El concepto estadístico de centro de gravedad

Gabriel Ruiz Garzón

Resumen

El objetivo de este trabajo es establecer una propuesta didáctica consistente en relacionar el concepto estadístico de centro de gravedad de una distribución de frecuencias bidimensional con el concepto físico y geométrico del mismo nombre. Las coordenadas del centro de gravedad son medias aritméticas, lo que nos permitirá visualizar algunas propiedades de la media aritmética.

Abstract

The aim of this paper is to establish a didactic proposal consisting of relating the statistical concept of the centre of gravity of a distribution of bidimensional frequencies to the physical and geometrical concept of the same name. The coordinates of the centre of gravity are arithmetic means, this allows us to visualize some properties of the arithmetic mean.

Introducción

La relación entre la Mecánica y las Matemáticas data de la época de Arquímedes de Siracusa (287-212 a. de C.). Su célebre frase: "*Dadme un punto de apoyo y moveré la Tierra*", surgió de la emoción de encontrar la demostración de las leyes de la palanca. Estas leyes forman parte de su tratado "*Sobre equilibrios de planos*", en el cual se ocupa también del cálculo de centros de gravedad de diversas figuras planas. Otros matemáticos griegos, como Herón o Pappus, también ligaron demostraciones matemáticas a construcciones mecánicas. Más tarde, Paul Guldin (1577-1643), redescubriría alguno de los teoremas demostrados por Pappus.

Sin embargo, a lo largo de los años, algunos conceptos matemáticos han perdido su significado físico o aparecen en los manuales como hechos consumados y sin un mero bagaje que explique su denominación y su génesis histórica.

Este artículo viene a rellenar esta laguna relacionada con el concepto estadístico de *centro de gravedad*, concepto que raramente se presenta a través de su génesis en el mundo de la Mecánica y la Física, y nos exhorta, siempre que se pueda, a buscar la transversalidad en nuestras clases. Indiscutiblemente, un concepto queda más arraigado en la cabeza de nuestros alumnos si se explica a través de diversas áreas: Física, Geometría y Estadística. Si en tiempos de los griegos, muchos resultados matemáticos se demostraban utilizando artificios mecánicos, hoy, en el umbral del siglo XXI, Física, Geometría y Estadística deben confluir al servicio de una mejor didáctica de nuestra amada Ciencia Matemática.

Entre centros y medias

Una distribución de frecuencias bidimensional surge cuando de una población se estudian simultáneamente dos caracteres X e Y. Representaremos genéricamente la distribución por (x_i, y_j, n_{ij}). Pongamos el siguiente ejemplo numérico:

Ejemplo 1:

x_i	y_j	n_{ij}
0	0	3
2	1	1
2	2	3
3	2	1
3	3	2
5	3	2

En el caso bidimensional, la representación gráfica más utilizada consiste en representar en un diagrama cartesiano cada pareja de valores mediante un punto. Luego, la distribución vendrá representada por un conjunto de puntos que recibe el nombre de *nube de puntos o diagrama de dispersión*. Cuando una pareja de valores está repetida, junto a la representación del punto correspondiente se indica el valor de su frecuencia. (figura 1).

Mediante la *regresión simple* se trata de poner de manifiesto la estructura de dependencia existente entre una variable dependiente a través de otra independiente con la que se supone que está relacionada. La regresión será lineal cuando la curva de regresión obtenida sea una recta. Utilizando el método de mínimos cuadrados somos capaces de calcular la recta de regresión de Y sobre X, es decir, la que explique la Y en función de la X,

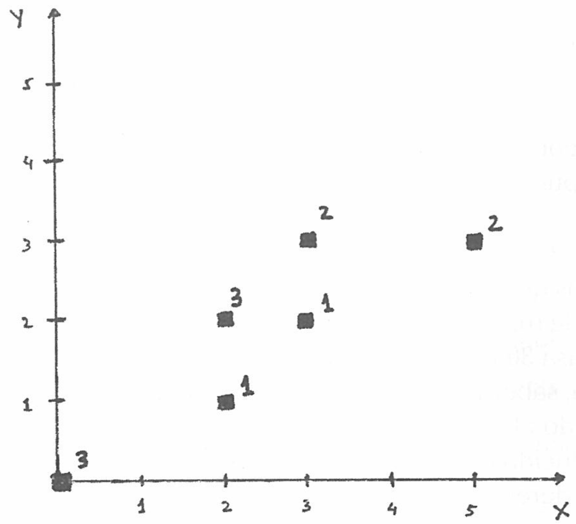


Figura 1

$$r_{Y/X} \equiv y - \overline{y} = \frac{S_{XY}}{S_X^2}(x - \overline{x})$$

y la recta de X sobre Y, que nos hablará del comportamiento de X para cada valor de Y

$$r_{X/Y} \equiv x - \overline{x} = \frac{S_{XY}}{S_Y^2}(y - \overline{y})$$

En nuestro ejemplo dichas rectas son:

$$r_{Y/X} \equiv y - \frac{7}{4} = \frac{83}{129}\left(x - \frac{9}{4}\right)$$

$$r_{X/Y} \equiv x - \frac{9}{4} = \frac{83}{65}\left(y - \frac{7}{4}\right)$$

Estas dos rectas, se cortan en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, en nuestro caso, (9/4, 7/4), que recibe el nombre de *centro de gravedad de la distribución*. ¿Pero por qué este nombre?. Indagaremos en el mundo de la Física el porqué de esa denominación. Su búsqueda constituirá el objetivo de este trabajo.

El concepto físico de *masa* se considera como una medida de la cantidad de materia de un cuerpo. Dada una masa m que se halla a una distancia x de un punto P, entonces el momento de m respecto de P viene dado por

$$Momento = m.x$$

Ilustremos con un ejemplo el concepto de momento de una masa respecto a un punto.

Ejemplo 2:

Supongamos que tenemos un columpio, en un asiento se sienta un niño de 20 kilos de masa a 2 metros a la izquierda del punto de apoyo P y otro niño, de masa 30 kg se sienta también a 2 metros a la derecha de P. Por experiencia, sabemos que el columpio comenzará a girar en sentido horario, bajando al niño más pesado. Este giro se produce porque el momento producido por el niño de la izquierda es menor que el producido por el de la derecha:

Momento izquierdo: (20)(2)=40

Momento derecho: (30)(2)=60

Para que el columpio esté en equilibrio, los dos momentos deben ser iguales. Por ejemplo, si el niño más pesado se mueve a una posición alejada 4/3 de metro del punto de apoyo, entonces el columpio oscilará, ya que ambos niños producirán los mismos momentos.

En general, si suponemos que el punto de apoyo es el origen de una recta real y si suponemos que se colocan varias masas puntuales sobre ese eje de abcisas, la medida de la tendencia de este sistema a girar alrededor de P se conoce como *momento respecto al origen* y se define como

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$$

Si $M_0 = 0$ entonces el sistema se dice que está en *equilibrio*. Para un sistema que no está en equilibrio, definimos el centro de masas como el punto en donde habría que colocar el punto de apoyo para obtener el equilibrio. Si se trasladase el sistema x_G unidades y puesto que el momento del sistema trasladado debe ser nulo, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_G) m_i = 0$$

Despejando x_G tenemos

$$x_G=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\frac{M_0}{m}=\frac{\textit{momento del sistema respecto al origen}}{\textit{masa total del sistema}}=\bar{x}$$

Luego observamos que el centro de masas coincide con una media aritmética.

La condición de equilibrio del sistema es equivalente, hablando estadísticamente, supuestos los pares (x_i, m_i) como provenientes de una distribución unidimensional, siendo x_i los valores de una variable y m_i sus frecuencias ordinarias asociadas, a la condición de que:

"*La suma de las desviaciones de los valores de la variable respecto a su media es cero*".

Mejor que definir el momento de una masa, definimos el momento de una fuerza. En este contexto, se conoce al centro de masas como *centro de gravedad*. Supongamos que un sistema de masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$ está localizado en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Entonces, al ser la fuerza igual a la masa por la aceleración, la fuerza total del sistema es

$$F=m_1a+m_2a+\cdots+m_na=ma$$

El momento respecto al origen viene dado por

$$T_0=(m_1a)x_1+(m_2a)x_2+\cdots+(m_na)x_n=M_0a$$

Y el centro de gravedad es

$$\frac{T_0}{F}=\frac{M_0a}{ma}=\frac{M_0}{m}=\bar{x}$$

Por tanto,

"*El centro de gravedad y el centro de masas están en el mismo lugar*".

A lo largo de este artículo, utilizaré indistintamente ambos conceptos debido a su coincidencia.

Podemos extender el concepto de momento a dos dimensiones, considerando un sistema de masas puntuales $m_1, m_2, \ldots, m_n$ situadas en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ respectivamente. Pero en lugar de definir un único momento (con respecto al origen), definimos dos momentos, uno respecto al eje x, y otro respecto al eje y.

El *momento respecto del eje y es* $M_Y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i$

El *momento respecto del eje x es* $M_X = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i$

El centro de masas o centro de gravedad viene dado por (X_G, Y_G), donde sus coordenadas son

$$x_G = \frac{M_Y}{m} = \overline{x} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{M_X}{m} = \overline{y}$$

siendo $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ *la masa total del sistema.*

Nuevamente, las coordenadas del centro de gravedad (x_G, y_G), coinciden con sendas medias aritméticas $(\overline{x}, \overline{y})$.

Si en el anterior ejemplo 1, consideramos la distribución de frecuencias como un sistema de masas bidimensional donde las masas puntuales son las frecuencias conjuntas, tendremos que:

Momento respecto al eje Y:

$$M_Y = 0(3) + 2(1) + 2(3) + 3(1) + 3(2) + 5(2) = 27$$

Momento respecto al eje X:

$$M_X = 0(3) + 1(1) + 2(3) + 2(1) + 3(2) + 3(2) = 21$$

Masa total del sistema = $m = 3 + 1 + 3 + 1 + 2 + 2 = 12$

Por tanto, las coordenadas del centro de gravedad son

$$x_G = \frac{M_Y}{m} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{M_X}{m} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

Luego,

"El centro de masas (centro de gravedad) es el punto $(x_G, y_G) = (\overline{x}, \overline{y}) =$ *(9/4,7/4), que coincide con el punto de corte de las dos rectas de regresión, es decir, el centro de gravedad de la distribución de frecuencias".*

El objetivo principal de este artículo se ha logrado y didácticamente, es incomprensible hurtar al alumnado de la anterior explicación.

Hasta aquí hemos supuesto que la masa total del sistema se encuentra distribuida en puntos discretos de un plano o de una recta. Ahora consideramos una placa plana de un material de densidad uniforme, la llamaremos *lámina*. Intuitivamente, vemos que el centro de gravedad (x_G, y_G)de la lámina es su punto de equilibrio. Así, el centro de gravedad de una lámina circular es el centro del círculo, y el centro de gravedad de una lámina rectangular está situado en el centro del rectángulo.
Salvo que la forma de la lámina sea muy complicada, podemos determinar su centro de gravedad por una integración ordinaria en una variable.

Consideremos una lámina plana de contornos irregulares y densidad uniforme ρ , limitada por la función $y = f(x)$, el eje de abcisas y $a \leq x \leq b$, como se ve en la figura 2:

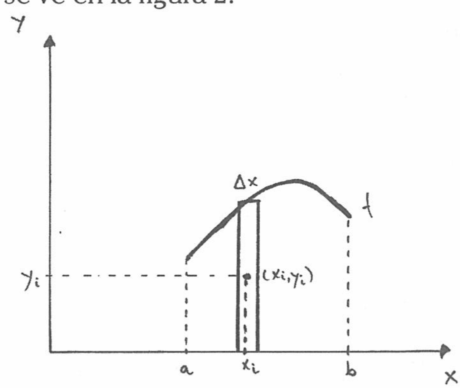


Figura 2

La masa de esta región viene dada por:

$$m = (densidad)(área) = \rho \int_b^a f(x)\, dx = \rho\, A$$

donde A es el área de la región.

Para hallar el centro de masas de esta lámina, partimos el intervalo [a,b] en n subintervalos iguales de anchura Δx . Si x_i es el centro del i-ésimo subintervalo, entonces podemos aproximar la porción de lámina situada en él por un rectángulo cuya altura es $f(x_i)$. Por ser la densidad del rectángulo ρ , sabemos que la masa es

$$m_i = (densidad)(área) = \rho\, f(x_i)\Delta x$$

A continuación, consideramos que esta masa está situada en el centro del rectángulo.

Sabemos que la distancia del eje x a (x_i, y_i) es $y_i = \dfrac{f(x_i)}{2}$, por lo que el momento de m_i respecto del eje x es

$$momento = (masa)(distancia) = m_i y_i = \rho\, f(x_i)\Delta x\left(\frac{f(x_i)}{2}\right)$$

Sumando estos momentos y tomando límite cuando $n \to \infty$, podemos definir el momento respecto del eje x por

$$M_X = \rho\int_a^b (f(x)/2) f(x)\,dx$$

Para el momento respecto al eje y, la distancia desde el eje a (x_i, y_i) es x_i y tenemos que

$$M_Y = \rho\int_a^b x f(x)\,dx$$

Por tanto, las coordenadas del centro de gravedad (x_G, y_G) de una lámina de densidad uniforme limitada por la función $y = f(x)$, $a \le x \le b$ son:

$$x_G = \frac{\int_a^b x\, f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \qquad y_G = \frac{1/2\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

La densidad ρ es factor común del momento y de la masa, razón por la cual se cancela en el cociente y no aparece en las coordenadas del centro de gravedad. Con esto queda demostrado que el centro de gravedad de una lámina de densidad uniforme depende sólo de la forma de la lámina, no de su densidad.

Reseñaremos que:

"*La abscisa x_G es la esperanza matemática de una variable aleatoria X con función de densidad f(x), cuando el número de valores considerados es suficientemente grande. La versión de la abscisa x_G en el caso discreto, nos hace ver la idoneidad de la expresión masa de probabilidad o de función masa de probabilidad*".

Una aplicación interesante de las anteriores fórmulas consiste en calcular el centro de gravedad de un triángulo rectángulo de altura h, base b y ángulo recto en el origen de coordenadas.

Como la hipotenusa está en la recta $y = \dfrac{-h}{b}x + h$, luego

$$x_G = \frac{\int_0^b x\, f(x)\, dx}{\int_0^b f(x)\, dx} = \frac{\int_0^b \left(-\frac{h}{b}x^2 + hx \right) dx}{\int_0^b \left(-\frac{h}{b}x + h \right) dx} = \frac{\frac{1}{6}b^2 h}{\frac{1}{2}bh} = \frac{1}{3}b$$

$$y_G = \frac{1/2\int_0^b f^2(x)\, dx}{\int_0^b f(x)\, dx} = \frac{1/2\int_0^b \left(\frac{h^2}{b^2}x^2 - 2\frac{h^2}{b}x + h^2 \right) dx}{\int_0^b \left(-\frac{h}{b}x + h \right) dx} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh} = \frac{1}{3}h$$

Si recordamos que el centro de gravedad de un triángulo se llama baricentro y es el lugar donde se cortan las tres medianas, hemos demostrado que:

"Las coordenadas del centro de gravedad del triángulo son (b/3,h/3) y que la distancia de cada vértice al baricentro es 2/3 de la distancia del vértice al punto medio del lado opuesto."

Si recortamos un triángulo de cartón y hacemos pasar un hilo anudado en un extremo por el baricentro, observamos que el triángulo se mantiene en posición horizontal o de equilibrio, cosa que no ocurre si el hilo se pasa por otro punto distinto al baricentro.

Para regiones planas simples, algunas veces es posible hallar el centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y})$ sin recurrir a la integración, aprovechando la simetría, es decir, si una región posee un eje de simetría, el centro de gravedad pertenece a dicho eje, y la aditividad, si una región de área A está formada por un número finito de partes de áreas $A_1, \ldots , A_n$ y centros de gravedad, se verifica que

$$x_G = \bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \ldots + \bar{x}_n A_n}{A}$$

$$y_G = \bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \ldots + \bar{y}_n A_n}{A}$$

Estas fórmulas tienen su reflejo en la Estadística:

Si de un conjunto de valores, obtenemos n conjuntos disjuntos con frecuencias $n_i, \quad i = 1, \ldots, n$ *, la media aritmética de todo el conjunto se relaciona con todas las medias aritméticas de los diferentes subconjuntos de la siguiente manera*

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 n_1 + \ldots + \bar{x}_n n_n}{n_1 + \ldots + n_n}$$

Otra manera de encontrar las coordenadas de un centro de gravedad, es hacer uso de un teorema, que se cree debido a Pappus de Alejandría (300 a. de C.), matemático griego en cuya Colección Matemática se encuentra. Dicho teorema fue redescubierto por Paul Guldin (1577-1643), y que dice así:

"*El volumen engendrado por un área plana al girar alrededor de un eje situado en su plano es igual al producto de la superficie de dicha área por la longitud de la circunferencia que describe el centro de gravedad del área dada*".

A título de aplicación, se pueden calcular las coordenadas del centro de gravedad del área de un semicírculo de radio R:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} 2\pi y_G \Rightarrow y_G = \frac{4R}{3\pi}$$

Conclusiones

En el presente trabajo se ha mostrado la similitud del concepto físico de centro de gravedad de un sistema de masas bidimensional, con el concepto homónimo de punto de corte de dos rectas de regresión.

Las medias aritméticas son las coordenadas del centro de gravedad, lo que nos ha permitido visualizar algunas de las propiedades de la media aritmética.

Por último, nuestra propuesta didáctica pasa por relacionar el concepto estadístico de centro de gravedad, en la Física y en la Geometría.

Bibliografía

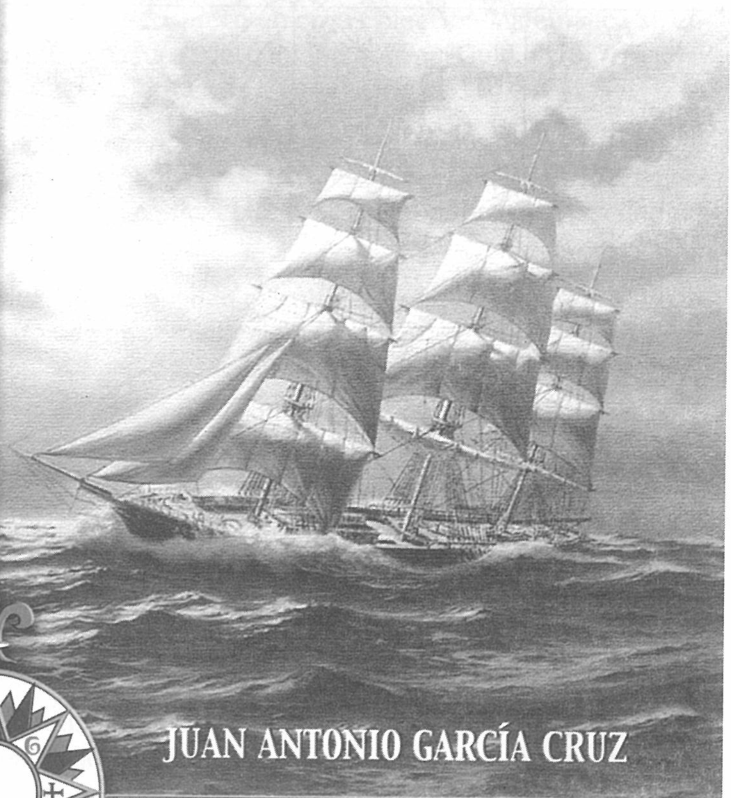
Bronte Abaurrea, R. (1977): *Cálculo Infinitesimal e Integral (Topología)*. Madrid.

Martín Pliego, F.J. (1994): *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial (Teoría y Práctica)*. Ed. AC, Madrid.

Gabriel Ruiz Garzón es profesor en el Departamento de Estadística e I.O. y en la Escuela Universitaria de Estudios Empresariales de la Universidad de Cádiz.
Correo electrónico: gabriel.ruiz@uca.es

CON MOTIVO DEL DÍA ESCOLAR DE LAS MATEMÁTICAS

La Rosa de los Vientos, El Rumbo y La Navegación



JUAN ANTONIO GARCÍA CRUZ

12 de mayo de 2003

DÍA ESCOLAR DE LAS MATEMÁTICAS