Algunas actividades con GEUP

Carmen Galván Fernández

Para tener éxito en geometría, ya sea para crear o simplemente para resolver problemas, se tiene que estar dispuesto a experimentar, dibujar y ensayar innumerables figuras, para probar esto o aquello.

Howard Eves (Estudio de las Geometrías)

Resumen

En este trabajo se desarrollan algunas actividades en las que se utiliza la geometría para ayudar a la comprensión del lenguaje gráfico y el algebraico. Durante el desarrollo de estas actividades en el aula, se intenta fomentar el interés por la observación, la formulación de conjeturas, la experimentación y la comprobación. El uso del GEUP, un programa de geometría dinámica, ha hecho posible que se pudiera experimentar fácilmente y que, en consecuencia, se pudiera avanzar en las investigaciones.

En este trabajo intentaremos desarrollar algunas actividades con las que se pretende mostrar:

- La conveniencia de utilizar, siempre que sea posible, la geometría como fuente de la que surgen infinidad de contenidos numéricos, algebraicos, funcionales... Con el apoyo de la realidad geométrica, visual, los diversos conceptos y propiedades cobran más sentido y, a la vez, se repasan y consolidan propiedades y conceptos geométricos. En los siguientes ejemplos, la geometría será el punto de partida para, estudiando relaciones entre elementos variables de una figura, ayudar a comprender el lenguaje gráfico y el algebraico.
- La intención de practicar día a día, en el transcurso de las clases, el método científico, el método matemático: fomentar la experimentación, la observación, la formulación de conjeturas, la comprobación, la demostración general.
- La utilización de GEUP [1], un programa de matemáticas para Windows, interactivo, como herramienta que facilita al máximo la posibilidad de aplicación del método matemático y que, a la vez, supone un poderoso recurso de motivación.

[1] En internet: http://www.geup.net

Cada año, en el momento de iniciar el estudio de la función polinómica de 2º grado, suelo proponer el siguiente problema. Los propios alumnos le pusieron el nombre: *El problema de la movida de los cuadrados*

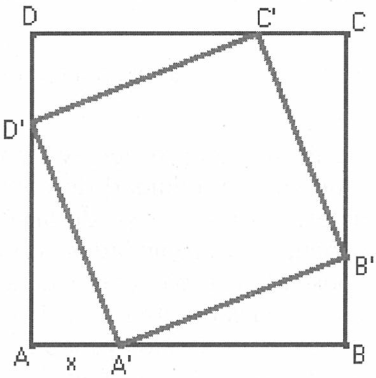
Éste es un ejercicio para realizar en clase, puesto que se trata de ir poco a poco haciendo aparecer consecutivamente los apartados, a medida que los alumnos van resolviendo.

a) Observa que el área de los diferentes cuadrados A'B'C'D' que se pueden inscribir en un cuadrado ABCD depende de x (x=AA'. Si mueves el punto A', cambia x).

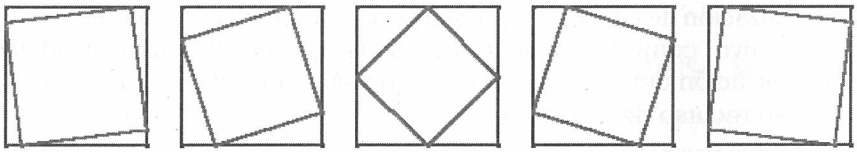
   Para hacer la observación, dibuja varios casos de cuadrados inscritos en un cuadrado de lado l=6, por ejemplo.

   Dejaremos unos minutos para que los alumnos trabajen y continuamos:

b) ¿Entre qué valores puede variar x? ¿Cómo va cambiando el área del cuadrado inscrito a medida que aumenta x ? Describe con tus palabras esta movida.



Siempre hay algún alumno muy ordenado, sistemático y trabajador al que se le ocurre dibujar la movida como si fuera una película de dibujos animados y esto, claro está, favorece enormemente la visualización...



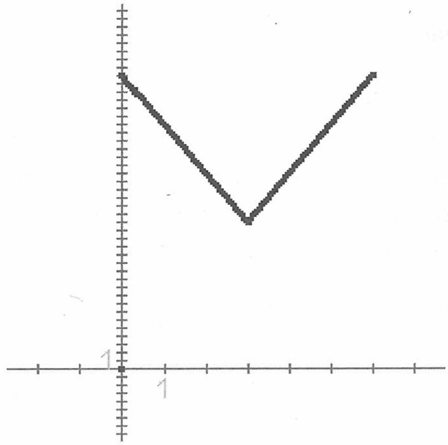
Si x aumenta...

Ahora, todos están dispuestos para describir lo observado.

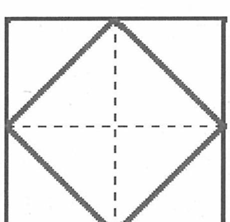
Continuamos:

c) Imagina la gráfica de esta función ¿Te atreves a hacer un dibujo aproximado?

Las conjeturas suelen ser bastante buenas...



Es el momento de asegurar el valor de los puntos extremos (cuando $x = 0$ y cuando $x = 6$) y el valor mínimo de la función, el punto (3 , 18). La demostración visual de que el área del cuadrado inscrito cuando $x = l/2$ es bien sencilla y siempre tendremos alumnos dispuestos a hacerla.



d) Construye una tabla de valores en la que figuren valores entre 0 y 3 y entre 3 y 6 (ten en cuenta la simetría observada). Después, dibuja la gráfica con estos puntos. ¿Es parecida a la que imaginaste?

En este momento empiezan algunas dificultades, pero al fin aparecen dos caminos de resolución: Algunos alumnos aplican el teorema de Pitágoras, otros prefieren restar al área del cuadrado grande los cuatro triángulos de las esquinas. Se construye la tabla, se dibuja la gráfica y se compara con lo previsto. ¡La variación no es lineal!

Finalmente:

e) ¿Cuál es la ley general que rige esta variación? Es decir, encuentra el valor del área y para cualquier valor x.

Cuesta entender el uso de las letras para la generalización, pero al fin comprobamos que las dos formas de resolución conducen a la misma ley, la función polinómica de 2º grado:

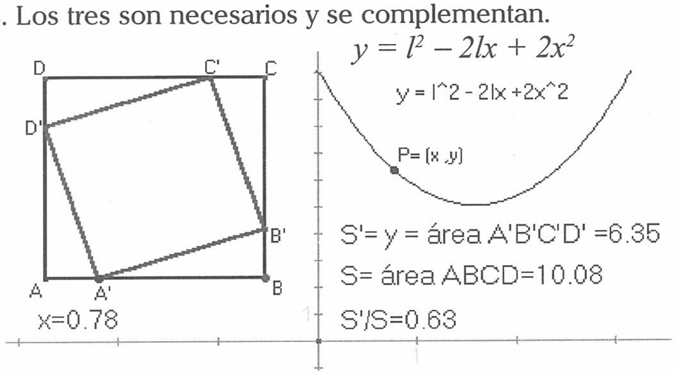
$$y=(6-x)^2+x^2=6^2-2x(6-x)=36-12x+2x^2$$

Para cualquier cuadrado de lado l, el área y de los cuadrados inscritos es:

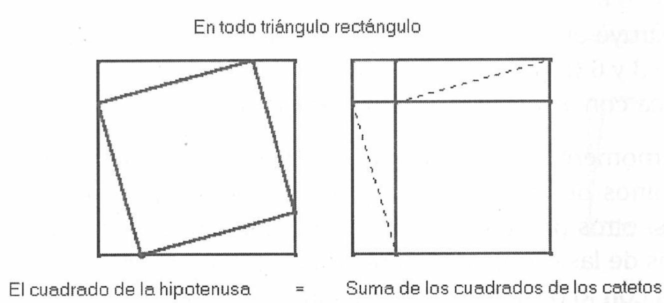
$$y=(l-x)^2+x^2=l^2-2x(l-x)=l^2-2lx+2x^2$$

Valoramos el adelanto que supone obtener la ley general: ¡Ya no tenemos que estar pensando cada caso concreto; con una sencilla operación numérica podemos obtener el área en cada caso concreto!

Para concluir comparamos los tres lenguajes: El geométrico, el gráfico y el algebraico, que describen la misma movida desde puntos de vista diferentes. Los tres son necesarios y se complementan.



Resulta imposible resistir la tentación de mostrar **una demostración visual del teorema de Pitágoras**. ¡Vale la pena aprovechar la ocasión!



Tendremos que ayudar a la comprensión visual, a saber mirar para comprender.

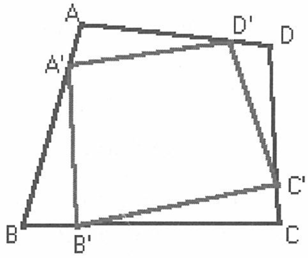
Hasta aquí nada nuevo. Sólo hacer notar que los distintos apartados de la actividad anterior guardan un **esquema general de actuación** que podemos aplicar en nuestras clases, diariamente:

- Observar
- Describir la observación
- Prever
- Actuar, resolver
- Analizar los resultados, comparar con lo previsto
- Generalizar, demostrar, si es posible.

¿Qué ocurre si el problema se generaliza a cualquier cuadrilátero? Al fin y al cabo el cuadrado es un caso muy particular.

El problema sería, ahora, el siguiente: En cualquier cuadrilátero ABCD inscribimos otro A'B'C'D', de forma que AA'/AB= BB'/BC = CC'/CD = DD'/ DA = *r*. Tenemos que observar la variación del área del cuadrilátero inscrito en función de *r*. O, mejor, estudiar la relación entre el área del cuadrilátero inscrito *S'* y el área del cuadrilátero exterior *S* al variar *r*. Es decir: estudiaremos la función *S'/S = f(r)*.

Este problema se podría titular *«La movida de los cuadriláteros»* y se puede, en principio, proponer a los alumnos del mismo modo que la actividad anterior, paso a paso:



a) Observa que el área de los diferentes cuadriláteros que se pueden inscribir en un cuadrilátero ABCD depende de *r*...

Igual que en el caso del cuadrado, esta primera observación es fácil: Si *r* varía entre 0 y 1, el valor de *S'/S* va disminuyendo desde 1 hasta que alcanza el valor mínimo cuando *r* = 0'5 *(¿será en este punto S' la mitad* *de S, como en el cuadrado?)* y a partir de aquí va aumentando hasta llegar de nuevo a valer 1..., pero poco más podremos lograr. ¿Cómo construir una tabla de valores? El cálculo de un solo caso particular se haría bastante difícil para alumnos de este nivel y tardaríamos demasiado en resolver el problema de hallar la función general.

Recurrimos al apoyo de GEUP. ¡Haciendo una sola construcción podemos obtener y visualizar, a partir de ella, todos los casos que queramos sin más que mover adecuadamente los elementos que nos interese! La experimentación se facilita extraordinariamente.

La construcción es sencilla:

Creamos un cuadrilátero ABCD, que podemos modificar si movemos cualquiera de sus vértices. Creamos el segmento AB e insertamos sobre él un punto A', que podremos mover libremente a lo largo de todo el segmento. El cociente entre las medidas de AB y de AA' podemos obtenerlo utilizando la calculadora incorporada y arrastrarlo a la pantalla, para poder utilizarlo cuando sea preciso. Para obtener el punto B' debemos utilizar la herramienta «Punto desplazado según número»:

El punto B será desplazado el número correspondiente al producto de la medida de BC por *r*. De análoga manera obtenemos C' y D'. Podemos ya dibujar el cuadrilátero A'B'C'D'. Moviendo A' sobre AB, ¡*veremos* la movida del cuadrilátero inscrito!

Construyamos la gráfica correspondiente a la función $S'/S = f(r)$:

Al lado de la figura construída creamos unos ejes de coordenadas, con el fin de que sea posible *observar simultáneamente* la movida geométrica y su correspondiente gráfica. Utilizando la herramienta «Punto con coordenadas» creamos el punto P (abscisa = *r*, ordenada = S'/S). La herramienta «Lugar geométrico» permitirá obtener la gráfica que describe el punto P como consecuencia del movimiento del punto A'.

La curva obtenida parece ser una parábola.

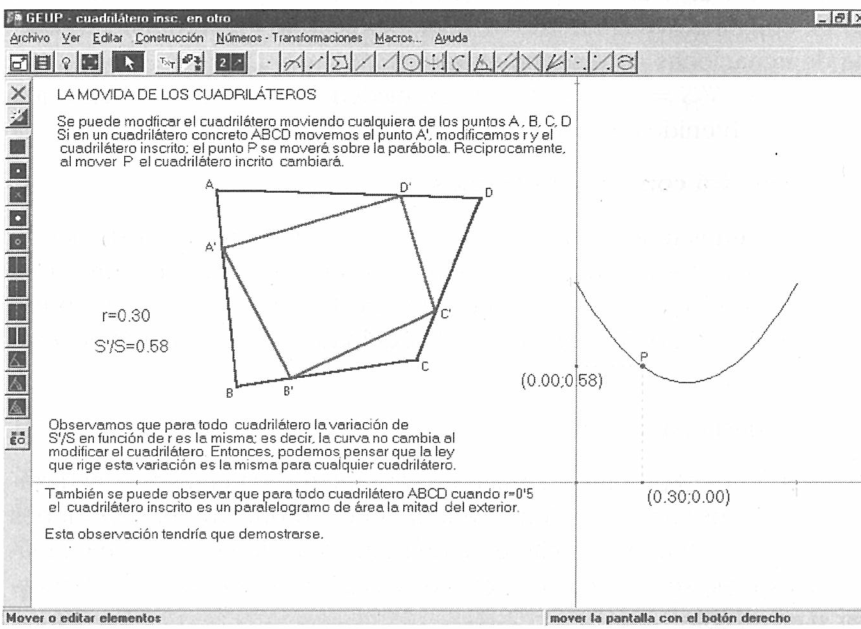
Efectivamente, se puede demostrar geométricamente que la curva responde a la ley $S'/S = 1 - 2r + 2r^2$, pero considerando que esta demostración no estaría al alcance de la mayoría de los alumnos, preferimos orientar la búsqueda de esta ley general por un camino que, creemos, estaría más al alcance de todos. Se plantearía así:

« Se sabe que la ley es de la forma $S'/S = a r^2 + br + c$, hallar a, b, y *c utilizando tres puntos que sepamos seguros de esta parábola».*

Con la costrucción hecha podemos observar la movida de los cuadriláteros:

Por una parte, *para un cuadrilátero concreto,* al mover A' (estamos variando r) observamos cómo varía el cuadrilátero inscrito y el punto P se moverá, en función de él, sobre la gráfica. También podemos mover P y podremos observar cómo va variando, en consecuencia, A'.

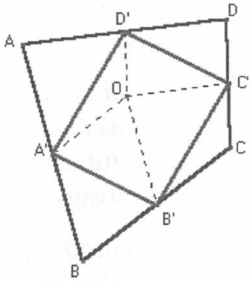
Por otra, ¡*Si modificamos el cuadrilátero* observamos que la curva no varía! Es decir, las coordenadas del punto P son las mismas para cualquier cuadrilátero. ¡Parece ser que todos los cuadriláteros se comportan de la misma manera!



Esto nos hace suponer que, entonces, como ocurre en el caso del cuadrado, cuando $r = 0'5$ el área del cuadrilátero inscrito es la mitad del área del cuadrilátero exterior. ¡*Es una hipótesis que tendremos que demostrar!*. Pero, de ser cierta, el problema de hallar la ley general de variación estaría resuelto: ¡Debe ser la misma que la de la movida de los cuadrados, puesto que la parábola pasa por los mismos puntos!.

Debemos encontrar la forma de asegurar que la vista no nos engaña. *Tenemos que probar que, para cualquier cuadrilátero, el área del cuadrilátero inscrito en el punto medio de sus lados es la mitad del área del primero*. Esta demostración es sencilla. Vemos una demostración visual en la siguiente figura:

A',B',C' y D' son los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD.
Por A',B',C' y D' trazamos paralelas respectivamente a los lados BC, AB, AD y DC. Estas rectas se cortan en O, punto medio de la diagonal AC, como se puede demostrar por el Teorema de Tales.
Obteniéndose los paralelogramos DD'OC' y BB'OA';
y los cuadriláteros AA'OD' y CC'OB' iguales entre sí y semejantes al ABCD con razón 1/2
Obtenemos el paralelogramo A'B'C'D' cuya área es la mitad de la del cuadrilátero ABCD.



Ya estamos en condiciones de asegurar tres puntos de la parábola $y = S'/S = c + br + ar^2$: los puntos (0 , 1), (0'5 , 0'5) que es el mínimo y el (1 , 1). Con ellos averiguaremos *a, b* y *c,* planteando y resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.
Obtenemos $S'/S = 1 - 2r + 2r^2$ que es, evidentemente, la misma ley que habíamos obtenido en el caso del cuadrado (tener en cuenta que $r = x/l$)

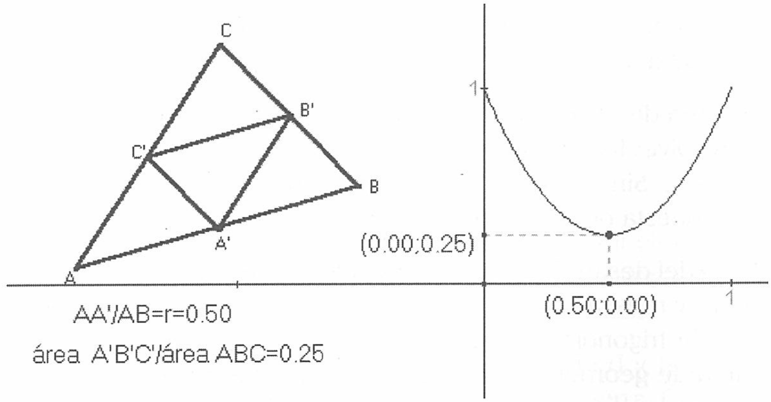
¿Qué ocurrirá con otros polígonos?

Echo de menos tener tiempo para poder continuar en clase estudiando el problema, o en cualquier caso, me gustaría no tener siempre tanta prisa, porque ¡son tantas las cosas que nuestros alumnos deben aprender! También echo de menos un aula equipada con el material necesario, libros, ordenadores...

Pero no cuesta nada soñar:

Investiguemos el problema similar en el triángulo, el pentágono, el hexágono, ...No nos va a llevar demasiado tiempo, porque las construcciones respectivas las haremos fácilmente de manera análoga a la del cuadrilátero. Después, sólo tendremos que observar, hacer conjeturas, demostrar si es posible.

En el caso de *«La movida de los triángulos inscritos»* se observa, igual que ocurría con los cuadriláteros, que la gráfica no cambia si variamos el triángulo y que, para cualquier triángulo, el área del triángulo inscrito en el punto medio es la cuarta parte del área del triángulo exterior. Esto es fácil de demostrar. El problema de hallar la ley general de variación $S'/S = f(r)$ lo podemos resolver por el método algebraico, utilizando los tres puntos seguros que tenemos de su gráfica, o también por medio de recursos geométricos, porque en este caso es fácil. Sería interesante hacerlo de las dos formas. Obtenemos: $S'/S = 1 - 3r + 3r^2$



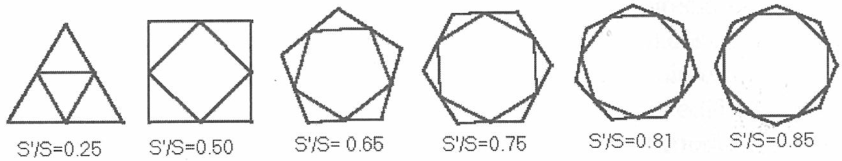
¡Parece que la cosa marcha...! *Tanto en los triángulos como en los cuadriláteos la ley es fija, independiente de la forma del triángulo o del cuadrilátero* y esto nos hace pensar que podría ocurrir igual en los pentágonos, en los hexágonos...

¡Pero no es así!, como se puede comprobar a través de sus respectivas construcciones realizadas con el programa:

En *«La movida de los pentágonos»* observamos que la curva varía al variar el pentágono, *la ley no es independiente de la forma del pentágono*. Parece ser que para cada pentágono (para todos los semejantes entre sí) habrá una ley de variación del área de los pentágonos inscritos. Lo mismo se observa en el caso de los hexágonos, de los heptágonos...

Ya que no hemos tenido suerte con la movida de polígonos en general, **fijaremos nuestra atención en los polígonos regulares**, que son los casos más sencillos y además más bonitos (nos conformamos...)

Podemos proponer el "*cálculo del área del polígono inscrito cuando r=0'5*". Será fácil e interesante obtener, en este caso, la siguiente **serie de valores de la relación *S'/S*** para el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono regular, el hexágono regular ...



1/4, 1/2, $\phi^2/4$, 3/4,... (f = número áureo = $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ¡siempre presente en el pentágono regular!)

Serie que tiende, naturalmente, a 1 cuando el número de lados del polígono tiende a infinito.

El problema de encontrar la ley $S'/S = f(r)$ para cada polígono regular se podría resolver fácilmente suponiendo que son parábolas del tipo $S'/S = ar^2 + br + c$. Sin embargo, a los alumnos interesados, podríamos hacerles la propuesta de verificarlo a través de la demostración geométrica.

A lo largo del desarrollo de estos ejemplos habremos tenido oportunidad de utilizar y repasar diversos contenidos de geometría, de números y de álgebra, de trigonometría, de funciones, a la vez que con la ayuda del programa de geometría dinámica hemos podido realizar sin mucho esfuerzo una pequeña investigación. Se nos ha facilitado al máximo la posibilidad de visualizar y observar el comportamiento de las figuras y de las funciones que estábamos estudiando, lo que ha permitido avanzar en la generalización.

Los alumnos acogen con entusiasmo el uso de estos programas y aprenden con facilidad a manejarlos. A la vez, aumenta su interés y el gusto por la asignatura porque el estudio resulta más atractivo.

Podemos aprovechar para la enseñanza las oportunidades que nos ofrece este nuevo mundo en el que nos está introduciendo la tecnología moderna.

Carmen Galván Fernández. Instituto de Enseñanza Secundaria "Chapatal". Santa Cruz de Tenerife. Correo electrónico: carmen@geup.net