecto de la globalización también ha colaborado a esta primacía de los decimales frente a las fracciones ordinarias. En este comienzo del siglo XXI, la Bolsa de Nueva York, donde el dios dinero que tiene su catedral en Wall Street, centro de todas las miradas del mundo financiero e industrial, se olvida de los quebrados y acoge los decimales, abandona las cotizaciones en fracciones binarias (divisiones en 2, 4, 8, 16, 32 y 64), medio, octavos, dieciseisavos, treintaidosavos, y sesentaicuatroavos de dólar, para acogerse a las ventajas de las fracciones decimales (divisiones en 10, 100,...).

En el sistema educativo, donde la enseñanza-aprendizaje de los números constituye un dilatado proceso que se desarrolla a lo largo de toda la enseñanza no universitaria, muchos alumnos terminan sus estudios no universitarios con ideas confusas sobre los números [Robinet (1986), Fischbein (1994)], y aunque manifiestan que los números que conocen son los naturales, los fraccionarios y los decimales, omitiendo los irracionales y los negativos, muestran gran confusión con la terminología (enteros, fraccionarios, decimales, racionales, irracionales, etc.), y la dificultad continúa cuando intentan relacionar los números en los distintos sistemas numéricos.

De todos es sabido que la enseñanza-aprendizaje en torno a los diferentes sistemas numéricos tiene en el conjunto *D* de los números decimales (fracciones decimales), un conjunto que emerge de manera confusa dentro de los sistemas numéricos.

Con el objetivo de reflexionar acerca de la problemática de los números decimales, en este artículo analizamos el estatus matemático de los números decimales (fracciones decimales) desde la perspectiva histórica y epistemológica en el marco de los sistemas numéricos, así como su presentación en el currículo de Matemáticas en las enseñanzas no universitarias.

Elementos históricos y epistemológicos de los números decimales

El número decimal, ha pasado por diferentes etapas que constituyen formas distintas de usarlo como herramienta de cálculo y de caracterizarlo como objeto matemático (Centeno, 1988).

Podemos indicar que durante siglos los números decimales han servido para medir y representar cantidades, al igual que se utilizaban los sexagesimales, sin ser reconocidos ni como objeto de estudio ni como útil aplicable a la resolución de problemas. Este tratamiento tiene especial interés a partir del siglo IX, cuando Al-Khowarizmi unifica el cálculo de los naturales con el de las razones geométricas e introduce la numeración decimal.

En la primera mitad del siglo XVI aparece una gran cantidad de libros de álgebra especialmente de origen germánico y es en uno de ellos, el de Rudolff, editado en el año 1525, donde el autor muestra el carácter particular que tiene la división por 10, 100, 1000, etc. y señala una notación eficiente; así por ejemplo, indica, si se divide 652 por 10, da 65/2, etc. Durante algún tiempo este autor fue considerado el padre de las fracciones decimales y de su notación moderna, pero estudios posteriores ponen de manifiesto que el autor no conocía la importancia y la generalidad de este método y que las cifras separadas no eran décimas, centésimas,..., sino simplemente el resto de la división. Va a ser Viète, gran algebrista francés de la segunda mitad del siglo XVI, quien los utiliza sistemáticamente y de manera consciente en una de sus obras, y propone sustituir las fracciones sexagesimales y sus múltiplos de sesenta, que era como se utilizaban habitualmente desde la antigüedad, por los múltiplos y submúltiplos de diez.

A pesar de la propuesta de Viète, en el año 1579, de generalizar el uso de las fracciones decimales y de que éstas eran aceptadas por los matemáticos y astrónomos de primera fila, los decimales se extenderán gracias a las obras de dos autores: Stevin con la publicación en 1585 de una obra llamada *La Disme*, y de Napier en 1617, autor de las primeras tablas de logaritmos publicadas. Sin embargo, el reconocimiento matemático de los números decimales no se dará hasta que los números reales sean plenamente aceptados como objetos matemáticos.

Definición de "número" como una expresión decimal indefinida

Para representar en la recta un conjunto denso de puntos, no es necesario considerar todos los números racionales, basta, por ejemplo, tomar los números decimales (fracciones decimales, números racionales cuyo denominador es una potencia de 10). Obviamente no es un subconjunto único dentro de los racionales, también bastaría tomar las fracciones diádicas, es decir las que tienen por denominador una potencia de 2, expresables por un número finito de cifras en el sistema diádico o binario de numeración.

También se sabe que ninguna fracción irreducible cuyo denominador contenga otros factores primos que 2 y 5 puede ser fracción decimal, así por ejemplo:

$$3/11 = 0{,}272727272727...,$$

lo que significa que 3/11 está entre 0 y 1, entre 2 y 3 décimas, entre 27 y 28 centésimas, etc., es decir podemos aproximar 3/11, por defecto y por exceso, mediante números decimales, tanto como queramos, de manera que los números decimales determinan una sucesión de intervalos encajados cuya amplitud sucesiva 1, 1/10, 1/100, 1/1000, ..., acota el error cometido por la aproximación al número decimal respectivo. De igual manera, por ejemplo, la solución de la ecuación $x^2 = 2$, en escritura decimal conduce a una expresión decimal indefinida, que se puede representar por una sucesión de intervalos encajados de extremo números decimales y de amplitudes sucesivas 1, 1/10, 1/100,..., tan pequeñas como se quieran y que no pueden determinar un número racional.

Esto sugiere la siguiente definición de "número" como una expresión decimal indefinida, pudiéndose considerar la fracción decimal como caso particular de expresión periódica que acaba en ...0000... o en ...9999... (1,2000000... = 1,1999999... admitiendo, que estas dos expresiones representan el mismo número), entonces lo números racionales serán caracterizados por las expresiones decimales indefinidas periódicas y los números irracionales por las expresiones decimales indefinidas no periódicas.

Este procedimiento de caracterizar el número se conoce como "procedimiento decimal", y es un procedimiento de "adjunción" que consiste en añadir al conjunto numérico del sistema inicial nuevos números que se introducen a través de su escritura.

En este caso, a partir del conjunto de los números naturales y por el procedimiento de adjunción, se construyen los números reales a través de la escritura decimal.

Se llama número real positivo a una expresión de la forma:

$k, x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots$, siendo k un número natural y $x_n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, para todos los valores de n. Admitiendo que las expresiones 0,199999... y 0,20000..., representan el mismo número real.

Se prueba que: todo subconjunto no vacío y acotado de números reales positivos posee un extremo superior.

Se prueba, igualmente, que el conjunto construido así, una vez simetrizado a partir de los monoides (semigrupos), (N,+), y (N,.), es un cuerpo abeliano, arquimediano, totalmente ordenado y completo, isomorfo a los diferentes *R*, obtenidos por otros procedimientos.

A este número caracterizado por el procedimiento decimal se le llama número real. Hasta mediado del siglo XIX, éste era el concepto aceptado de número real. La revisión crítica de los principios y fundamentos de las

Matemáticas y el desarrollo de la Geometría analítica y el Cálculo Infinitesimal exigieron un análisis más preciso del concepto anterior, realizado por Weierstrass, en el año 1869, Dedekind, en el año 1872, Cantor, en el año 1872, etc.

Observamos, pues, que el *número decimal* tiene como objeto de saber matemático su significado último relacionado con *el número real*, y se sostiene que: *Un número decimal es un número real y no puede entenderse el número decimal si no se entiende el número real.*

Este razonamiento es utilizado desde mediados del siglo XIX hasta la actualidad en el sistema educativo. Al respecto son significativas las palabras de Dhombres y otros (1987):

> *"Pedagógicamente se tendería a pensar que esta representación es la que mejor se adapta a la enseñanza secundaria, porque reproduce mejor la idea intuitiva de la medida, y porque aclara las verdaderas dificultades: la no existencia de una escritura decimal única para cada número y la existencia de un número real inverso de un decimal cualquiera"*

Los números decimales y reales desde una perspectiva curricular

En el libro de Courant y Robbins (1971) encontramos como definición general la siguiente: *"el continuo numérico, o sistema de números reales es la totalidad de los decimales infinitos. Los números racionales son los decimales periódicos; los números irracionales son los decimales no-periódicos".*

Esta organización es adaptada por muchos textos escolares de matemáticas para alumnos de 14 a 18 años. A modo de ejemplo, recordemos el texto del grup zero (1978), que aunque han pasado más de 20 años, sigue siendo significativo como ejemplo de este planteamiento: identificar al conjunto de todos los números decimales, como el conjunto de los números reales.

La mayor parte de los libros españoles de textos de Matemáticas que interpretan y desarrollan la propuesta curricular básica de la Educación Secundaria Obligatoria optan por la siguiente secuenciación y conceptualización del número decimal:

"Un número decimal es una secuencia de cifras separadas por una coma. Las cifras anteriores a la coma son la parte entera y las que están después son la parte decimal. Así:

32,475

Parte entera Parte decimal

"Si en un número decimal se pueden contar sus cifras, se dice que es un número decimal limitado o finito".

"Los números decimales pueden ser:

Exactos: 4,25 ; 1,387

Periódicos puros: 8,232323... ; 0,777777...

Periódicos mixtos:2,455555... ; 1,326666...

También hay otros números decimales que son ilimitados, pero que sus cifras no se repiten periódicamente. Por ejemplo:

3,141592654...

1,41421356....

Estos últimos números no se obtienen a partir de una fracción.

(Becerra y otros,1996, pp. 53-55)

La propuesta curricular de la Comunidad Autónoma de Canarias también adopta una posición análoga (Resolución del 23 de junio de 1995 de la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa, por la que se establecen orientaciones para la elaboración de la secuencia de contenidos y criterios de evaluación para los dos ciclos de la ESO. Área de Matemáticas. n. 96, pp. 7571-7614, BOC, 1995). La propuesta de contenidos de conceptos del segundo ciclo se estructura así:

- Números naturales, enteros, decimales (fraccionarios o no) y números negativos (afianzamiento del significado).
- Decimales infinitos, no periódicos, como expresión de una cantidad inconmensurable respecto a otra tomada como unidad (introducción).
- Continuidad en R, (introducción).
- Sistema de numeración decimal.
- La notación científica (introducción).
- Jerarquía dela operaciones. Paréntesis.
- Suma, resta, producto y división con naturales, fraccionarios y decimales y negativos.

Esta propuesta supone identificar conceptualmente el número decimal como un número real. Conviene analizar si este error conceptual es o no aconsejable desde el punto de vista didáctico y en qué sentidos perjudica y en cuáles, beneficia.

Objeto numérico y representaciones de los números

La palabra decimal procede de la palabra diez y hace referencia a la base de la numeración decimal. Parece razonable pensar que por el hecho de escribir un número en el sistema de numeración decimal podemos llamarlo número decimal, de la misma manera, que al escribir un número en el sistema de numeración de base dos le llamaríamos número binario, o al escribir un número en el sistema de numeración de base sesenta le llamaríamos número sexagesimal.

La denominación del objeto número exige un adjetivo, así tenemos natural, entero, racional, irracional, algebraico, real y complejo, que se refiere a la naturaleza intrínseca del mismo y que es independiente de la representación y del sistema de numeración que elijamos. Sin embargo, en la expresión "número decimal" no es así y se presta a ambigüedades, porque por una parte se puede interpretar como cualquier número escrito en el sistema de numeración decimal, es decir una escritura numérica con comas, y, por otra, como un conjunto específico de números donde la palabra decimal juega el papel de adjetivo del número y caracteriza la naturaleza intrínseca del mismo, en este caso es común identificarlo o como número real o como los elementos del conjunto D, en el que la ecuación $10^n x = a$, con $n \in N$, y $a \in Z$, tiene siempre solución.

El conjunto D queda determinado al definir en $Z \times N$, la siguiente relación binaria:

$(a_1,n_1)\underline{R}(a_2,n_2) \Leftrightarrow a_1 10^{n_2} = a_2 10^{n_1}$, donde la clase del par (a,n) se escribe $[a/10^n]$

La palabra **"decimal"**, tiene un significado intrínseco referido a la naturaleza de este conjunto numérico, además de referirse a representaciones específicas dentro de los sistemas de numeración o de los sistemas de medidas.

El hecho de expresar los números naturales, enteros, racionales o reales en la escritura decimal nos induce a llamar números decimales a cualquier número expresado en esta escritura, de la misma manera que si los escribiéramos en el sistema de numeración base dos los llamaríamos números binarios, etc. confundiendo la escritura con el objeto número. En el caso de los números binarios (fracciones binarias) no ha tenido mayor trascendencia, puesto que la escritura binaria se ha utilizado exclusivamente para estos números y no como escritura representativa de cualquier otro número, por ejemplo $\sqrt{3}$.

El número decimal, como los demás números, admite una escritura decimal y puede ser una escritura con "coma" o con "punto" ("coma" decimal o "punto" decimal)[1]. En el lenguaje habitual se acostumbra a confundir "número decimal" con escritura con "coma" o con "punto". Forma parte de un uso inapropiado del lenguaje, que tiende a confundir, el objeto matemático con su nombre y con su representación. Hemos de señalar, sin embargo, que este abuso del lenguaje es necesario, a veces, para simplificar el discurso matemático en el contexto escolar, eso sí con la condición de que su uso sea consciente y conocido por profesores y alumnos.

Los Sistemas numéricos

Presentamos en este apartado un breve resumen de las diferentes ampliaciones o extensiones de los números.

Las ampliaciones que podemos realizar de un sistema numérico a otro las podemos esquematizar en el siguiente cuadro:

$$\begin{tikzcd}
N(Z_+) \arrow[r, "q^*"] \arrow[d, "d"'] & D_+ \arrow[r, "q"] \arrow[d, "d"'] & Q_+ \arrow[r, "c_t"] \arrow[d, "d"'] & R_+ \arrow[d, "d"'] & \\
Z \arrow[r, "q^*"'] & D \arrow[r, "q"'] & Q \arrow[r, "c_t"'] & R \arrow[r, "c_a"'] & C
\end{tikzcd}$$

donde:

d: representa una extensión por diferencias, es decir, no es posible en el sistema numérico de partida hacer en todos los casos la resta de dos números.

---

1 El uso del punto para separar la parte entera de la parte decimal de un número, precursor de nuestra coma decimal, se atribuye, indistintamente, a dos autores: Magini en el año 1592, cartógrafo y amigo de Kepler, y a Clavius en el año 1593, jesuita y amigo también de Kepler. Sin embargo el punto decimal no se popularizó hasta que los utilizó Napier en los logaritmos veinte años más tarde. Notación que se utiliza en nuestros días en los países anglosajones. En lo que respecta a nuestra coma, fue ideada a principios del siglo XVII por el Neerlandés Wilbord Snellius.

q: representa una extensión por cociente, es decir, no es posible en el sistema numérico de partida hacer en todos los casos la división de un número entre otro número.

q^*: representa una extensión por cociente, es decir, no es posible en el sistema numérico de partida hacer en todos los casos la división de un número entero entre otro número entero no nulo que contenga únicamente como factores el 2 o el 5.

c_t: representa una extensión por compleción de naturaleza topológica, es decir, no existe el extremo superior, en todos los casos, de conjuntos acotados en el sistema numérico de partida, o la representación de los números del conjunto numérico de partida, no llenan la recta.

c_a: representa una extensión por compleción de naturaleza algebraica, es decir, no todo polinomio con coeficientes en el conjunto de partida se descompone en factores lineales.

Pasamos a comentar algunos aspectos de estos conjuntos numéricos.

Se desea, en primer lugar, obtener una formulación rigurosa para un conjunto de números que denominaremos naturales *N*, cuyos elementos sirvan para "contar" en el sentido de servir como conjunto básico para la "comparación" con otros conjuntos, con un buen orden arquimediano y que tenga como operaciones internas la suma y el producto, además de verificar el principio de inducción. La opciones son varias y van desde construir los números naturales desde un concepto primitivo anterior (Cantor, Frege, Russel, etc.), hasta definirlo mediante un sistema de axiomas (Peano).

Este conjunto *N* adolece de ciertos defectos, por ejemplo, que la adición y la multiplicación en general no son inversibles. La posibilidad de efectuar sin limitaciones la sustracción como recíproca de la adición, es decir, garantizar la resolubilidad de la ecuación $a + x = b$, se alcanza añadiendo los números enteros negativos. Con ello el semianillo *N* de los números naturales se extiende al anillo *Z* de los números enteros. Se observa que en el caso $n \geq m$, hay infinitos pares de números de $N \times N$, con la misma diferencia $n - m$. Pero de $n_1 - m_1 = n_2 - m_2$, se deduce: $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$, de manera que esta relación de equivalencia induce una partición en $N \times N$. *Z* será el conjunto de todas las clases de equivalencia.

El problema de la inversibilidad de la multiplicación lleva a considerar la resolubilidad de la ecuación $bx = a$, para números enteros arbitrarios a y b. Si hay solución se llama cociente de a y b y se escribe $x = a/b$. Una tal división no puede siempre efectuarse en *Z*. Se plantea con ello completar este conjunto.

Surgen aquí dos cuestiones de gran interés: una, relativa a garantizar que la ecuación $bx = a$ sea resoluble en todos los casos, excepto $b \neq 0$; y otra, relativa a garantizar que el resultado pueda ser expresado en el mismo sistema de numeración utilizado para los números naturales y enteros, o, en una extensión natural del mismo, donde a/b sea el signo de la operación división, es decir, un proceso a desarrollar, y no el proceso y el resultado a la vez.

Si analizamos, en primer lugar, la segunda cuestión, b debe tomar un valor específico, $b = 10^n$, y la ecuación que tiene siempre solución en el sistema de representación decimal es $10^n x = a$, con $n \in N$, y $a \in Z$. Pudiendo definir en $Z \times N$, una relación binaria de equivalencia, donde: $(a_1, n_1)\underline{R}(a_2,n_2) \Leftrightarrow a_1\ 10^n{}_2 = a_2\ 10^n{}_1$. El número decimal o fracción decimal D, quedaría determinado por la clase del par (a,n) que se escribe $[a/10^n]$.

Los números decimales o fracciones decimales que se obtienen de las soluciones de la ecuación $bx = a$, con $b = 10^n$, se entiende desde el punto de vista de la división entera, como un reparto igualitario y exacto en varias fases de determinados números enteros, que viene caracterizado por la reiteración finita de la siguiente ecuación de reparto:

$$a:b = c\,[1/10] + (10a - bc): b[1/10], \text{ con } bc \leq 10\,a < b(c+1),$$

Por ejemplo, en el caso de reparto de dos cantidades entre tres elementos, la ecuación de reparto, para la primera acción de reparto, sería:

$$2:3 = 6\,[1/10] + (10.2 - 3.6):3[1/10], \text{ con } 3.6 \leq 10.\,2 < 3\,(6 + 1),$$

donde la expresión [1/10] representa el orden de unidades. En esta primera acción de reparto el orden de unidades es la décima, al tener que descomponer dos unidades en veinte décimas para repartir equitativamente.

Es cierto que D continúa siendo un anillo de integridad desde el punto de vista de la estructura algebraica, pero hay elementos topológicos que constituyen una ganancia útil desde el punto de vista conceptual y didáctico. En las extensiones por cociente el orden es denso en sí mismo, es decir, entre dos números decimales siempre hay otro número decimal, en consecuencia infinitos. Las extensiones por cocientes dan lugar a conjuntos que tienen una gran dificultad para ser representados en la recta numérica, esta situación se mejora en la extensión considerada, que conserva el orden denso, *la recta decimal.* Otras nociones como Medida y Reparto adquieren con estas cantidades numéricas su verdadero sentido práctico.

En relación con la primera cuestión, la construcción se hace a partir del producto cartesiano $Z \times Z^*$, y se introduce la relación de equivalencia teniendo en cuenta que en el caso de que la división sea realizable, de $a_1:b_1 = a_2:b_2$, se deduce $a_1xb_2 = a_2xb_1$. *Q* queda caracterizado como un cuerpo arquimediano numerable donde no se cumple el teorema del extremo superior.

$(Q,\leq)$ es un conjunto linealmente ordenado en el que pueden realizarse sin restricciones las cuatro operaciones básicas, la estructura algebraica no da motivos para una nueva extensión. Sin embargo, la estructura de orden y la topológica muestran notables carencias de incompletitud, por ejemplo los números racionales no llenan por completo la recta numérica, lo que conduce al dominio de los números reales *R* donde todo subconjunto acotado superiormente tiene extremo superior.

Al extender la estructura algebraica de *R*, aparece de nuevo una incompletitud, las ecuaciones del tipo $x^2 + 1 = 0$, no tienen solución en *R*. Igual que en las extensiones algebraicas anteriores se puede introducir los números complejos *C* como pares ordenados de números reales *R* x *R*, para los cuales se definen unas operaciones de adición y multiplicación compatibles con la relación de equivalencia previamente definida entre pares ordenados de números reales. También podríamos extender *R* a *C* a partir del anillo de clases residuales que se forma en *R[X]* módulo $x^2 + 1$. Cualquiera que sea el procedimiento de extensión la construcción garantiza que *C* es el menor cuerpo que extiende a *R* y en el que $x^2 + 1$ posea ceros.

La construcción de *C* se puede hacer también a partir de *Q* de manera que primero se efectúe el cierre algebraico de *Q* y después se alcance la completitud topológica, construyendo el cierre completo. El cuerpo intermedio obtenido en este proceso es el *cuerpo de los números complejos algebraicos A*, es decir, de los ceros de todos los polinomios de *Q[X]*, que a diferencia de *R* y *C* éste es aún un conjunto numerable. Como la demostración de la trascendencia de un número es en general difícil, ésta se hace indirectamente mediante la reducción al absurdo suponiendo que tal número es un cero de algún polinomio de *Q[X]* y se llega a una contradicción. Al igual que entre *Z* y *Q* se pueden intercalar una cantidad infinita de Anillos intermedios de la misma naturaleza que *D*, entre *Q* y el cuerpo de los números complejos algebraicos *A* pueden intercalarse también una cantidad infinita de cuerpos intermedios (extensiones algebraicas).

Recogemos en el siguiente cuadro resumen las diferentes extensiones de los sistemas numéricos, resaltando algunas de sus propiedades más características:

Sistemas numéricos

C Números Complejos		
Cuerpo algebraicamente cerrado. (En C [X] todo polinomio se descopone en factores linelaes).	No hay orden compatible con la estructura algebraica. No Numerable.	Espacio métrico completo con topología no trivial.

$a.x^n + b = 0$
$(x^2+1 = 0)$

Compleción

R Números Reales			*A Números Complejos algebraicos*		
Cuerpo algebraicamente incompleto (En R[X] cada polinomio se descompone en factores de grado a lo sumo 2).	Orden lineal y arquimediano; se cumple el reorema del extremo superior. No numerable.	Espacio Métrico completo.	Cuerpo algebraicamente cerrado (En A[X] cada polinomio se descompone en factores lineales).	No hay orden compatible con la estructura algebraica. Numerable.	Espacio Métrico in completo con la topología no trivial.

Compleción
(Supremo de un conjunto acotado)

$p(x) \in Q$
$p(x) = 0$

Q Números Racionales		
Cuerpo algebraicamente incompleto. (En Q [X] no todo polinomio se descompone en factores lineales).	Orden lineal arquimediano. No se cumple el teorema del extremo superior. Numerable.	Espacio métrico incompleto con topología no trivial.

$a.x = b$
$(Z \times Z^*)$

$a.x = b$
$(D \times D^*)$

D Números Decimales		
Anillo de integridad	Orden lineal arquimediano. Numerable. No se cumple el teorema del extremo superior.	Espacio métrico incompleto con topología no trivial.

$10(n).\ x = b$
$(Z \times N)$

Z Números Enteros		
Anillo de integridad	Orden lineal arquimediano Numerable.	

$a + x = b$
$(N \times N)$

N Números naturales		
Semianillo	Buen orden arquimediano Numerable.	

Consideraciones finales

Trataremos en este apartado de resaltar tanto la legitimidad a considerar el conjunto *D* de los números decimales como un sistema numérico propio e independiente, como a reflejar algunas cuestiones de interés didáctico que implica el adaptar esta propuesta al desarrollo de los sistemas didácticos en el ámbito educativo (Socas, 2001).

Nos encontramos, en primer lugar, con dos tipos de fracciones en los números racionales, las fracciones decimales, que admiten una escritura decimal finita, y las fracciones no decimales que admiten una escritura decimal infinita periódica pura o mixta. Vemos que lo que es pertinente aquí como la teoría de números y las series infinitas, difiere mucho de lo que sería pertinente para desarrollar didácticamente las fracciones como cociente de enteros y las fracciones decimales. Es cierto que la representación de las fracciones no decimales mediante desarrollos decimales infinitos, se puede hacer de un modo más elemental, sin recurrir a las series infinitas y sin apelar a la teoría de números para aplicar la peridiocidad del desarrollo. Emerge en este contexto el conjunto numérico *D* asociado a las fracciones decimales como una prolongación del sistema de numeración decimal, donde las transiciones que se dan son paralelas a las que se dan en el sistema métrico decimal lineal.

En segundo lugar, debemos indicar que con los números reales se resuelve teóricamente el problema de medir cualquier longitud, pero con los números decimales se resuelve prácticamente el problema de medir cualquier longitud. La pregunta que surge inmediatamente es: ¿Hemos de mezclar necesariamente los problemas teórico y práctico de medir cualquier longitud, confundiendo probablemente al alumno y generando ambigüedades en los sistemas numéricos?

En tercer lugar, la expresión decimal de todos los números, racionales e irracionales, ofrece la ventaja de uniformar el cálculo, pues todas las operaciones se realizan como si los datos fuesen enteros, pero en cambio tiene el grave inconveniente de presentar infinitas cifras, no sólo para representar a los irracionales, sino también a los racionales cuyos denominadores tienen factores distintos de 2 y 5, lo que impide considerar las operaciones como operaciones internas. El prescindir de las infinitas cifras desde una de ellas en adelante, con lo cual el número representado deja de ser exacto y está representado por otro número (número decimal), es forzoso para operar con tales números en este contexto decimal. Por otra parte, debemos considerar que los datos experimentales, resultados de medidas, están siempre afectados por errores, de los que sólo se conoce un número decimal, al cual se mantienen inferiores en valor absoluto. Estos aspectos refuerzan la necesidad de resaltar la importancia de los Números Decimales como un sistema numérico de referencia en el que los demás números racionales o irracionales en su escritura decimal pueden ser utilizados como números aproximados a un número decimal.

En cuarto lugar, los números decimales (fracciones decimales) se presentan como un sistema numérico "controlable" tanto en el orden de magnitud como en sus diferentes representaciones semióticas, entre la que sobresale la recta decimal, y constituye el puente de enlace entre la representación decimal (cantidades numéricas o de magnitud) y las otras representaciones semióticas de los sistemas numéricos *Q* y *R*.

En quinto lugar, queremos indicar que parece aconsejable unificar la terminología y mantener el término número decimal como un elemento del conjunto *D*, y fracción decimal como una representación de un elemento del conjunto *D*, de igual manera que distinguimos a la fracción como una representación de un número racional. En este sentido designaríamos a las fracciones como decimales y no decimales, y estas últimas serían las que permitirían un desarrollo decimal infinito, evitando la ambigüedad, "fracciones decimales infinitas" y "números decimales infinitos". De igual manera nos referiríamos a los desarrollos decimales infinitos no periódicos como representaciones de los números irracionales.

Proponemos en consideración abandonar la organización escolar de los sistemas numéricos que habitualmente se desarrolla en el sistema educativo y que queda reflejado en el siguiente cuadro:

Números Decimales o Números Reales

- Decimales periódicos o Números racionales
  - Números enteros -5, 0, -1, 7...
    - Números naturales: 1, 2, 3, ...
    - Cero: 0
    - Enteros negativos:-1,-2,..
  - Decimales limitados: 3,12; -12, 35; 0,14832;...
  - Decimales periódicos puros: 27,323232... -1, 487487487...
  - Decimales periódicos mixtos: 4,3717171... -18, 15676767...
- Decimales ilimitados no periódicos o Números irracionales: $\sqrt{2} = 1,4142...$
  - 7, 010010001...
  $\pi = 3,1415926...$

Apostamos por una organización de los sistemas numéricos en el ámbito escolar donde el conjunto D sea considerado como un sistema numérico que permita enlazar y dar sentido a los diferentes números y representaciones numéricas. En el siguiente cuadro recogemos una propuesta curricular de organización de los sistemas numéricos:

PROPUESTA DE ORGANIZACIÓN CURRICULAR DE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

Se caracteriza conceptualmente como sistema numérico al conjunto D, y se le asigna un papel relevante en el desarrollo de los números en el ámbito educativo. (Escritura decimal = Desarrollo decimal o Expresión decimal).

- REALES (R) (Admiten una escritura decimal finita o infinita, no única, 1,3999... = 1,4, salvo que impongamos la condición del 9, al final no periódico)
  - RACIO-NALES (Q)
    - Decimales (D) (Fracciones decimales) (Admiten escritura decimal finita)
      - Enteros (Z) (Decimales enteros)
        - Naturales (N) (Positivos)
        - N^{C}_{Z} (Negativos)
      - Z^{C}_{D} (Decimales no enteros)
    - No Decimales (D^{C}_{Q}) (Fracciones no decimales) (Admiten una escritura decimal infinita periódica)
      - Fracciones generatrices periódicas puras
      - Fracciones generatrices periódicas mixtas
  - NO RACIONALES (Q^{C}_{R}) (Irracionales) (Admiten una escritura decimal infinita no periódica)
    - Algebraicos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $(1+\sqrt{5})/2 = \Phi$, ... (raíces de un polinomio, $p(x) \in Q$)
    - Trascendentes (No raíces de un polinomio) NO Algebraicos: π, e, log 2, $2^{\sqrt{2}}$, $\Sigma(C_n/10^{n!})$, $n \geq 0$ y $C_n \in [0,9]$ (números de Liouville), 0,12345678910111213145161718192021... (número de Mahler)

Finalmente señalar que la propuesta de los números decimales como un sistema numérico propio en su relación con las fracciones decimales como dos formas de representar un determinado número racional, no tiene razones únicamente utilitarias que podrían ser suficientes: calculadoras, ordenadores,..., sino también que el conjunto *D aporta elementos* topológicos y de otra naturaleza que constituyen una ganancia útil desde el punto de vista conceptual y didáctico. La densidad, la noción de aproximación (intervalos encajados), la medida, el reparto, las representaciones semióticas (recta decimal), etc, le confieren un sentido teórico y práctico que permiten construir significativamente los otros sistemas numéricos Q y R.

Bibliografía

BECERRA, M. V. y otros (1996): *Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria.* McGraw-Hill, Madrid.

CENTENO, J. (1988): *Números decimales*. Síntesis, Madrid.

COURANT, R.; ROBBINS, H. (1971): *¿Qué es la Matemática?*. Aguilar, Madrid.

DHOMBRES, J. y otros (1987): *Mathématiques au fil des àges.* IREM. Groupe Epistemologie et Histoire, Paris: Gauthier-Villars.

FISCHBEIN, E. (1994): The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceeding of the XVIII PME,* Lisbon, 2, 352-359.

GRUP ZERO (1978): *La medida y el número.* ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona.

SOCAS, M. M. (2001): Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. En Socas, Camacho y Morales (Eds.). *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III*, pp. 297-318. CAMPUS, La Laguna.

ROBINET, J. (1986): Les réels: quels modèles en ont les élèves. *Cahier de Didactique des Mathematiques*, 21. IREM: París 7.

Martín M. Socas es profesor adscrito al Área de Didáctica de la Matemática del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna. Sus líneas de trabajo son: Pensamiento Numérico y Algebraico y Formación del Profesorado de Matemáticas.
Dirección electrónica: msocas@ull.es