Una aplicación del geoplano ortométrico

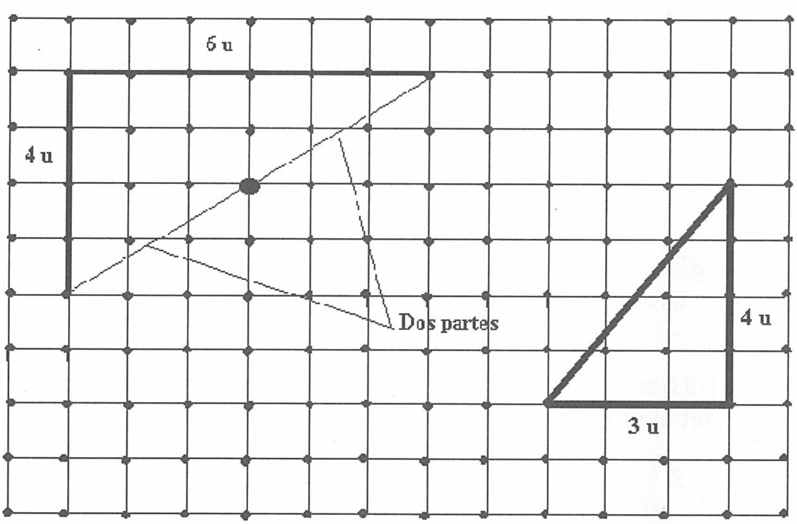
Juan Contreras Guerrero

Resumen

Todos los que nos dedicamos a la enseñanza de las matemáticas conocemos el geoplano ortométrico y algunas de sus aplicaciones. Se trata de una plancha de madera u otro material, en la que se disponen de forma regular una serie de clavos o puntos en trama cuadrangular pudiéndose formar en él figuras utilizando gomas elásticas. En este pequeño artículo se expone un acercamiento manipulativo a los conceptos de máximo común divisor y del mínimo común múltiplo de dos números, así como su fundamento matemático.

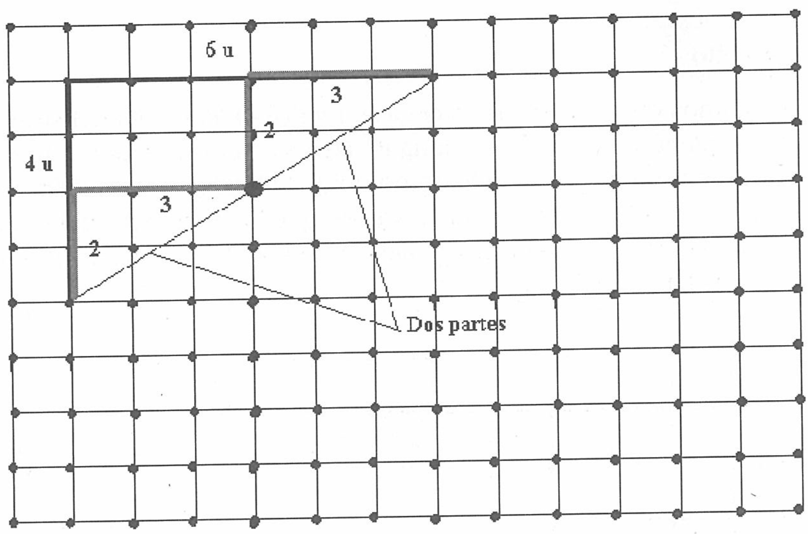
Desarrollo

Supongamos que queremos calcular el mcd(6,4). Para ello construimos en el geoplano un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 6 y 4 unidades respectivamente, tomando como unidad el lado de un cuadrado de la trama. Uniendo los catetos observamos que la hipotenusa del triángulo queda dividida en dos partes iguales por un punto de la trama y el mcd de 6 y 4 es también 2.

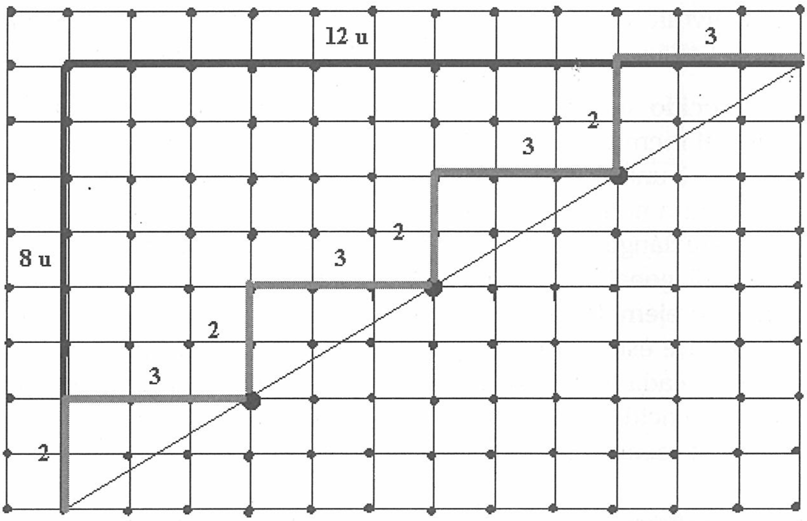


Si los números son primos entre sí, sabemos que su mcd es la unidad y entonces la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son esos números no pasa por ningún punto de la trama.

También se observa, en el caso del mcd(6,4), que se pueden construir dos triángulos rectángulos de lados 3 y 2 unidades respectivamente y cuyos vértices de ángulos agudos están situados en puntos de la trama. Las hipotenusas de estos triángulos rectángulos no pasan por puntos de la trama, no quedando éstas divididas en partes iguales por ningún punto del geoplano, dado que los catetos son números primos entre sí. En este caso las hipotenusas se consideran como unidad. Aquí podemos justificar claramente la propiedad del máximo común divisor de dos números que dice: **"Si mcd(a,b) = d, entonces mcd(a/d, b/d) = 1"**; en el ejemplo 6/2=3, 4/2=2 y mcd(3,2) = 1



Otro ejemplo: mcd(12,8)



Aquí vemos que mcd(12,8) = 4 y que mcd(12/4,8/4) = mcd(3,2) = 1

¿Cuál es la explicación?

Sabemos que si $\mathrm{mcd}(a,b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = p \cdot d \\ b = q \cdot d \end{cases}$ con $\mathrm{mcd}(p,q) = 1$

Tomando un triángulo rectángulo de catetos a y b unidades, respectivamente, se tiene que el valor de la hipotenusa h es:

$$h^2 = a^2 + b^2 = (p \cdot d)^2 + (q \cdot d)^2 = p^2 \cdot d^2 + q^2 \cdot d^2 = d^2 \cdot \left(p^2 + q^2\right)$$

$$h = \sqrt{d^2 \cdot \left(p^2 + q^2\right)} = d \cdot \sqrt{p^2 + q^2} = d \cdot h', \quad \text{con} \quad h' = \sqrt{p^2 + q^2}$$

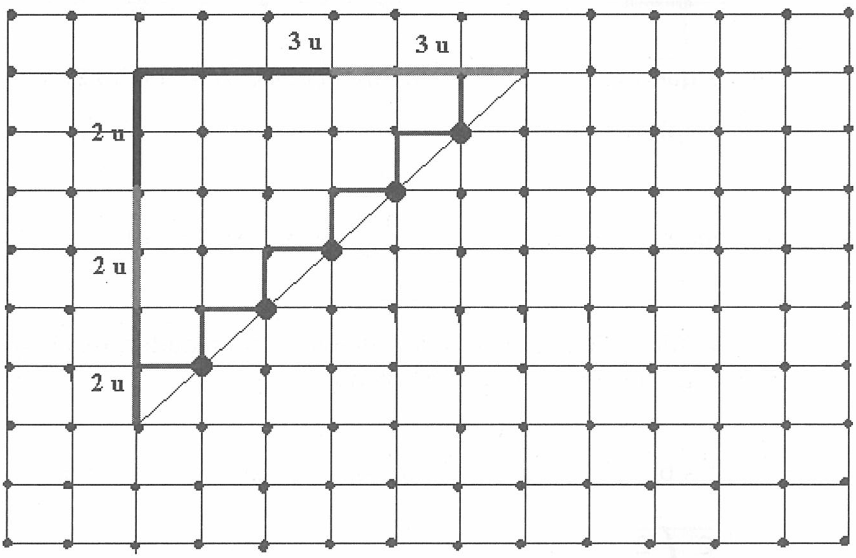
siendo h´ la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos p y q unidades, números primos entre sí, cuyos extremos situados sobre la hipotenusa h coinciden con vértices de la trama.

La hipotenusa h contiene "d" veces el segmento $h' = \sqrt{p^2 + q^2}$. Esto significa que la hipotenusa queda dividida en "d" partes iguales de longitudes h´, estando las divisiones en puntos de trama cuadrada.

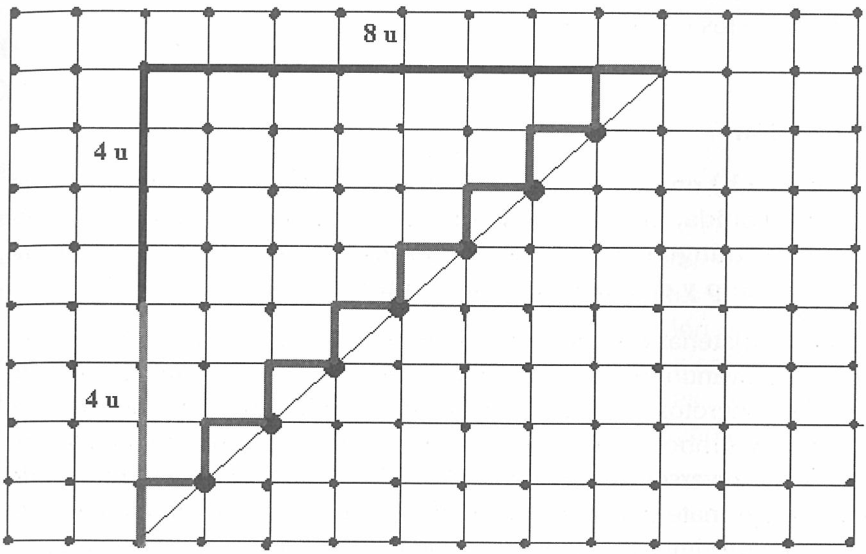
Conclusión:

"El mcd(a,b) en el geoplano es el número de partes iguales en que queda dividida, mediante puntos de la trama cuadrada, la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos a y b unidades".

Algo parecido sucede para el mcm(a,b). Supongamos que queremos calcular el mcm(2,3). Para ello construimos un triángulo rectángulo de catetos 2 y 3 unidades respectivamente. Uniendo los extremos se ve que la hipotenusa no pasa por puntos de la trama. Hay que lograr el menor triángulo rectángulo, de forma que la hipotenusa pase por todos los puntos de la diagonal de la trama. Esto sucederá si el triángulo es isósceles. En nuestro ejemplo será un triángulo rectángulo isósceles de catetos 6 unidades. De esta forma la hipotenusa queda dividida en 6 partes iguales, siendo cada parte la diagonal de un cuadrado base de la trama. Este número coincide con el mcm(2,3). El triángulo isósceles se consigue tomando 2 veces el cateto de 3u y 3 veces el cateto de 2u



Otro ejemplo: mcm(4,8)



Aquí el mcm(4,8) = 8, y vemos que, construyendo un triángulo rectángulo isósceles de catetos 8 unidades, la hipotenusa pasa por todos los puntos de la diagonal de la trama quedando dividida en 8 partes iguales, número que coincide con el mcm(4,8). El triángulo isósceles se consigue tomando 2 veces el segmento de 4u y una vez el segmento de 8u.

Igual que antes, ¿cuál es la explicación?

Sabemos que $\text{mcm}(a, b) = m \Rightarrow \text{mcd}\left(\frac{m}{a}, \frac{m}{b}\right) = 1$, con $\frac{m}{a} = p$ y $\frac{m}{b} = q$

Tomando un triángulo rectángulo de catetos a y b, construimos otro de catetos a.p y a.q, cuya hipotenusa medirá:

$$h^2 = (a \cdot p)^2 + (b \cdot q)^2 = m^2 + m^2 = 2 \cdot m^2$$

$$h = \sqrt{2 \cdot m^2} = m \cdot \sqrt{2} = m \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = m \cdot h'$$

"h" es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden "m" unidades y h´ es la diagonal de un cuadrado base de la trama, estando los extremos de h´ situados sobre la hipotenusa h coincidiendo con puntos de la trama cuadrada. Como la hipotenusa h contiene "m" veces h´, quedará dividida en "m" partes iguales que será el mínimo común múltiplo de los números a y b.

Conclusión

"El mcm(a,b) en el geoplano es el número de partes iguales en que queda dividida, mediante puntos de la trama cuadrada, la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles de catetos ap y aq unidades, siendo p y q números primos entre sí".

Con este material estamos acercando al alumno a un concepto matemático apoyándonos en actividades prácticas y en la manipulación de objetos concretos, para después seguir avanzando hacia formas más figuradas y simbólicas que faciliten la abstracción. Con la manipulación de objetos diversos se asegurarán los primeros pasos en el proceso de aprendizaje matemático. La experiencia práctica en el trabajo matemático sólo constituye un punto de partida, en el que será preciso detenerse en ocasiones durante un buen período de tiempo, y que la construcción del conocimiento matemático obliga a una abstracción y una formalización permanente. Esto no se podrá conseguir con todos los alumnos, sirviendo el método para un posible tratamiento de la diversidad.

Juan Contreras Guerrero
I.E.S. Pablo Montesinos. Las Palmas de Gran Canaria.
Diplomado por la Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B. de Las Palmas de Gran Canaria y Licenciado en Matemáticas por la U.N.E.D.
Correo electrónico: jcongue@gobiernodecanarias.org