El puzzle de la pajarita

Pablo Flores Martínez

Resumen

La enseñanza de las matemáticas en la escolaridad obligatoria está volviendo a valorar las cualidades educativas de la geometría sintética de formas, reconociendo el valor educativo de los recursos manipulativos como los puzzles Son especialmente valorados los puzzles simples y versátiles. En este artículo queremos mostrar un puzzle que hemos ideado a partir de la descomposición de una figura familiar: el perfil de la pajarita de papel. El puzzle se compone sólo de tres piezas, por lo que es simple en su concepción. Mostraremos algunas cualidades que le dan un cierto grado de versatilidad en la enseñanza de las formas geométricas, especialmente en lo que se refiere a la posibilidad de duplicación y al estudio de la equivalencia de figuras por superposición.

Origami bird puzzle

Abstract

The use of puzzles in the teaching of Geometry is being a important resource in the school, because they contribute to apreciate the value of manipulative media in teaching mathematics. In this paper we present our own puzzle built from splitting the very well know origami bird. Our puzzle is composed by three pieces. We pretend to emphasize the utility of the puzzle to help students to achive some skills such as doubling sourfaces and realizing about orientation of plane figures.

1. Introducción

La enseñanza de las matemáticas en la escolaridad obligatoria está volviendo a valorar las cualidades educativas de la geometría sintética de formas, por lo que se está reconociendo el valor educativo de los recursos manipulativos para ayudar al alumno a hacerse una representación del espacio (Alsina y otros, 1987, 1988, 1990 y 1996). En este marco, se ha realzado el papel de los puzzles (García, 2000) y figuras que permiten descomponer y componer figuras (Dickson y otros, 1984) en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Gracias a ellos, el usuario se familiariza con ángulos, relaciones de paralelismo y perpendicularidad, percepción y comparación de longitudes, interiorización, manejo y creación de formas, etc., favoreciendo en todos los casos la creación de estructuras mentales que permiten afrontar procedimientos generales del aprendizaje matemático (Alsina y otros, 1996, García, 2000).

Son especialmente valorados aquellos puzzles que tienen dos cualidades: simpleza y versatilidad. Con la primera se trata de que el usuario pueda hacerse una representación mental rápida de las piezas que lo forman, con lo que pueda identificar rápidamente la pieza que necesita para completar una figura. Para que un puzzle sea simple tiene que estar compuesto por piezas fáciles de retener y colocar (recuérdese el éxito comercial del juego del TETRIS, compuesto por los tetraminós o figuras formadas por cuatro cuadrados unidos dos a dos por una arista). La versatilidad de un puzzle se mide por la diversidad de tareas que pueden realizarse con él. En enseñanza, un material será más versátil cuanto más tareas puedan promoverse, y cuanto más campos de conocimiento pueden beneficiarse de su empleo.

El equilibrio entre versatilidad y simpleza no es fácil de conseguir. Podemos decir que el TANGRAM es una representación de este equilibrio, dada la cantidad de figuras que se pueden formar con él, la variedad de tareas educativas que se pueden proponer (desde estudios geométricos de formas, hasta tareas de fracciones, pasando por los estudios de las magnitudes superficie y longitud, Corbalán, 1994, García, 2000), a partir de 7 piezas, todas ellas con ángulos rectos, de 45° o combinaciones lineales de ellos, por lo que resulta fácil recordarlas y relacionarlas entre sí.

Un ejemplo de puzzle simple, pero poco versátil es el de la T (figura 1), que está pensado para la construcción de esta forma, y sólo pueden obtenerse algunas otras formas. Este puzzle está compuesto por pocas piezas y sus formas son sencillas.

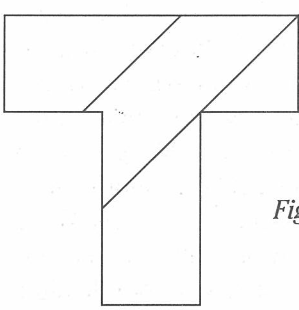

Figura 1: puzzle de la T, (cuatro piezas).

El reto de un puzzle es reunir las dos cualidades de simpleza y versatilidad. En este artículo queremos mostrar un puzzle que hemos ideado a partir de la descomposición de una figura familiar: el perfil de la pajarita de papel. El puzzle se compone sólo de tres piezas, por lo que es simple en su concepción. Nuestra intención es mostrar algunas cualidades que le dan un cierto grado de versatilidad en la enseñanza de las formas geométricas. Hemos de reconocer que no nos hemos preocupado por la versatilidad lúdica, sino que la hemos justificado en función del interés geométrico de los empleos que proponemos.

Vamos a describir el puzzle a partir de su origen, es decir, de la descomposición y estudio del eneágono que es la pajarita de papel. Posteriormente trataremos de mostrar algunas cualidades educativas geométricas que se pueden desarrollar por medio del trabajo con este puzzle. Para ello analizaremos las cualidades de sus piezas y algunas apreciaciones geométricas sobre ellas. Finalmente aportaremos unas sugerencias didácticas sobre su uso, junto con algunas conclusiones.

Es frecuente que los puzzles provengan de la descomposición de una figura. Este es el caso del puzzle de la T (figura 1). La casa comercial alemana *bartl* ha comercializado una gran cantidad de descomposiciones de polígonos y poliedros, en madera, a precios razonables, que se pueden encontrar en su página web: **www.bartlgmbh.com.** Desgraciadamente tienen las instrucciones en alemán. En estos puzzles se suele proponer la formación de un solo modelo a partir de sus piezas, y si bien algunos son muy conocidos, otros han tenido menos difusión.

2. Caracterización geométrica de la pajarita

La pajarita es un eneágono cóncavo, ampliamente conocido, y muy utilizado (es de destacar el empleo que se le ha dado como logotipo en los contenedores municipales de papel, en muchas provincias españolas, aunque su dibujo no siempre es el que vamos a describir a continuación). Tal como se ve en la figura 2, su construcción es posible en una rejilla cuadrada, ocupando, al menos, dos posiciones, y teniendo una de ellas superficie doble que la otra.

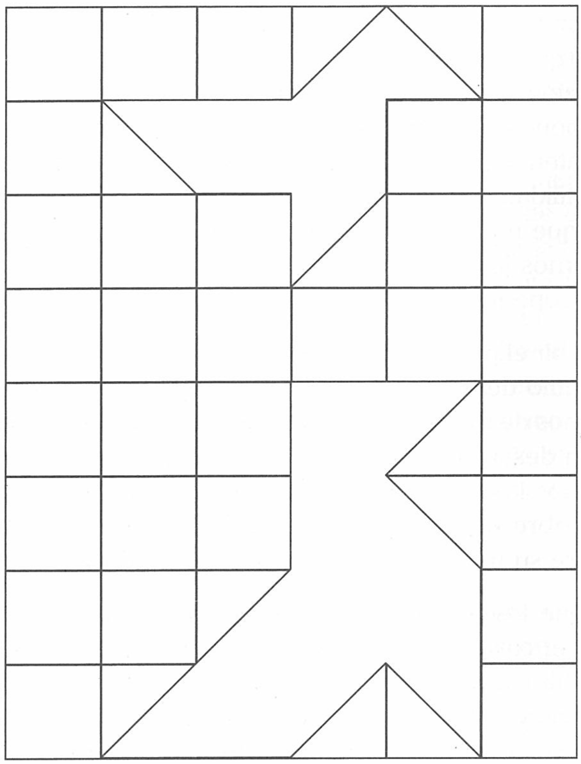

Figura 2: pajarita de papel.

Como se observa, los ángulos de la pajarita se obtienen como combinación lineal de 45 y 90, ya que tres de ellos miden 45°, dos 270°, dos 135°, uno 90° y el último 215°.

Tiene cuatro lados de igual longitud (vamos a llamarla $\boldsymbol{a}$), otros cuatro de longitud $\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}$, y otro de longitud 2 $\boldsymbol{a}$.

Es importante ver que en este polígono están alineados varios vértices (figura 3), tales como:

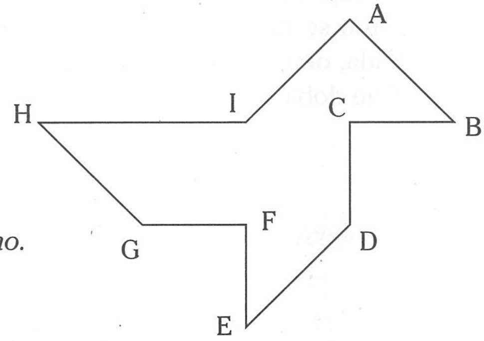

Figura 3: pajarita polígono.

A, C y D están alineados; B, C, I y H están alineados; B, D y E están alineados; D, F y G están alineados; E, F e I están alineados y E, G y H están alineados.

Tal como indica Deulefeu (2001), la descomposición de una figura en otras es un buen recurso para familiarizarse con las formas geométricas. Vamos a buscar descomposiciones del eneágono que constituye la pajarita.

Tal como se deduce de su construcción en un geoplano cuadrangular, la figura de la pajarita puede descomponerse fácilmente en un puzzle de 8 triángulos rectángulos isósceles iguales. Este puzzle sería el más fácil, y naturalmente permite formar con ellos una gran variedad de figuras.

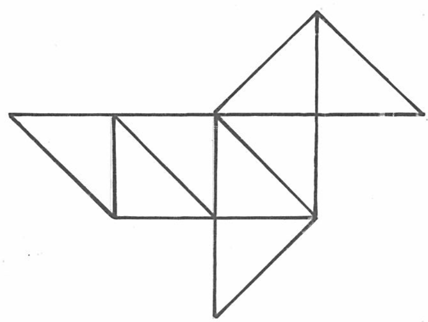

Figura 4: descomposición de la pajarita en triángulos rectángulos isósceles.

Otra descomposición natural del eneágono de la pajarita permite obtener dos cuadrados, y tres triángulos rectángulos isósceles de dos tamaños (figura 5).

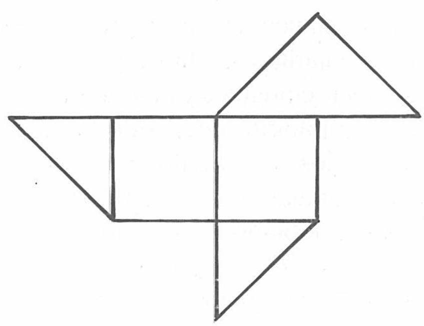

Figura 5: descomposición de la pajarita en cuadrados y triángulos rectángulos isósceles.

Una nueva descomposición, también evidente, obtiene dos trapecios rectángulos y un triángulo rectángulo e isósceles (figura 6). Esta descomposición es la que vamos a llamar ***puzzle de la pajarita***.

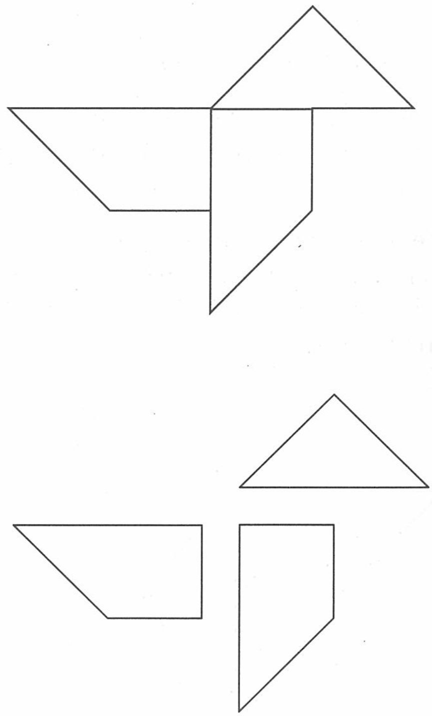

Figura 6: Puzzle de la pajarita.

Como se aprecia, la descomposición no es demasiado novedosa. Si analizamos la formación de la pajarita a partir de papel doblado, podríamos identificar los dos trapecios rectángulos y el triángulo rectángulo que van a constituir una cara de la pajarita de papel. En la figura 7 aparecen sombreados los dos trapecios rectángulos y el triángulo rectángulo e isósceles que dan lugar a la pajarita, al construirla por el procedimiento tradicional, a partir de papel doblado. En ella podemos ver que un trapecio rectángulo se convertirá en el cuerpo (trapecio 1), otro en las patas (trapecio 2), y un triángulo rectángulo e isósceles se convertirá en la cabeza.

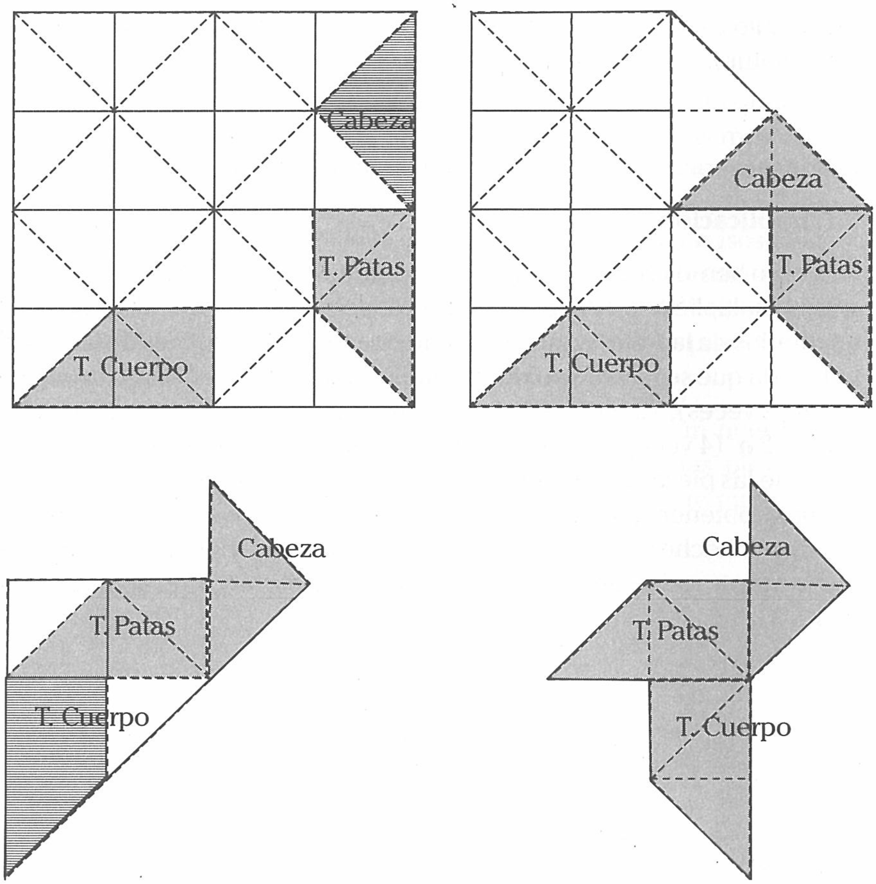

Figura 7: papel doblado para obtener la pajarita de papel, y tres piezas que se convertirán en el cuerpo, las patas y la cabeza. Generación de la pajarita a partir del papel doblado. Trapecios rectángulos y triángulo rectángulo isósceles que aparecerán en la pajarita. El rayado indica que se encuentra en la otra cara del papel.

Aunque la descomposición no es novedosa, veremos que este puzzle permite obtener una cierta variedad de formas, que colaboran al tratamiento de algunas cualidades geométricas. Ello nos hace defender la versatilidad de este puzzle, que trataremos de ver en el punto siguiente.

Destaquemos las piezas que conforman el puzzle. Se trata de dos trapecios rectángulos iguales, formados por la unión de un cuadrado y un triángulo rectángulo isósceles. Por tanto sus bases miden $\boldsymbol{a}$ y $2\boldsymbol{a}$, mientras que su altura mide $\boldsymbol{a}$, y el otro lado mide $\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}$. Además hay un triángulo rectángulo e isósceles, de hipotenusa $2\boldsymbol{a}$ y de catetos $\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}$. Estas medidas están naturalmente ligadas a las medidas de los ángulos (90°, 45° y 135°).

3. Consecuencias de las características geométricas

3.1. Duplicación de la pajarita

Tal como hemos visto en la figura 2, la pajarita es fácilmente duplicable, ya que la multiplicación de los lados por $\sqrt{2}$ consiste en trazar diagonales de cuadrados de lados $\boldsymbol{a}$, es decir, unir de otra forma los vértices de la cuadrícula en la que se ha construido la pajarita. Si los lados de la pajarita original son $\boldsymbol{a}$ (4 veces), $\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}$ (4 veces) y $2\boldsymbol{a}$, los de la pajarita de superficie doble serán $\sqrt{2}\,\boldsymbol{a}$ (4 veces), $2\boldsymbol{a}$ (4 veces), y $4\boldsymbol{a}$. Todos éstos se pueden obtener a partir de las piezas del puzzle, lo que nos hizo buscar una forma de situarlas para obtener la pajarita doble. Basándonos en estudios previos que habíamos hecho sobre la pajarita (Sánchez y Flores, 1999), pudimos obtener la construcción de la pajarita con dos puzzles, tal como aparece en la figura 8.

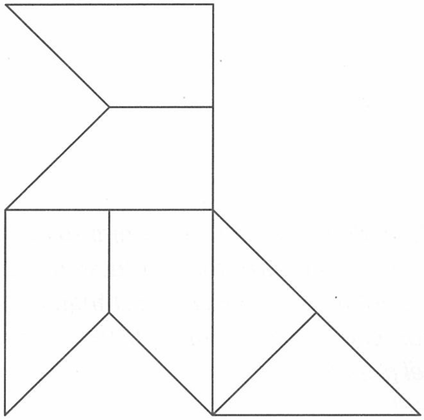

Figura 8: pajarita doble con dos puzzles.

Naturalmente, la superficie de la nueva es doble que la de la anterior, ya que se forma con el doble de piezas que aquella, y hay que destacar ésta como condición suficiente (aunque no necesaria, ya que puede que no fuera construible a partir de esta descomposición). Esta característica permite trabajar la relación entre superficies de manera manipulativa, anterior a otra consideración.

Un paso más para comparar superficies lo constituye la búsqueda de descomposiciones en figuras que teselen y permitan rellenarlas completamente. Al estar ambas figuras construidas en un geoplano ortogonal, podemos utilizar como figura de relleno el cuadrado, y observamos que la pajarita obtenida con un solo puzzle cubre exactamente cuatro cuadrados (dos de los que aparecen en los trapecios, otro formado por una nueva distribución de las mitades del triángulo rectángulo e isósceles, y el otro formado entre los dos triángulos rectángulos que restan en cada trapecio, tal como se aprecia en la descomposición de la pajarita en cuadrados y triángulos isósceles, figura 5). Por su parte, la pajarita doble ocupa ocho cuadrados, como puede verse en la figura 5.

Sabemos que con cuatro cuadrados se puede construir un nuevo cuadrado, pero ¿sería posible construir un cuadrado con las piezas del puzzle?. Tras algunos intentos apareció la forma final de este puzzle, que es el de la figura 9.

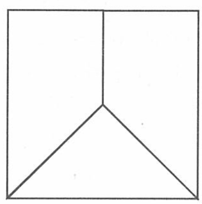

Figura 9: cuadrado construido con el puzzle.

Luego, si consideramos que el TANGRAM está constituido por las piezas que descomponen el cuadrado, nuestro puzzle igualmente parte de la descomposición de un cuadrado, tal como aparece en la figura 9. Ya sabemos que con estas tres piezas podemos construir una pajarita, y que con dos puzzles podemos también construir una pajarita doble (además de dos pajaritas, naturalmente).

Las mismas piezas que forman la pajarita han permitido construir un cuadrado. ¿Podría construirse un cuadrado con las piezas que permiten construir una pajarita doble?. Una intuición nos hace pensar en que lo que ocurría con las pajaritas se vería reflejado en sucesos con los cuadrados. En principio se dan las condiciones, ya que ha sido posible construir la pajarita doble, lo que indica que los lados y los ángulos lo permiten. Sin embargo la pajarita doble tiene una superficie de 8 cuadrados, con los que se puede construir un rectángulo de base doble a la altura, pero no es evidente que se pueda construir un solo cuadrado. La manipulación de las piezas nos permitió obtenerlo, tal como aparece en la figura 10.

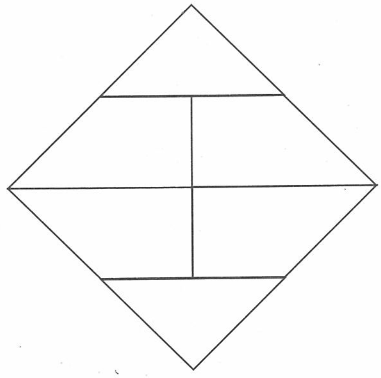

Figura 10: cuadrado doble, con dos puzzles.

Animados por este resultado, intentamos buscar múltiplos de la pajarita y del cuadrado, de manera paralela, tratando de formarlos con el puzzle. Esto nos permitió obtener fácilmente el cuadrado cuádruple del original. Lo que era más discutible era la pajarita cuádruple de la inicial. Curiosamente la descomposición del puzzle original nos dio la solución. Evidentemente con cuatro triángulos rectángulos e isósceles se puede construir otro triángulo rectángulo e isósceles. Lo menos evidente era obtener trapecios rectángulos con cuatro trapecios rectángulos. Dado que el trapecio que trabajamos se compone de un cuadrado y un triángulo rectángulo isósceles (figuras todas ellas construibles a partir de cuatro figuras iguales semejantes a la original), podía pensarse que fuera posible, y efectivamente obtuvimos que el trapecio rectángulo como el que tenemos también es construible a partir de trapecios rectángulos, semejantes a él, como aparece en la figura 11. Ello nos llevó a proponer las pajaritas de superficies cuatro y ocho veces la original, y con ello las de cualquier potencia de dos veces la original, tal como aparecen en el espiral de pajaritas construidas en la figura 12.

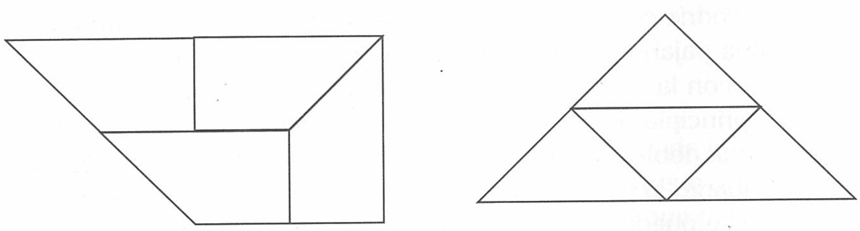

Figura 11: Polígonos semejantes a trozos, el triángulo rectángulo isósceles y el trapecio rectángulo.

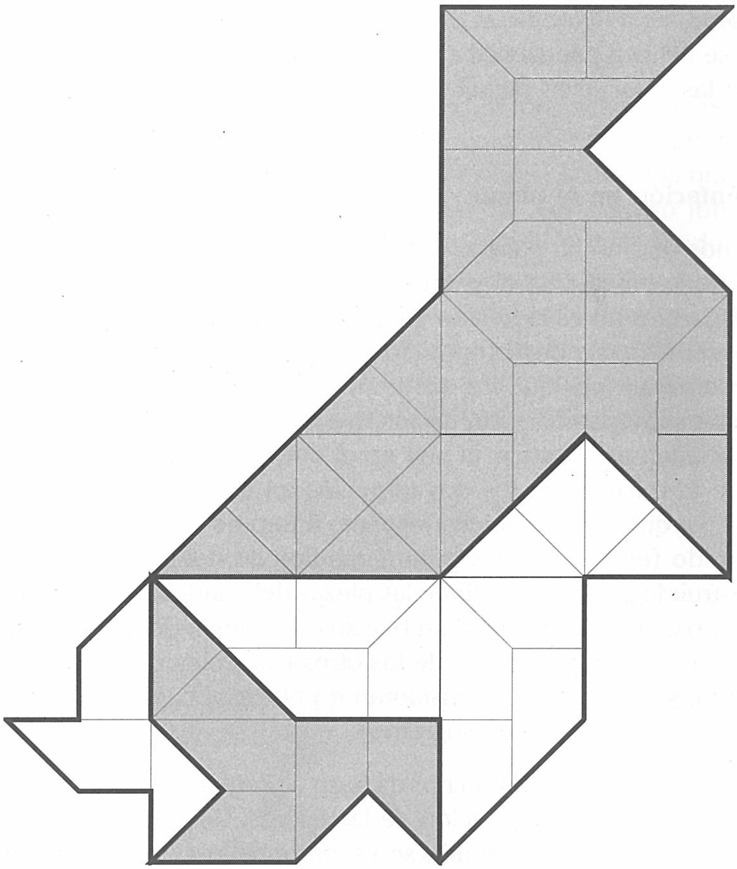

Figura 12: espiral de pajaritas de superficies potencias de 2.

Como hemos visto, las duplicaciones sucesivas son posibles, cabría pensar en otras multiplicaciones. Dejamos en manos del lector estudiar si es posible obtener otras multiplicaciones de la pajarita, y con ello del cuadrado, y, sobre todo, si sería posible formar estas pajaritas con el puzzle que aquí presentamos.

En la figura 12, aparece un original y estético espiral de pajaritas, dado que cada una encaja en su doble. Este espiral podría seguir en ambas direcciones, y nos sugiere el estudio de otra regularidad matemática, que también dejamos para el lector, como la posibilidad de construir fractales de pajaritas, nuevos espirales compuestos etc.. También surge la idea de teselar el plano con la pajarita, o, al menos, obtener frisos, que también dejamos para el lector, o para otra ocasión en que desarrollemos más ampliamente esta figura de la pajarita. Sugerimos que para todos estos estudios se utilicen papeles cuadriculados, que facilitan sobremanera el dibujo de las respectivas pajaritas.

3.2. Orientación en el plano

Imaginamos que no ha pasado desapercibido al lector que la descomposición de la pajarita en dos trapecios rectángulos y un triángulo rectángulo isósceles no es la misma que la del cuadrado en figuras parecidas. Si observamos la descomposición de la pajarita en estas figuras (figura 6), observaremos que los dos trapecios en que se descompone la pajarita son superponibles, sin levantarlos del plano en que se encuentran (se pueden transformar el uno en el otro por traslaciones y giros). No ocurre lo mismo con los dos trapecios en que se descompone el cuadrado, ya que son simétricos respecto a uno de los ejes de simetría del cuadrado (el que une los puntos medios de dos lados opuestos). Para construir la pajarita a partir de las piezas del cuadrado, necesitamos levantar uno de los trapecios, y cambiar su orientación (lo que equivale a someterlo a una simetría, antes de los otros movimientos). El puzzle es pues válido, si las piezas se consideran en el espacio, tal como ocurre con el Tangram (con el paralelogramo).

Por tanto el puzzle de la pajarita nos da lugar a plantear otro aspecto de la geometría sintética, la orientación de las figuras. Con ello nos estamos refiriendo al estudio de qué figuras son superponibles, es decir, cuáles se puede obtener una de otra por medio de un giro o traslación. Si bien dos triángulos rectángulos isósceles con lados equivalentes son superponibles, no lo son siempre dos trapecios rectángulos e isósceles, aunque tengan lados equivalentes. Se determina con ello el sentido de la figura, como cada una de las clases de equivalencia en que quedan descompuestos todos los trapecios por esta relación de superposición. Los dos trapecios de la pajarita simple tienen la misma orientación, mientras que los del cuadrado no.

Como consecuencia de considerar la orientación en las piezas del puzzle, surgió la idea de explotarla, para lo que sugerimos pintar cada cara del cuadrado que genera el puzzle de un color. Por lo que hemos dicho, con este puzzle no sería posible formar una pajarita del mismo color a partir de un puzzle cuadrado que tuviera sus piezas de un color por cada cara (roja y verde, por ejemplo), es decir, un cuadrado rojo no permitiría construir una pajarita roja, sino que tendría un trapecio rojo y el otro verde. Dejamos como reflexión del lector el estudio de lo que ocurriría en un

TANGRAM de dos colores, si sería posible construir todas las figuras de un solo color, si cada figura tendría un color distinto, etc..

Recordando otros puzzles que proponen la formación de las figuras y del fondo, sugerimos la posibilidad de combinar varios puzzles de la pajarita, con las piezas de dos colores, y estudiar las figuras que podrían formarse. Para darle mayor versatilidad, se nos ocurrió juntar ocho puzzles bicolores. Con ellos se pueden construir dos cuadrados de cuatro puzzles cada uno, con lo que aparentemente podrían compensarse las piezas que faltan de un color en uno de los cuadrados, con las del otro. De esta nueva composición con ocho puzzles aparecieron muchas formas en las que se combina la forma y el fondo, en dos tonalidades distintas, presentamos algunas composiciones en la figura 13, que dejamos al lector como ejercicio.

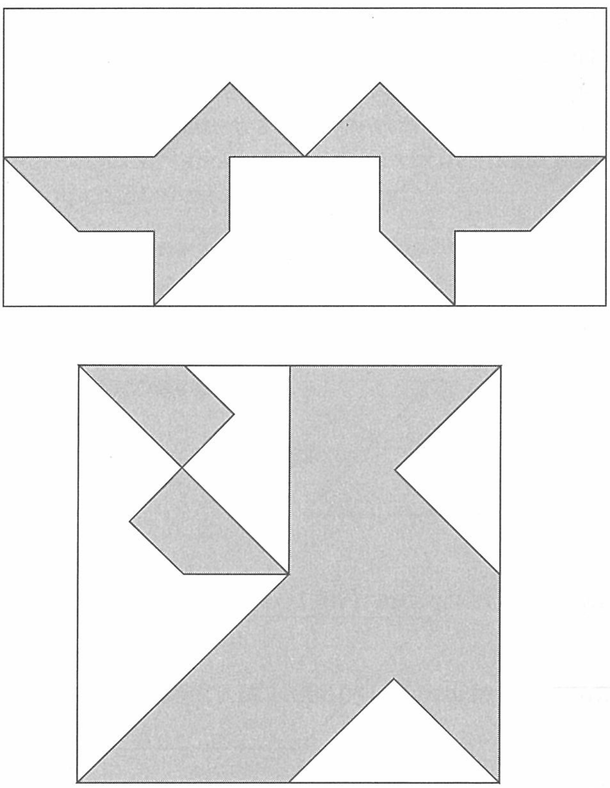

Figura 13: puzzle de las ocho pajaritas de las dos caras. Figuras que pueden formarse.

4. Consecuencias didácticas y conclusiones

En este artículo hemos querido mostrar un puzzle fácil, simple, que tiene cierta versatilidad, y gracias al cual hemos podido hacer algunas reflexiones geométricas que exceden el simple juego. Dada la simpleza de estas piezas, el puzzle es muy fácil de construir, y, como hemos visto, permite afrontar diversas actividades, tales como obtener algunas otras figuras (en la figura 14 aparecen los cuadriláteros que se pueden construir con dos puzzles, además del cuadrado, dejamos como ejercicio el estudio de si es posible obtener otros cuadriláteros con dos puzzles), dando oportunidad al usuario de crear sus propias figuras, y estudiar algunas propiedades, como las longitudes de los lados de ellas.

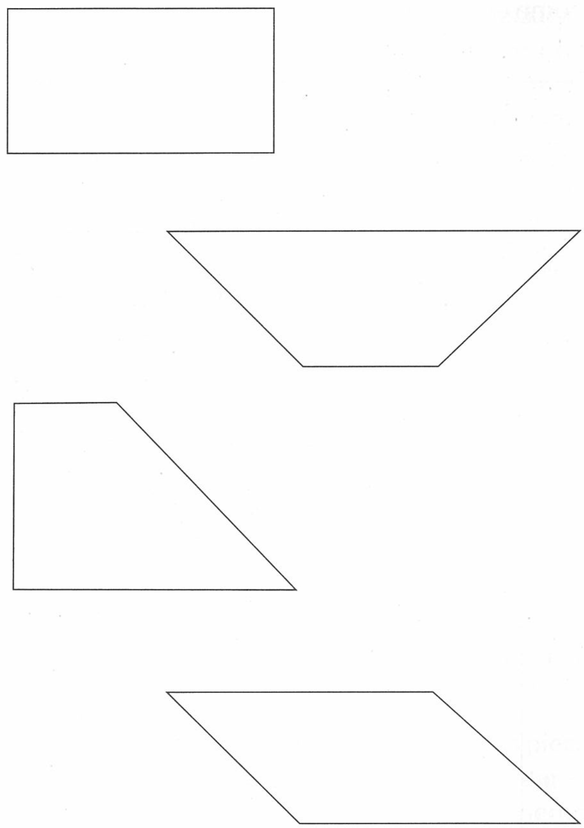

Figura 14: algunas figuras que se pueden formar con dos puzzles de la pajarita, cuadriláteros.

Hemos mostrado el interés de este puzzle para trabajar la duplicación de superficies, estudiando la relación entre los lados, y su posición. Creemos que su empleo en clase de matemáticas, en la línea propuesta por Corbalán (1994) y Alsina y otros (1996) puede afianzar el aprendizaje de algunos aspectos de esta duplicación, como la relación con los ángulos de 45º y 90º y las longitudes de los lados.

Igualmente, aunque lo hemos desarrollado poco en este artículo, hemos mostrado algo sobre el puzzle de las dos caras, cuya utilización puede ser útil para favorecer la percepción del fenómeno de la superposición de figuras, lo que da lugar al estudio de la orientación de las figuras en el plano, mostrando la diferencia entre los efectos de las traslaciones y giros, respecto a las simetrías axiales en el plano.

Pero sobre todo, con este artículo, querríamos destacar que las matemáticas son creatividad, y que todo profesor o alumno puede crear sus propios puzzles, con tal de que antes o después, muestre sus cualidades geométricas, su versatilidad, y los aportes que puede hacer a las construcciones geométricas. Esperamos que estas ideas sirvan para quitar el miedo a la creatividad, y animen a trabajar con figuras que, por ser familiares tienen la ventaja de que las tenemos en la memoria para construirlas, sin sentir la necesidad de mirar modelos.

La pajarita es especialmente interesante para estos menesteres. Dejo para el lector intentar hacer la pajarita con todas las piezas del TANGRAM, con dos TANGRAM o con medio TANGRAM, y estudiar si es posible hacerlo con un cuarto de TANGRAM. Yo continuaré con esta figura que me resulta especialmente evocadora.

Bibliografía

Alsina, C. Burgués, C., Fortuny, J.M. (1987): *Invitación a la didáctica de la geometría*. Síntesis, Madrid.

Alsina, C. Burgués, C., Fortuny, J.M. (1988): *Construir la geometría*. Síntesis, Madrid.

Alsina, C. Burgués, C., Fortuny, J.M. (1996): *Enseñar matemáticas*. Síntesis, Madrid.

Corbalán, F. (1994): *Juegos matemáticos para secundaria y Bachillerato*. Síntesis, Madrid.

Deulefeu, J. (2001): *Una recreación matemática: historia, juegos y problemas*. Planeta, Barcelona.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1984): *El aprendizaje de las matemáticas*. Labor, Madrid.

García, A. (2000): Puzzles: un recurso polivalente en la ESO. En Gámez, A. y otros, *IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas "Thales"*, (pp. 171-173). Servicio publicaciones Universidad de Cádiz y SAEM THALES, Cádiz.

Sánchez, M. y Flores, P. (1999): Visualización de la pajarita de papel. En Berenguer, M. y otros (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad*. (pp. 247-252). THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática, Granada.

Este artículo se ha hecho dentro del trabajo del Grupo de Investigación de la Junta de Andalucía FQM0126, «Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática».

Autor: Pablo Flores Martínez, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Cartuja, 18071, Granada, Universidad de Granada. Teléfono: 958 24 28 45. Correo electrónico: pflores@ugr.es

Nacido en Linares, Jaen, en 1951. Licenciado en Matemáticas y en Ciencias de la Educación, Doctor en Matemáticas, especialidad de Didáctica de la Matemática. Catedrático de Instituto, Profesor Titular de Universidad. Libro: Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, Comares, Granada. Artículos en SUMA (21, 26, 31) UNO (8, 10, 17), Educación Matemática (Vol. 9,3), EMA (Vol. 5, 2), Épsilon (21), Enseñanza (14), entre otras. Línea de trabajo: formación de profesores de matemáticas.