Un modelo matemático para la difusión de culturas y poblaciones

Albert Fàbrega

Introducción

Imaginemos que desde dos puntos situados a cierta distancia, cada uno de ellos cuna de una civilización, las respectivas poblaciones o culturas se expanden bajo ciertas condiciones, de forma que el territorio va siendo ocupado por ellas.

En un modelo muy simple de esta expansión, es posible estudiar las regiones que finalmente coloniza cada cultura, y, en particular, las fronteras entre ellas.

Un buen ejemplo, del cual se han obtenido las ideas para este artículo, es el que ofrece la civilización megalítica en la península ibérica. Desde que comenzó su estudio, a finales del siglo XIX y a primeros del XX, llamó poderosamente la atención de los arqueólogos el hecho de que en el centro y levante hispánicos hay una ausencia total de megalitos, y que parece haber una frontera bastante definida entre dos culturas contemporáneas.

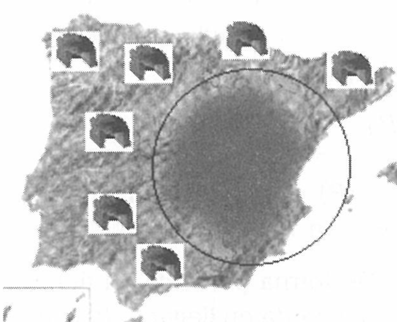

Figura 1

Quizás el modelo que se ofrece sea aún poco elaborado para dar cuenta de dicho fenómeno, pero es lo bastante elemental –por lo que se refiere al aparato matemático necesario– como para permitir, por un lado, mejoras que lo adecuen a la realidad y, por otro, hacer uso de él en las aulas, como base de discusión y estudio de las técnicas matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.

El modelo

En el modelo hacemos las siguientes hipótesis:

1. El territorio es R_2.
2. Cada población se expande a partir de un centro de cultura al que llamamos **foco**.

3. El número de culturas es finito ($n > 1$). En principio son dos o tres.
4. La expansión es radial: tiene lugar en linea recta en todas direcciones y a partir del foco.
5. En cada dirección la velocidad es constante, y, por lo tanto, la velocidad de expansión sólo depende de la dirección.
6. Cuando un individuo alcanza un punto no ocupado, lo ocupa y sigue adelante en la misma dirección.
7. Si un individuo llega a un punto ocupado, sigue adelante en la misma dirección.
8. Si varios individuos (de diferente cultura) llegan simultáneamente a un punto, este punto es "tierra de nadie" y cada uno de ellos sigue su camino en su propia dirección.
9. Si, eventualmente, hay contradicciones sobre qué cultura ha de ocupar un punto determinado, el punto queda como "tierra de nadie".

Dos focos

Supongamos que una cultura tiene foco $F = (-a,0)$ y otra cultura tiene foco $F' = (a,0)$. Para un punto $P = (x,y)$ cualquiera, el tiempo que tarda en llegar a él la cultura F es

$$t_F = \frac{d_F(P)}{v_F(P)}$$

donde $d_F(P)$ es la distancia de P a F y $v_F(P)$ es la velocidad (constante) de expansión de la cultura F en la dirección FP.

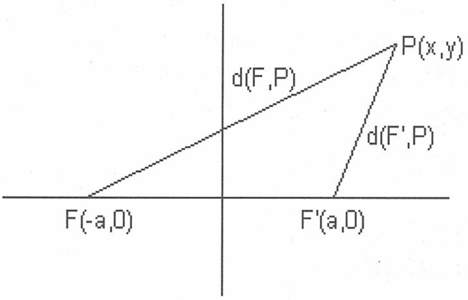

Figura 2

De forma parecida, el tiempo que tarda en llegar a P la cultura F' es

$$t_{F'} = \frac{d_{F'}(P)}{v_{F'}(P)}$$

Los puntos de la frontera serán aquellos en los cuales $t_F = t_{F'}$ es decir,

$$\frac{d_F(P)}{v_F(P)} = \frac{d_{F'}(P)}{v_{F'}(P)}$$

y, por lo tanto, en estos puntos

$$\frac{d_F(P)}{d_{F'}(P)} = \frac{v_F(P)}{v_{F'}(P)}$$

Expansión uniforme

Si ahora suponemos que la velocidad de expansión de cada una de las culturas es la misma en todas direcciones, de forma que

$$\frac{v_F(P)}{v_{F'}(P)} = c \text{ , con } c > 0$$

(es decir, que *F* se expande en todas direcciones *c* veces más rápido que *F'*), entonces tenemos

$$\frac{d_F(P)}{d_{F'}(P)} = c$$

$$\frac{d_F^2(P)}{d_{F'}^2(P)} = c^2 = k > 0$$

De donde resulta

$$(x+a)^2 + y^2 = k(x-a)^2 + ky^2$$

$$(k-1)x^2 + (k-1)y^2 - 2a(k+1)x = -a^2(k-1)$$

$$x^2 + y^2 - 2a\lambda x + a^2 = 0$$

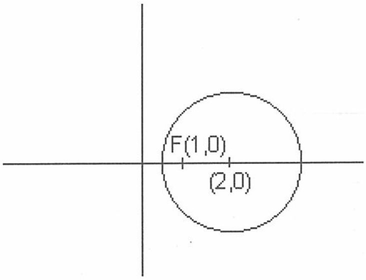

Figura 3

con $\lambda = \frac{k+1}{k-1}$

y por tanto

$$(x - a\lambda)^2 + y^2 = a^2(\lambda^2 - 1)$$

Si $k > 1$, se trata de un círculo[1] con centro

[1] Es curioso que en la página 55 de Prehistoria Catalana, Bosch Gimpera titula una sección dentro del capítulo del neolítico y el eneolítico así: "Los diferentes círculos de cultura".

$$(a\lambda,0) = (a\frac{k+1}{k-1},0)$$

y radio

$$a\sqrt{\lambda^2 - 1} = \frac{2a\sqrt{k}}{k-1}$$

Si $0 < k < 1$, los papeles de F y F' se intercambian, pero la frontera es también un círculo. En este caso, el centro y el radio están dados por las mismas expresiones, pero con λ negativo.

Si $k = 1$, entonces la frontera es el eje de ordenadas: la mediatriz de FF'

Si, por ejemplo, $k = 3$ y $a = 1$, entonces $\lambda = 2$ y $c = \sqrt{3}$ y la cultura F se propaga $\sqrt{3}$ veces más rápido que la F'. El centro del círculo es $(2,0)$ y su radio $\sqrt{3}$

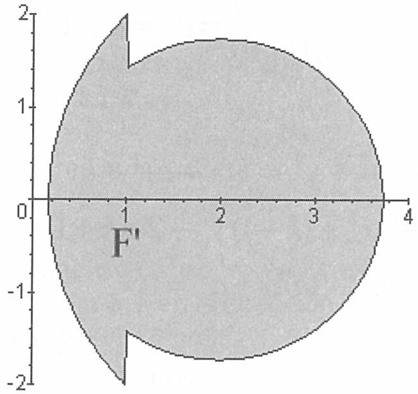

Figura 4

Expansión uniforme a trozos

Ahora podemos suponer que la cultura F se expande uniformemente en todas direcciones, mientras que la cultura F' tiene dos velocidades. En las direcciones de puntos con $x \leq a$ se expande con una velocidad $v^1_{F'}$ mientras que en las direcciones de puntos con $x > a$ lo hace con velocidad $v^2_{F'}$.

Por lo tanto, ahora, la condición que define la frontera es

$$\frac{d_F^2(P)}{d_{F'}^2(P)} = k_1 \text{ , si } \quad x \leq a$$

$$\frac{d_F^2(P)}{d_{F'}^2(P)} = k_2 \text{ , si } \quad x > a$$

donde $k_1 = \dfrac{v_F}{v_{F'}^1}$ y $k_2 = \dfrac{v_F}{v_{F'}^2}$.

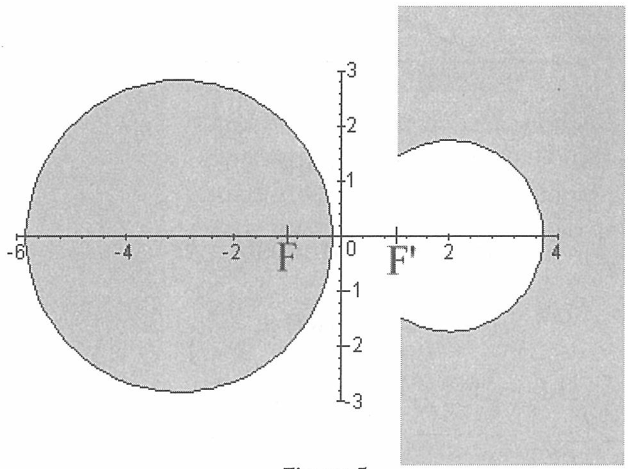

Figura 5

En este caso, se ofrecen diversas posibilidades según los valores de k_1 y k_2. Un par de ejemplos, con $a = 1$ podrían ser:

$$k_1 = 2 \text{ , si } \quad x \leq 1$$

$$k_2 = 3 \text{ , si } \quad x > 1$$

que se ve en la Figura 4 y

$$k_1 = \frac{1}{2} \text{ , si } \quad x \leq 1$$

$$k_2 = 3 \text{ , si } \quad x > 1$$

que se ve en la Figura 5.

Coordenadas polares

Supongamos, como antes, que la velocidad de expansión de *F* es constante. Situemos ahora el foco *F* en el punto (-2a,0) y el foco *F'* en el punto (0,0).

Entonces, si $P=(r,\theta)$, tenemos: $d_F^2(P)=4a^2+r^2+4ar\cos\theta$

(aplicando el teorema del coseno), y $d_{F'}^2(P)=r^2$

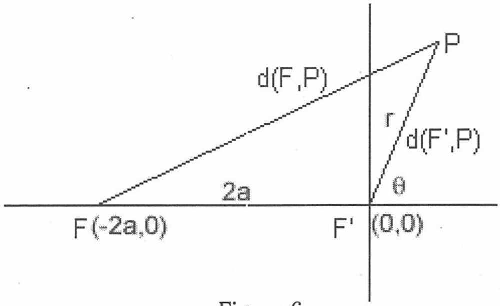

Figura 6

y por tanto

$$4a^2+r^2+4ar\cos\theta=kr^2$$

$$r^2-\frac{4a}{k-1}r\cos\theta=\frac{4a^2}{k-1}$$

$$r^2-\lambda r\cos\theta=\lambda a$$

con $\lambda=\dfrac{4a}{k-1}$

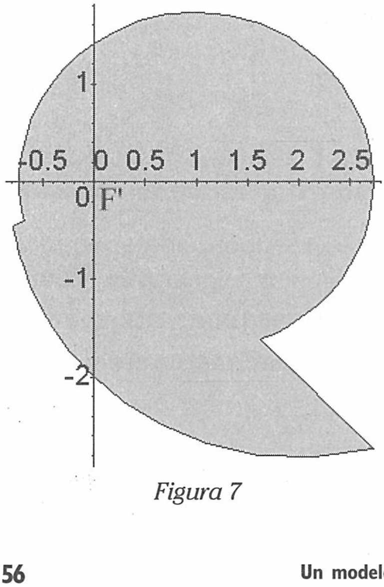

Figura 7

Recordando que un círculo de centro $(\alpha,0)$ y radio ρ tiene por ecuación polar $r^2-2\alpha r\cos\theta=\rho^2-a^2$, resulta que nuestra ecuación representa un círculo de centro $\left(\dfrac{2a}{k-1},0\right)$ y radio $\dfrac{2a\sqrt{k}}{k-1}$ que coincide con el que teníamos antes.

Ahora podemos considerar expansiones de *F'* con dos velocidades

$$v_{F'}^{1} \text{ , si } \alpha \leq \theta \leq \beta$$

$$v_{F'}^{2} \text{ , si } \alpha > \theta, \beta < \theta$$

que corresponde a dos valores k_1 y k_2.

Un ejemplo de esto, con $a = 1$, podría ser:

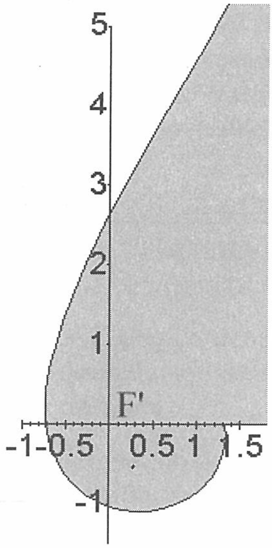

Figura 8

$$k_1 = 2 \text{ , si } \frac{7\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{4}$$

$$k_2 = 3$$

el resto que se ve en la Figura 7.

Otra posible situación es aquella en la cual *F* se expande uniformemente y *F'* lo hace con velocidad inversamente proporcional a la raíz cuadrada del ángulo è. En este caso, tenemos la relación

$$\frac{d_F^2(P)}{d_{F'}^2(P)} = \theta$$

y la ecuación $(\theta - 1)r^2 - 4ar\cos\theta = 4a^2$

que con $a = 1$ nos da la Figura 8.

Nuevos desarrollos posibles

El modelo descrito en este artículo puede desarrollarse en muchas direcciones. Una de ellas es el estudio de dos culturas, ambas expandiéndose con velocidades uniformes a trozos, como puede ser, por ejemplo, el caso en que *F* se extiende con dos velocidades

$$v_F^1 \text{ , si } \alpha \leq \theta \leq \beta$$

$$v_F^2 \text{ , si } \alpha > \theta, \beta < \theta$$

y *F'* lo hace también con dos velocidades

$$v_{F'}^1 \text{ , si } \alpha' \leq \theta' \leq \beta'$$

$$v_{F'}^2 \text{ , si } \alpha' > \theta', \beta' < \theta'$$

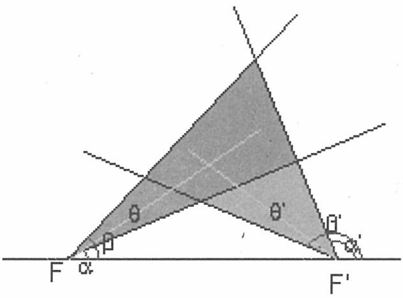

Figura 9

tal y como se muestra en la Figura 9.

Otra posibilidad son las diversas situaciones que pueden darse con tres culturas que tengan expansiones uniformes y uniformes a trozos.

Albert Fàbrega
IES Mig-Món, Súria, Barcelona.
Departament de Matemàtica Aplicada II, UP
Correo electrónico: albertfabrega@yahoo.es