Decisiones estratégicas y de cooperación desde las Matemáticas

Ana Teresa Antequera Guerra y María Candelaria Espinel Febles

Resumen

La vida está llena de conflicto y competencia. La Teoría de Juegos, como rama de las Matemáticas, proporciona un marco conceptual para formular y analizar el comportamiento humano cuando hay conflicto de intereses. Podemos encontrar situaciones de adversarios en conflicto en juegos de mesa, deportes, negocios, política, etc. Ante una situación de conflicto, la Teoría de Juegos ayuda a pensar de forma racional, y a desarrollar conductas estratégicas prácticas. En este trabajo se muestra una experiencia con alumnos de Secundaria, donde se utilizan algunos conceptos de esta Teoría para trabajar aspectos interdisciplinares, por ejemplo, desarrollar posiciones altruistas y de cooperación, incentivar el pensamiento estratégico, etc., al mismo tiempo que se muestra la parte práctica y utilitaria de las Matemáticas en la resolución de problemas de Ciencias Sociales.

Abstract

Real life is full of conflict and competition. Game Theory, as a Mathematics' branch, provides a conceptual frame to develop and analyse human behaviour when a conflict of interest arises. Situations where appear adversaries in conflict are easily found in table games, sports, businesses, politic, etc. Placed before a conflictive situation, Game Theory helps to think in a rational way, and to develop strategic practical behaviours. Through this work, an experience with Secondary School's students is shown. Some concepts of this Theory are used for working aspects within different subjects. For example, to develop altruistic and cooperation positions, to improve the strategical thought, etc. And, at the same time, the practical and useful side of Mathematics is shown using the resolution of Social Sciences problems.

Sobre Teoría de Juegos y Cooperación

La vida esta llena de situaciones de conflicto, que surgen de forma natural cuando dos o más personas tratan de controlar el resultado de los acontecimientos. El modo en que los individuos se relacionan cuando sus intereses entran en conflicto es la base de la investigación en la Teoría de Juegos, la cual trata de buscar soluciones a estos enfrentamientos a través del análisis de las acciones de los individuos, así como de sus consecuencias. Esta

Teoría posee la peculiaridad de proporcionar modelos matemáticos que se pueden aplicar a campos tan dispares como la economía, la política, la psicología o la biología, entre otros.

Los fundamentos de la Teoría de Juegos se deben, principalmente, al matemático John von Neumann, y a la publicación (1944) de su libro: "*Theory of Game and Economic Behavior*", en colaboración con el economista Oskar Morgenstern. Entre las aportaciones de Neumann, destacan sus estudios sobre la resolución de *los juegos bipersonales de suma cero*, un tipo de juegos de estrategia, llamados de conflicto puro, en los que los beneficios de uno de los jugadores suponen exactamente las mismas pérdidas en el otro jugador. Estos son los más sencillos dentro de los juegos no cooperativos, que se centran en el estudio del comportamiento estratégico de los individuos en su propio beneficio, frente a los cooperativos que buscan los mejores resultados para coaliciones, basándose en compromisos vinculantes.

Bajo el nombre de *juego matemático* se entiende un conjunto de reglas que condicionan el comportamiento de ciertos individuos o grupos, que llamaremos *jugadores*, y que intervienen en el mismo. Estas reglas establecen las posibles alternativas de los jugadores, y a cada una de estas se las llama *estrategias*. Como consecuencia de las estrategias seguidas por los jugadores se alcanzará un resultado. Además, se supone que los jugadores tienen claras sus preferencias sobre los resultados posibles, prefiriendo unos sobre otros. Este rango de preferencias se representa asignando a cada resultado un *pago* para cada uno de los jugadores.

En general, la forma de presentación y resolución del juego pasa por la construcción de una matriz formal, *matriz de pago*, que permite comprender el conflicto y sus posibles soluciones. Así, dada la matriz de pago:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cada una de las m filas representa las m estrategias de uno de los jugadores, y las n columnas, las n estrategias del otro, siendo la entrada a_{ij} de la matriz el pago que el segundo jugador ha de hacerle al primero, correspondiente a la estrategia i del primero y la estrategia j del segundo. El primer jugador al estudiar cada estrategia puede estar seguro de obtener el *mínimo en j de los* a_{ij}. Además, como puede elegir un i cualquiera, lo hará de forma que haga máximo el valor $min_j\, a_{ij}$, ganando al menos: $max_i\, [min_j\, a_{ij}]$.

De igual forma, el segundo jugador hará una elección que le asegurará por lo menos: $max_j\,[min_i\,(-a_{ij})] = max_j\,[-max_i\,a_{ij}] = -min_j\,[max_i\,a_{ij}]$

Si los valores máximo-mínimo (maximin) de los ambos jugadores coinciden, a ese pago se le conoce como *valor* del juego en *estrategias óptimas* o *puras*, y se dice que el juego presenta un *Punto de Equilibrio* o *de Silla*. Si no coincidiesen, es decir, si no existiese el Punto de Equilibrio, a ningún jugador le convendría jugar siempre la misma estrategia, pues el otro tendría ventaja. La solución pasaría porque los jugadores realizasen sus elecciones de estrategias con arreglo a una cierta ley de probabilidad, construyendo así una *estrategia mixta*. Sobre este modelo, Neumann demuestra uno de los resultados más importantes dentro de la Teoría de Juegos, el Teorema del Maximin o Minimax: En todo juego bipersonal de suma cero en el que sea posible jugar estrategias mixtas además de las puras, las estrategias maximin de cada jugador coincidirán siempre en una solución estable.

Otro matemático relevante para el desarrollo de la Teoría de Juegos es John Nash, Premio Nobel de Economía de 1994 junto con John Harsanyi y Reinhard Seiten. Su nombre está de actualidad tras el rodaje de la película sobre su vida: "Una mente maravillosa", por lo que no es difícil encontrar referencias a su vida y trabajo en periódicos y revistas de actualidad (el diario El País, 17.02.2002, y la revista Muy Interesante, abril 2002). En 1950, Nash había desarrollado la respuesta que Neumann ofreció para los juegos bipersonales de suma cero, dando por primera vez una solución general para juegos no cooperativos, a través del llamado Equilibrio de Nash. Este Punto de Equilibrio es solución estable porque ninguno de los jugadores siente la tentación de cambiar de estrategia, ya que cualquier cambio implicaría una disminución en sus pagos. Este equilibrio se ha convertido en un instrumento importante en varios campos de la economía, y está teniendo grandes implicaciones en otras ciencias (Revista de Investigación y Ciencia, Septiembre 2002).

El *Teorema del Maximin* y la noción de punto de *Equilibrio de Nash* se consideran como algunos de los hitos más importantes de la reciente Teoría de Juegos, aunque el desarrollo de este campo ha sido significativo en los últimos sesenta años. Así, otros resultados notables son, cronológicamente: *los conjuntos estables* debidos a von Neumann y Morgenstern (1944), distribuciones o repartos "internamente y externamente estables"; *el núcleo* (1953), formado por todos aquellos repartos que no pueden ser mejorados por ninguna coalición de jugadores por sus propios medios; *el valor de Shapley* (1953), interpretado como la ganancia esperada por los jugadores cuando se consideran equiprobables todas las coaliciones del mismo tamaño, y todos los tamaños de coalición a su vez igualmente probables; *el conjunto de regateo* (1964), que busca la noción de estabilidad por medio del sistema de ofertas y contraofertas; o *el valor de Tijs* (1981), mejor solución de compromiso entre un resultado o distribución utópica y una conservadora de los jugadores.

Uno de los problemas más famosos de la Teoría de Juegos es el llamado *Dilema del Prisionero* (Poundstone, 1995), por ser paradigma de multitud de situaciones de la vida real. Se trata de un conflicto no cooperativo, donde los intereses no son del todo antagonistas, es decir, donde los objetivos de los jugadores no están del todo en contraposición. Está englobado dentro de los juegos de suma no nula, y su principal característica yace en la existencia de *ganancias mutuas si ambos jugadores cooperan*.

El planteamiento del Dilema del Prisionero es el siguiente: La policía ha capturado a dos sospechosos, cómplices de un robo, y los mantiene incomunicados para interrogarlos. A ambos se les ofrece la oportunidad de confesar su delito. Si uno confiesa (delata a su compañero) y el otro se declara inocente, el primero saldrá libre por colaborar, mientras que el segundo cumplirá diez años de carcel. Si se acusan mutuamente les caerán cinco años a cada uno; y si ambos sostienen su inocencia ambos cumplirán un año por un delito menor. Esta situación se puede resumir en siguiente tabla:

	B confiesa	B no confiesa
A confiesa	5 años a cada uno	A libre B 10 años
A no confiesa	A 10 años B libre	1 año a cada uno

Al no conocer la decisión del otro detenido, la estrategia más segura sería delatar al otro. Si ambos se traicionan, el resultado es peor que si hubiesen elegido guardar silencio. La combinación de acciones de ambos jugadores (confesar, confesar) se dice que está en Equilibrio de Nash, es decir, es un plan de acción conjunto del que ninguno tiene incentivos para desviarse si los demás no lo hacen. Esta idea del dilema, se puede llegar a reconocer fácilmente en varias situaciones, como ocurre en una guerra de precios entre dos empresas que compiten con un mismo tipo de producto. Cuando los precios están altos, ambas empresas se reparten las cuotas de mercado; pero una de éstas puede decidir bajar los precios, de tal forma que aumenta su cuota y sus beneficios. Sin embargo, lo más probable es que la otra empresa también decida bajar los precios, con lo que se vuelven a repartir la cuota de mercado, pero consiguiendo, evidentemente, unos beneficios menores que si hubiesen mantenido los precios altos.

La importancia del Dilema del Prisionero radica en ser modelo de un gran número de situaciones reales en las que debemos elegir entre pequeñas ganancias personales a corto plazo o beneficios sociales a la larga. Algunos periodistas aluden a este dilema para exponer cuestiones de análisis político, por ejemplo, la negociación en el País Vasco, los intereses donde se sustituye una relación de amistad por una transacción como en el caso de Thatcher y Pinochet, o la financiación de los partidos políticos donde la tentación de conseguir una mínima ventaja sobre los rivales, es lo que hace que asuman riesgos e incumplan la ley, financiándose ilegalmente.

Si se participa en el juego anterior una sola vez, la mejor opción no es la misma que si nos vemos obligados a participar repetidamente en el juego. Sobre esta idea, Robert Axelrod (1986) propuso una competición entre las diferentes propuestas estratégicas dadas por especialistas de varios campos, algo así como un torneo de ajedrez por ordenador. Sorprendentemente, la estrategia ganadora fue la de "ojo por ojo", cuya idea básica yace en la buena voluntad inicial del jugador, al cooperar por norma en el primer enfrentamiento, y no hacerlo en los siguientes enfrentamientos, si el otro no cooperara al principio.

Pero la estrategia "ojo por ojo" presenta un fallo que es no tener en cuenta los errores. En la vida real, las personas y los animales yerran a menudo al no reconocer a un posible amigo o al devolver bondad por maldad. "Ojo por ojo" se puede ver abocado a una espiral de violencia de la que no puede escapar, a no ser que olvide y perdone alguna vez. Surge así, una nueva estrategia: "ojo por ojo generoso", la cual olvida las afrentas, por ejemplo, una de cada tres, y que resulta vencedora al enfrentarse a las otras estrategias (Muy Interesante, abril 1998). En este sentido, recientes investigaciones sobre el comportamiento humano han comprobado que la cooperación es intrínsecamente placentera para el cerebro humano. En el artículo *Condenados a cooperar* (El País, 11.08.2002) se afirma que esto es como una especie de trampa de placer que nos ha tendido la evolución para garantizar que nuestro comportamiento sea biológicamente sensato.

Diseño y desarrollo de una experiencia

A) Objetivos de la Experiencia

El objetivo principal de esta experiencia es utilizar conceptos propios de la Teoría de Juegos para desarrollar contenidos de carácter formativo, potenciando valores de justicia, cooperación, convivencia democrática, etc. Se desea ver que los alumnos de Secundaria asimilan la competitividad en las situaciones cotidianas, y que consideran la cooperación como una salida de las situaciones de conflicto. Al mismo tiempo se trabajan y refuerzan contenidos propios de las Matemáticas como son: tablas, matrices, resolución de problemas, búsqueda de estrategias, y representaciones en árbol.

A nivel del currículo de Matemáticas, el concepto de *matriz* se puede introducir, como una prolongación de la idea de *tabla*, dotándolo, así, de un nuevo significado, distinto del que, hasta hace poco, lo caracterizaba. Y más específicamente, en el Bachillerato de Ciencias Sociales, los juegos de suma nula sin Puntos de Equilibrio permiten introducir herramientas del tipo probabilístico para la selección de la estrategia mixta de cada jugador, y utilizar la Programación Lineal para hallar la proporción exacta en la que se deben usar las estrategias puras que conforman la mixta.

La búsqueda de las estrategias óptimas, a través del desarrollo de situaciones donde los individuos actúan de manera racional, hace que el alumno desarrolle capacidades relacionadas con la *resolución de problemas* y, como consecuencia, la construcción del *pensamiento estratégico* necesario. Una herramienta importante en este desarrollo es la elaboración de *árboles*, que ayudan a visualizar todas las posibles elecciones de ambos individuos.

El objetivo principal de este trabajo es llegar a emplear esta nueva Teoría para transmitir a los alumnos experiencias de cooperación y convivencia utilizando las Matemáticas, siendo la finalidad última, poder aplicar estos resultados a la realidad diaria del centro educativo.

Desde el Diseño Curricular Base de Secundaria (MEC, 1989) se señala como la educación para la convivencia, para la cooperación y la democracia ha de estar presente en toda la enseñanza obligatoria, alcanzando su plenitud en la Secundaria, y proporcionando a los alumnos el conocimiento social necesario para desenvolverse como ciudadanos responsables. Para este fin, el currículo introduce los llamados Temas Transversales, que abarca una serie de contenidos, actitudes y procedimientos, no incluidos en ningún área en concreto, pero de los que participan todas. De entre estos temas, cabe destacar, la *Educación para la paz*, que promueve actuaciones del alumnado donde se elimine la violencia de cualquier tipo y género; y la *Educación moral y cívica*, que pretende que el alumno cree su propio juicio moral y desarrolle, entre otras, una capacidad de diálogo crítico y creativo que le permita definir acuerdos y normas de convivencia justas y democráticas. Por otra parte, existe una demanda creciente desde el profesorado sobre actuaciones que lleven a la resolución pacífica de los conflictos que se viven en el aula. Parte de la violencia dominante en nuestra sociedad actual se traslada a los centros escolares, provocando situaciones de gran conflictividad y de inseguridad para toda la comunidad educativa. De ahí que una de las necesidades e inquietudes de la educación en estos momentos sea la Educación para la Convivencia.

B) Diseño de la experiencia

Para el desarrollo de esta experiencia se propusieron cuatro actividades relacionadas con contenidos propios de Teoría de Juegos. La primera actividad presenta una situación de conflicto puro en un juego bipersonal de suma cero con Punto de Equilibrio, una situación no cooperativa, con el objetivo de encontrar la solución estable para el juego. La segunda también presenta juegos bipersonales de suma cero, situaciones no cooperativas, centrándose en la construcción de las matrices de pago, pero sin dar la solución para este tipo juegos pues se escapa de los contenidos del área en esta etapa. La tercera presenta una situación no cooperativa a través de un juego bipersonal de suma no nula, que se centra en que el alumno resuelva la situación con la construcción de árboles de decisión. Por último, en la cuarta actividad, desarrollamos una situación de juego a través de una versión del Dilema del Prisionero, basada en un artículo publicado en el diario El País (14.04.2000) sobre el asesinato de un joven en la Villa Olímpica de Barcelona, y cómo se obtuvieron las confesiones de los sospechosos.

Participaron en la experiencia diez alumnos de entre 15 y 17 años (4º ESO – 2º Bachillerato), de distintos centros educativos de la provincia de Santa Cruz de Tenerife. En este trabajo nos centramos en el análisis de la primera de estas actividades. A los alumnos se les presentó la actividad tras una breve introducción histórica, pero sin anticipar lo que en ella debían realizar. En términos generales, toda explicación se limitó a la aclaración de términos y de determinadas situaciones, aunque hubo casos en los que las explicaciones fueron un poco más allá.

C) Descripción y análisis de la experiencia

La actividad presenta una situación de conflicto puro en la que el beneficio de uno de los jugadores es el perjuicio del otro. Es un problema práctico que se conoce generalmente como "juego de negocio", y es una representación simplificada de las pérdidas y ganancias de dos comerciantes rivales que compiten entre sí. Cada comerciante tiene información acerca de sus ventas y en base a ella decidirá su estrategia. La intención es que la estrategia empleada maximice sus propias ganancias y minimice las de su rival.

La situación de conflicto que se les presentó a los alumnos es la siguiente (NCTM, 1991): Los habitantes de una población se gastan mensualmente 10000 euros en salir a comer fuera. Los empresarios dueños de los dos restaurantes de la zona, Parrilla Antonio y Casa Bruno, compiten por alcanzar los máximos beneficios, introduciendo distintas estrategias para atraer a los clientes. Esas estrategias consisten en no hacer *nada*, añadir un plato *nuevo* al menú, ofrecer una oferta *especial* u obsequiar con un *postre* gratis. El reparto de beneficios viene dado por las entradas de una *matriz de pago*, que reflejan la diferencia en miles de euros entre las ganancias de Antonio y las de Bruno, dependiendo de las estrategias que cada cual elija:

		Casa Bruno			
		Nada	**Nuevo**	**Especial**	**Postre**
Parrilla Antonio	**Nada**	2	-3	-6	-4
	Nuevo	-3	4	-2	0
	Especial	5	2	6	1
	Postre	7	-2	-2	-1

Así, un *pago* de 2 en la matriz, da unos beneficios de 6000 euros para Antonio y 4000 para Bruno.

Este tipo de situaciones, juegos de suma cero, se resuelven aplicando el Teorema del Maximin, es decir, cada jugador intenta maximizar sus beneficios al mismo tiempo que minimiza sus pérdidas. Para Antonio, $max_i\ [min_j\ a_{ij}]$ = max [- 6, - 3, 1, -2] = 1, y para Bruno $min_j\ [max_i\ a_{ij}]$ = min [7, 4, 6, 1] = 1. En este caso, al coincidir ambos resultados, decimos que el juego tiene un Punto de Equilibrio que se alcanza cuando Antonio escoge Especial y Bruno un Postre gratis, siendo 1 el valor del juego.

Para llegar a este resultado con los alumnos, se consideró conveniente evitar el dar el método de resolución desde un principio, prefiriendo introducir pautas que construyeran las ideas principales para el desarrollo del juego.

Lo primero que se intentó comprobar fue que los alumnos eran capaces de leer correctamente la tabla, y que habían comprendido el significado de los valores que aparecen en ella. Cuando se les preguntó por las ganancias de cada dueño, al introducir Antonio un plato nuevo y Bruno un postre gratis, ninguno tuvo problemas en dar una contestación válida: dando el valor numérico de esa ganancia: 5000 euros; o haciendo afirmaciones del tipo: *"... la diferencia de ganancias entre los valores es 0,* *entonces se dividen a la mitad los beneficios"*. Posteriormente, sin embargo, algunos interpretaron erróneamente los valores de la tabla, hablando de *"... 2000 euros de beneficio..."* y no de diferencia entre los beneficios, o simplemente de *"... un beneficio de 6"*.

A continuación, se les fue instruyendo en las ideas que habrían de tener en cuenta en una elección correcta dentro de los márgenes de la Teoría de Juegos. Hablamos primero de estrategias, como una forma de ver el juego desde un ámbito general, y planteamos la pregunta que ha de mover el desarrollo de la actividad: *"¿qué estrategia debería escoger (Antonio)?"* Aunque no se trata de una cuestión pensada para ser contestada, siete de los alumnos lo hicieron, pero dándole distintas interpretaciones a la misma. Hay alumnos que localizan la mejor estrategia general (estrategia dominante) de Antonio: *"elegir el plato especial"*, y aclaran esta elección con frases del tipo: *"... siempre ganará más que Bruno, independientemente de su estrategia"*, *"... en cualquiera de los casos que elija Bruno él saca cierto beneficio"*. Otros alumnos describieron la situación más favorable de Antonio teniendo en cuenta las posibilidades de Bruno (Antonio: Postre; Bruno: Nada), y la mejor situación de Antonio en cada una de sus estrategias teniendo en cuenta las de Bruno. Además, estas respuestas no se excluyen, y hay un alumno que al mismo tiempo da la mejor estrategia general y la situación más favorable para Antonio condicionada a las actuaciones de Bruno.

En las dos cuestiones siguientes, mostramos claramente nuestro interés en que vean el *juego* como una elección de estrategias, además dejamos entrever una idea importante en la Teoría de Juegos, como es la eliminación de las estrategias dominadas. Es la idea que subyace detrás de preguntar por las estrategias que no les convienen a cada empresario, obteniendo distintas interpretaciones. Hay alumnos que localizan la peor estrategia general de Antonio: *"no hacer nada"*; y quienes dan la situación menos ventajosa teniendo en cuenta la actuación de Bruno (Antonio: Nada; Bruno: Especial). Sin embargo, al mirar las respuestas para Bruno, y aunque obtenemos el mismo tipo de análisis, nos encontramos con otro problema: la interpretación errónea de los valores de la tabla. Por ejemplo, un alumno escoge *"poner un especial"*, pues tiene el mayor número de valores negativos, sin darse cuenta que éstos son positivos para Bruno.

Por último, cabe destacar la actuación de uno de los alumnos en ambas cuestiones, pues no sólo localiza la peor estrategia y da una razón de la elección, sino que además, busca otra estrategia en las mismas circunstancias y a través de ella refuerza su respuesta: *"Si no hace nada tiene muchas posibilidades de perder en 3 de las cuatro opciones, y se pierde* *más dinero que en el caso de postre que también pierde 3 de 4".*

En las dos cuestiones próximas tratamos que los alumnos lleguen, primero, a ver y construir por si mismos las alternativas más beneficiosas para cada empresario en cada momento, y segundo, y más importante, que se den cuenta que en la situación que se les presenta, siempre se llega a un punto en el que cualquier movimiento de los empresarios no supone beneficios sino pérdidas. Partiendo de la situación más ventajosa de Antonio (Antonio: Postre; Bruno: Nada), y preguntados por la mejor réplica de Bruno, así como de la contrarréplica posterior de Antonio, todos aciertan a sugerir un cambio de Bruno hacia su estrategia *"Especial"*, así como la respuesta de Antonio cambiando también a *"Especial"*. Sin embargo, ante la cuestión de si seguirían cambiando de estrategias indefinidamente las respuestas son bastante dispares. Dos alumnos afirman que seguirán así a no ser que lleguen, por casualidad o acuerdo, a la situación (Antonio: Nuevo; Bruno: Postre) en la que se reparten los beneficios. Es curiosa esta forma de pensar, sobre todo al tratarse de una situación de conflicto puro. Quizás sólo ven la solución más sencilla que conformaría a ambos empresarios, o quizás es la idea de repetición del enfrentamiento (mes tras mes) lo que les hace proponer, sin saberlo, la solución cooperativa del Dilema del Prisionero. Por otro lado, cinco alumnos opinan que llegará un momento en el que no les conviene seguir cambiando: *"...se seguirá cambiando, hasta que se llegue a la estrategia que más convenga, aunque esta estrategia estaría en pro de uno pero en contra del otro"*. Sin embargo, sólo dos miran la tabla y estudian las siguientes alternativas de los empresarios, dándose cuenta que una vez llegada a la situación (Antonio: Especial; Bruno: Postre), cualquier cambio de estrategias por parte de ambos sólo supondría pérdidas. Además, un alumno propone que Antonio se ha de mantener fiel a su mejor estrategia general (Especial), y que sea Bruno quien de alguna manera mejore sus beneficios. A continuación se les propuso dos situaciones como la anterior, pero comenzando en posiciones distintas. Sólo tres de los alumnos van más allá de la primera confrontación entre los empresarios, dando las respuestas posibles de cada uno en cada momento, y dos de ellos dan con el Punto de Equilibrio. El resto de los alumnos se limita a dar las ganancias de cada uno o a sugerir cambio de estrategias, por ejemplo: *"En cada uno de los casos sus estrategias no serían las más beneficiosas, por lo tanto Antonio y Bruno deberían cambiarlas"*.

Hasta ese punto se había conducido la actividad sobre una base de pensamiento "optimista", en la que se intenta sacar el máximo beneficio. Pero esa forma de actuar no es, sin embargo, la más eficiente. Aparece ahora, a través del "pesimismo" el Teorema de Maximin, basándonos en el siguiente pensamiento de Antonio:

Bruno intentará que yo gane lo menos posible.

Para ello mirará mis ganancias y escogerá su opción que me dé menos dinero. Teniendo en cuenta esto, yo deberé escoger de esas malas opciones, aquella que me dé el mejor beneficio.

Se les propone buscar la mejor de las peores situaciones de los empresarios para cada una de sus estrategias, a través del máximo de los mínimos de las filas para Antonio y del mínimo de los máximos de las columnas para Bruno.

		Casa Bruno				
		Nada	**Nuevo**	**Especial**	**Postre**	**Mín fila**
Parrilla Antonio	**Nada**	2	-3	-6	-4	**-6**
	Nuevo	-3	4	-2	0	**-3**
	Especial	5	2	6	**1**	**1**
	Postre	7	-2	-2	-1	**-2**
	Máx col	**7**	**4**	**6**	**1**	

Ninguno de los alumnos tiene problemas en hallar esos valores y la estrategia a la que acompaña. Además, dos de ellos adelantan el Punto de Equilibrio. Por último, se les pregunta de manera específica por las opciones finales de Antonio y Bruno, es decir, por el Punto de Equilibrio, contestando correctamente siete alumnos. Pero cuando se les pide comparar el resultado con el obtenido anteriormente, sólo lo hacen tres, siendo dos de ellos los que había localizado el Punto de Equilibrio en las primeras cuestiones.

Se presentan, como ejercicios, otras cuatro matrices de pago con la idea de que calculen el Punto de Equilibrio. Las tres primeras tienen Punto de Equilibrio y la cuarta no. La mayoría de los estudiantes no tiene problema con las primeras, pero en la última sólo dos dicen claramente que no existe el Punto de Equilibrio y cuatro hallan el maximin y el minimax pero no añaden ninguna aclaración para justificar su respuesta.

A modo de resumen, podemos decir que los alumnos no tuvieron dificultades al interpretar la matriz de pago, así como a realizar con ella las operaciones necesarias para el desarrollo de la actividad. Además, las interpretaciones que hacen sobre el concepto de estrategia están, en general, bien desarrolladas y estructuradas dentro de los márgenes de la

Teoría de Juegos. Sin embargo, cuando se intenta que, desde una situación inicial, lleguen al Punto de Equilibrio a través de las decisiones sucesivas de los jugadores, tienen dificultades para ir más allá del primer enfrentamiento. Aunque, en nuestra opinión, esta dificultad desaparecería o disminuiría si se les explicara, brevemente, como se siguen sobre la matriz las posibles opciones de los jugadores.

Esto ha sido sólo una experiencia piloto y nos gustaría pensar que a los alumnos que han participado en esta experiencia les ha quedado en la mente que cuando negocian con alguien, sus intereses y necesidades están en contraposición con los de su oponente, pero que todo conflicto entre humanos tiene una vía dialogada y negociadora de arreglo. Para ello hay que aprender que el otro es un semejante con el que la cooperación es más fructífera que la confrontación.

Bibliografía

Axelrod, R (1986): *La evolución de la cooperación*. Alianza Universidad. Madrid.

COMAP (1999): *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley/ Universidad Autónoma de Madrid.

NCTM (1991): *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12*. NCTM Yearbook. USA.

Martinón, A. (Editor) (2000): *Las matemáticas del siglo XX*. Sociedad Canaria Isaac Newton y Nivola, S.L. Tenerife.

Poundstone, W. (1995): *El Dilema del Prisionero.* Alianza Editorial. Madrid.

Ríos, S. (1995): *Modelización*. Alianza Universidad. Madrid.

Ana Teresa Antequera Guerra. Licenciada en Matemáticas
Mail: antegue@hotmail.com

María Canderia Espinel Febles. Profesora Titular de Universidad del Área de Didáctica de la Matemática
Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna
Mail: mespinel@ull.es