Una presentación visual del polinomio de lagrange

Ricardo Cantoral y Gisela Montiel

Resumen

Este artículo reporta el diseño de una actividad didáctica cuyo objetivo es favorecer la visualización de los polinomios de interpolación de Lagrange. Empezamos con una revisión de diferentes posturas al respecto de lo que se entiende por la visualización del concepto de función, para seguir con una serie de actividades didácticas que utilizan estrategias dinámicas con el empleo de calculadoras con capacidades de gráficas dinámicas. Dicha propuesta fue desarrollada bajo una aproximación teórica de naturaleza sistémica que hemos denominado *socioepistemología*. Esta aproximación nos permite tratar con los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, al articular la epistemología del conocimiento, con su dimensión sociocultural, con los procesos cognitivos asociados y con los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza.

Palabras clave: Visualización, polinomios de Lagrange, Socioepistemología

Abstract

This paper report the design of pedagogical activities, in order to make posible the visualization of interplate Lagrange's polynomials. We start with a review of the different perspectives related to visualization of the function concept, and then we present a sencuence of pedagogical activities that use dynamical strategies with graphic calculators. This proposal was developed on the theoretical frameword of socioepistemology. With this approach, we can deal with fenomena of production and difution of mathematical knowledge focus on a multiple perspective, in order to make conections betwen the epistemology, socioculture, congnition and the teaching practice.

Key words: Visualization, Lagrange polynomials, socioepistemology

Presentación

La propuesta didáctica que mostramos en este artículo fue desarrollada en un libro dirigido a profesores de matemáticas (Cantoral y Montiel, 2001) que fuera presentado en las actividades de Relme – 15 (Quinceava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) en Buenos Aires, Argentina. De algún modo, nuestra propuesta es fruto de investigaciones

Números.
Volumen 55, septiembre de 2003, páginas 3-22

conducidas por el equipo de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav IPN en México. Dicha propuesta fue desarrollada bajo una aproximación teórica de naturaleza sistémica que hemos denominado *socioepistemología*. Esta aproximación nos permite tratar con los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, al articular la epistemología del conocimiento, con su dimensión sociocultural, con los procesos cognitivos asociados y con los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 1998, Cantoral y Farfán, 1998).

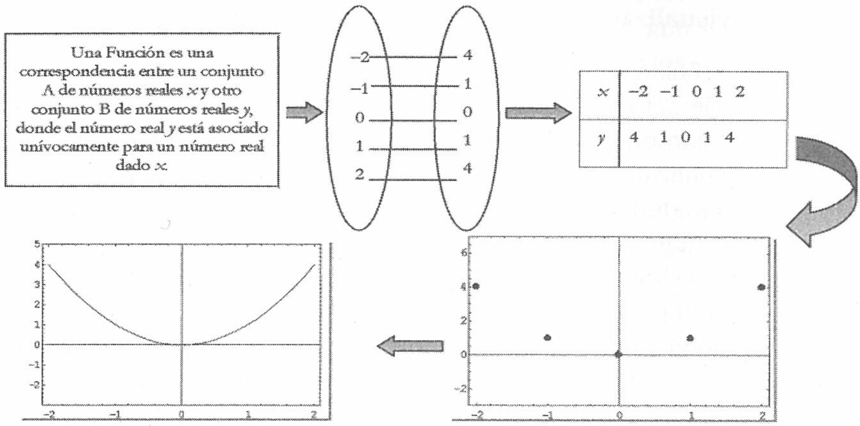
Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas han asumido que el conocimiento científico es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y de su difusión (Cantoral y Ferrari, 2002).

Nuestra propuesta en lo general trata de una forma particular de entender a la visualización de las funciones, aunque en este escrito nos ocuparemos, en particular y sólo a manera de ejemplo, de la construcción visual del polinomio de interpolación de Lagrange. Nos apoyaremos reiteradamente en el concepto de función en distintos ámbitos científicos, y en la primera parte dirigiremos nuestra atención al análisis de sus procesos de enseñanza y de aprendizaje. Por ejemplo, en la literatura especializada, se ha estudiado al concepto de función desde posiciones teóricas diversas y en las que se reporta una gran variedad de dificultades en su aprendizaje, véase por ejemplo la compilación que hicieran Dubinsky y Harel (1992). Por lo que respecta a nuestra presentación, diremos que no sólo hemos abordado aspectos como el tratamiento curricular y las concepciones que los alumnos desarrollan en su paso por la escuela y la universidad, sino que también presentamos una propuesta didáctica basada en la visualización y en el desarrollo del pensamiento matemático que permite al concepto de función, en nuestra opinión, evolucionar entre las concepciones de los alumnos gracias a sus propias actividades matemáticas.

Paradigmas y enfoques

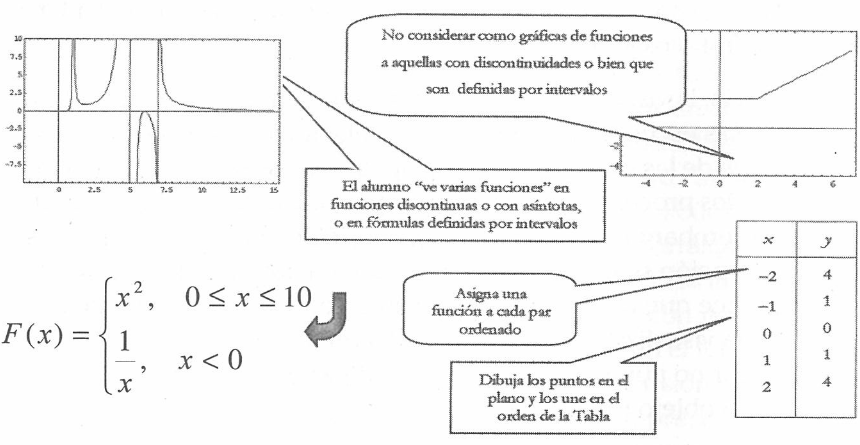
El "paradigma de la enseñanza" que sigue el sistema escolar, se basa principalmente en el tratamiento de los contenidos plasmados en programas y planes de estudio, textos escolares, actividades en clase y evaluaciones centradas principalmente en enfoques axiomático deductivos o en la resolución de problemas. La preocupación principal del acto educativo según este enfoque, se centra en "el arte de enseñar" y en esa medida, se diseñan actividades escolares sin atender adecuadamente a los factores de aprendizaje matemático entre los alumnos. Consideramos que el tratamiento que se ha dado al concepto de función bajo tal enfoque refleja cierta linealidad en su presentación, pues se va de lo sencillo a lo complejo reforzando con su paso a la presentación de las nociones, pero no se avanza en la intención de propiciar una evolución de las nociones en el pensamiento de los alumnos.

Esta situación les lleva a dar un tratamiento al concepto de función que parte de su definición formal, o cuasi formal, para apoyarse en algunas variantes explicativas y seguir con refuerzos provenientes de representaciones múltiples (Ver Esquema 1).



Esquema 1. *Tratamiento curricular*

Sin embargo, los resultados que la investigación reporta muestran que el alumno no se apropia adecuadamente del concepto y que desarrolla concepciones "erróneas" como ahora resumimos en el Esquema 2.



Esquema 2. *Concepciones y dificultades*

Se sabe que el tratamiento escolar del concepto de función ha provocado que el alumno no desarrolle la habilidad para transitar entre las distintas representaciones del concepto con soltura, ni que disponga de las herramientas o del lenguaje adecuado para abordar problemas donde necesite simultáneamente de los enfoques numéricos, gráficos y algebraicos. Es en este sentido que hemos desarrollado una propuesta didáctica que busca desarrollar al pensamiento matemático del alumno a través de la visualización del concepto de función.

Funciones: visualización y pensamiento matemático

De entrada, señalamos que habremos de entender a la visualización no como el simple acto de "ver", pues visualizar una función, por ejemplo, no significa solamente "verla, mirar o contemplar su gráfica". De hecho es posible visualizarla sin ver su gráfica. Así mismo, entendemos que el pensamiento matemático no se reduce a pensar cuando estemos ante una actividad matemática. En un sentido más amplio, entendemos por visualización a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje de quien aprende. Ahora bien, realizar la actividad de visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a lo numérico, gráfico o algebraico, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales. La visualización, entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado y, sobre todo, de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados.

Cada vez más, la visualización se ha convertido en un tópico importante en las diversas escuelas del pensamiento relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Principalmente se le ubica como componente de los procesos mentales que tienen lugar en la actividad matemática. Sin embargo, se tiene claro que al relacionarse estrechamente con la percepción se presenta en diversas situaciones de la vida cotidiana. Nos parece que no existe una aproximación teórica dominante en el terreno de la visualización, aunque las diferentes posturas coinciden en que visualizar no puede reducirse al acto de ver las diversas representaciones de un objeto matemático.

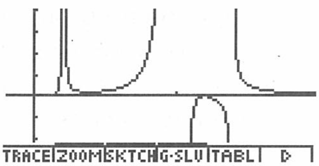
Las tradiciones congocitivistas (Dauterman, Dubinsky y Zazkis, 1996) asumen que las estrategias de visualización y de análisis son mutuamente dependientes y que su integración contribuye al entendimiento de los conceptos matemáticos. Para ello desarrollan el modelo V – A (Visualización y Análisis) donde se pasa de una estrategia de visualización a una de análisis hasta conformar una síntesis donde no es posible distinguir una de la otra. Este modelo se basa en una extensión del análisis piagetiano de la percepción y de la inteligencia usando el marco teórico de la abstracción reflexiva mediante acciones, procesos, objetos y esquemas (conocida en la jerga como teoría APOE), y en consecuencia caracterizan a la visualización en términos de procesos de interiorización y de encapsulación. Esta tendencia camina a la par y en algún sentido acorde con los análisis de Presmeg (1986), quien añade que los métodos visuales son exitosos cuando apoyan a las generalizaciones analíticas, lo cual proviene de la idea de "generalización de patrones" que se tiene de la matemática como disciplina.

La visualización se ha visto beneficiada en el campo de la Matemática y su enseñanza mediante el empleo de las representaciones gráficas o las representaciones geométricas de los conceptos matemáticos, por ejemplo Davis (1993) habla de teoremas visuales refiriéndose a aquellos productos visuales o gráficos que el ojo percibe y organiza como un todo coherente, capaz de inspirar preguntas matemáticas de naturaleza tradicional o que contribuyen de alguna manera al entendimiento o enriquecimiento de alguna situación real o matemática. Sin embargo, al igual que las demás escuelas, no limita la visualización a la percepción, sino que trata de la interpretación de dichos teoremas mediante expresiones del lenguaje natural o a través de acciones concretas.

También para el desarrollo de la Matemática como cuerpo teórico es fundamental la visualización, puesto que lo que hoy vemos en la obra matemática puede expresarse en formas analíticas de todos los niveles de complejidad, pero sus orígenes están impregnados de abstracciones y visualizaciones. De Guzmán (1996), señala que muchas de las formas de visualización que se experimentan son un verdadero camino de codificación y descodificación que está inmerso en todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma larga historia de la Matemática. Esto implica que la visualización sea un proceso que hay que aprender con las personas a nuestro alrededor y en la inmersión e inculturación en el tejido histórico y social de la Matemática. La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta.

A partir de la perspectiva desarrollada por Piaget, al explorar la concepción de espacio que los sujetos desarrollan, describimos a las actividades de visualización de funciones reales de variable real, como actividades representacionales del espacio cartesiano. La imagen mental del espacio cartesiano con las que los jóvenes actúan, se forma mediante una reconstrucción activa de los objetos a un nivel simbólico, donde las representaciones mentales no son solamente evocadas por la memoria.

En este sentido, las investigaciones que hemos desarrollado han estado interesadas en las transformaciones mentales que van del espacio real al espacio de las representaciones del estudiante, centrando la atención en aquellos atributos de los objetos reales que son invariantes bajo esas transformaciones y cómo ellos cambian con el curso escolar. De acuerdo a la teoría de Piaget, las primeras transformaciones del sujeto son aquellas que conservan los atributos topológicos de los objetos tales como interior o exterior de un conjunto, frontera de un conjunto, conexidad o apertura y cerradura de curvas. Sólo después, el niño está capacitado para transferir a su espacio representacional atributos euclidianos de los objetos, tales como longitud de las líneas o tamaño de los ángulos. Es ahí donde se presentan ideas sobre la conservación de la longitud, el área o el volumen de los objetos geométricos. En consecuencia, es entonces donde se construye un verdadero escenario de visualización para las funciones reales de variable real. Pretendemos que con un tratamiento visual que desarrolle el pensamiento matemático en el alumno, éste contestará preguntas como las siguientes: ¿qué fórmula puede describir la gráfica de la Pantalla 1? o ¿cuál es la gráfica de la derivada de la función cuya gráfica aparece en la Pantalla 2.



Pantalla 1

Pantalla 2

Exploraciones recientes nos muestran que, tanto alumnos como profesores de educación preuniversitaria, no responden en forma correcta a las preguntas anteriores aún a pesar de haberlas llevado cotidianamente en su vida escolar.

Los polinomios de lagrange: una exploración VISUAL

En los textos de análisis numérico se define al polinomio de interpolación de Lagrange, correspondiente a $n + 1$ valores dados, como aquella función polinomial de grado a lo más n que toma sobre los $n + 1$ diferentes valores numéricos $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, los $n + 1$ valores dados $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$. La explicación que suele hacerse para obtener dicho polinomio atiende, naturalmente, a la propia orientación teórica del autor. En algunos textos consultados se propone a un polinomio interpolador como una expresión formal $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, en la que los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ quedan determinados por las condiciones del problema, esto es, se pide que satisfagan al siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&a_0+a_1x_0+a_2x_0^{\,2}+\ldots+a_nx_0^{\,n} = y_0\\
&a_0+a_1x_1+a_2x_1^{\,2}+\ldots+a_nx_1^{\,n} = y_1\\
&\ldots\\
&a_0+a_1x_n+a_2x_n^{\,2}+\ldots+a_nx_n^{\,n} = y_n
\end{aligned}
$$

Como se puede constatar en los libros de análisis numérico, la resolución de este problema produce como resultado la expresión funcional siguiente, a la cual se le asigna el nombre de polinomio de Lagrange:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

La manera en que argumentan los autores ante esta última expresión difiere según la orientación teórica de la que partan y naturalmente de la concepción que tengan de lo que es la enseñanza. Algunos, por ejemplo, inician con el estudio de casos particulares, mientras que otros tratan directamente con el teorema de existencia y unicidad del polinomio de Lagrange. En tal caso, suelen considerar a los monomios $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ como base canónica del espacio de polinomios. Algunos otros autores, se ocupan más bien de construir al polinomio de Lagrange a partir del estudio de un caso simple. Por ejemplo, piden encontrar un polinomio de tercer grado cuya gráfica pase por un conjunto particular de cuatro puntos dados. Otros más en cambio, siguen una ruta ilustrativa, pues enuncian el teorema y diseñan un polinomio particular que cumple con las hipótesis. En esos casos, los autores no suelen utilizar las representaciones gráficas ni las explicaciones visuales.

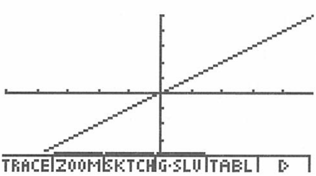
Una opción más, que desarrollaremos en este artículo, consiste en proponer un método explicativo que parta de un problema concreto. Construir, por ejemplo, una curva de grado conocido que pase por un conjunto dado de puntos en el plano apoyándonos principalmente en las posibilidades que ofrece la visualización.

Nuestra estrategia consistirá entonces en construir al polinomio de interpolación de Lagrange inductivamente con base en la visualización. Partiremos de una serie de hechos conocidos, tanto de la teoría de ecuaciones como del álgebra básica. Una raíz del polinomio $f(x)$ es un valor numérico particular a tal que dicha función se anula en él, es decir $f(a) = 0$. Si por ejemplo, una función tiene sólo tres raíces a, b y c, entonces ésta se puede expresar como $f(x) = A(x - a)(x - b)(x - c)$. Además usaremos un principio de continuidad de las funciones polinomiales, que consiste en afirmar que ellas cubren el plano. Por ejemplo, dado una serie de puntos con diferente abscisa, existe al menos una función polinomial cuya gráfica pasa por ellos.

Particularmente haremos uso de esos principios en nuestra presentación y veremos cómo al apoyarnos en la visualización podremos obtener inductivamente al polinomio de Lagrange. Iniciemos con el caso que consideramos más simple.

Una secuencia didáctica particular

Consideremos la función dada por $f(x) = x$ como una "función primitiva". Como sabemos, su gráfica (Pantalla 3) es una recta que pasa por el punto (0, 0).



Pantalla 3

¿Cómo podemos tener una recta que pase por el punto (4, 0)? –Ver Figura 1–

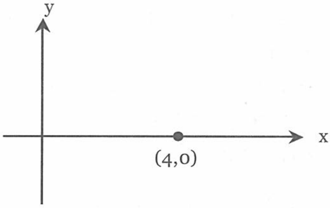
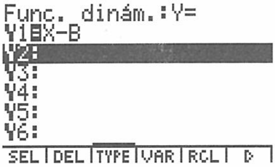
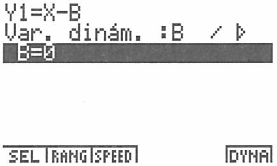


Figura 1

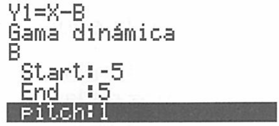
En la calculadora Casio modelo Algebra FX 2.0, en su menú dinámico, DYNA, definimos a la función *Y1=x-B* para hacer variar el valor del parámetro B, para lo cual seguiremos la secuencia de pantallas que aparecen enseguida:



Pantalla 4

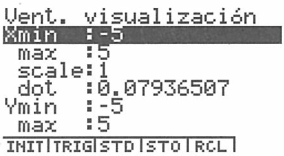


Pantalla 5



Pantalla 6

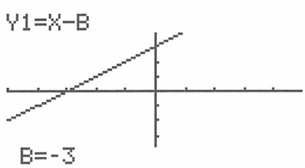
Definimos la siguiente ventana:



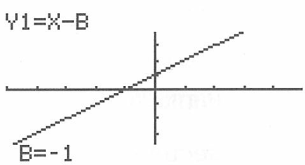
Pantalla 7

La calculadora mostrará entonces mediante una sucesión de gráficas con movimiento el efecto del parámetro B al ir cambiando su valor de uno en uno desde B = -5 hasta B = 5. Una vez que se percibe el cambio de posición de la recta es factible contestar a la pregunta ¿cuál es la recta que pasa por el punto (4, 0)? Cabe mencionar que podemos interpretar la transformación $f(x\text{-}B) = x\text{-}B$ como la traslación de la recta $f(x)=x$, B unidades hacia arriba o B unidades hacia la izquierda (si el parámetro B es negativo) o B unidades hacia abajo o a hacia la derecha (si el parámetro B es positivo)

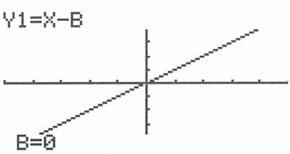
La siguiente es una posible secuencia de gráficas



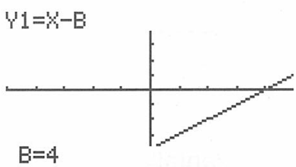
Pantalla 8



Pantalla 9



Pantalla 10



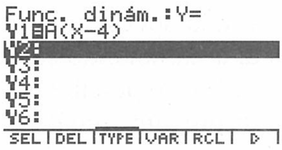
Pantalla 11

Ahora bien, apoyándonos en el resultado anterior, ¿cómo obtendríamos la recta que pase por los puntos (4, 0) y (6, 4)?

Es claro que esta pregunta se puede resolver directamente mediante la fórmula de la ecuación de la recta $(y-y_1)=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, ya que disponemos de las coordenadas de dos puntos, pero la intención del diseño que estamos proponiendo es la de utilizar sólo estrategias visuales. Por ejemplo, emplear estrategias que permitan rotar una recta que pasa por el punto (4, 0) de manera que pase también por el punto (6, 4). Para llevarlo a cabo proponemos una segunda actividad con la calculadora.

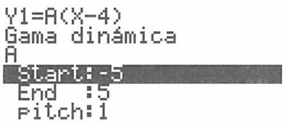
Actividad de visualización

En el Menú DYNA de la calculadora, define la función Y1=A(x-4) y sigue la secuencia de pantallas



Pantalla 12

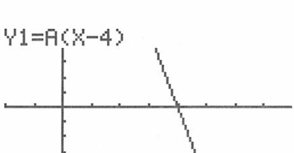
Pantalla 13



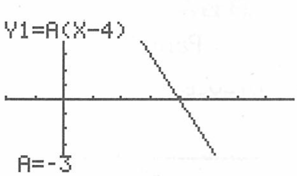
Pantalla 14

Pantalla 15

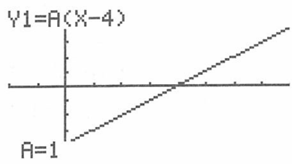
Una posible secuencia de gráficas es la siguiente



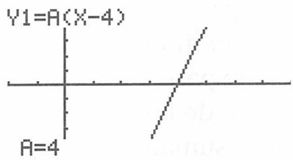
Pantalla 16



Pantalla 17



Pantalla 18



Pantalla 19

Observemos que al escribir Y1=$A(x$-4) mantenemos fijo el punto (4, 0) y giramos la recta sobre ese punto como pivote. Es decir, cuando x=4 el producto $A(x$-4) será cero sin importar el valor de A. Esto es, tomamos en cuenta la prioridad de operaciones Y1=$A(x$-4) que nos dice: resta 4 unidades a x y luego multiplica por A, lo que gráficamente se traduce en: desplaza 4 unidades hacia la derecha (o hacia abajo) a la recta Y1=x y después gírala según el valor de A. Si A es positiva, la recta se mira como en las pantallas 18 y 19, mientras que si A es negativa, se observa la recta como en las pantallas 16 y 17; si $-1 < A < 1$ la recta se acerca al eje x, mientras que si $A < -1$ o $A > 1$, la recta se acerca al eje y. Si definimos en cambio a la función Y1=Ax-4, estaríamos girando a la recta Y1=x según A y posteriormente desplazándola 4 unidades (el proceso inverso).

Pero aún no se contesta la pregunta ¿qué recta pasa por los puntos (4, 0) y (6, 4)?. Sin embargo, sabemos que la fórmula general de la recta que pasa por el (4, 0) tiene la forma Y1=$A(x$-4) y dado que sabemos que al ser $x = 6$, $y = 4$ podemos sustituir valores, de tal forma que obtenemos 4=A(6-4), donde A deberá ser igual a 2. De este modo, la ecuación de la recta pedida es $y = 2(x - 4) = 2x - 8$.

Hasta ahora hemos podido construir la fórmula de la recta utilizando argumentos de visualización, sabiendo que un punto está sobre el eje x y el otro punto fuera de él. Giramos entonces la recta sobre el pivote y usamos un resultado general, la recta toca cualquier otro punto sobre el plano. ¿Cómo obtendríamos ahora la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2, 12) y (6, 8)? –Figura 2-

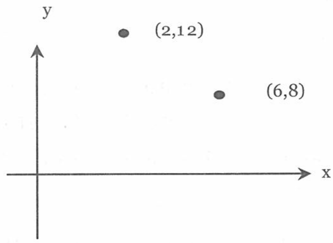
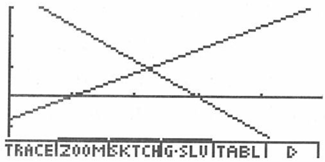


Figura 2

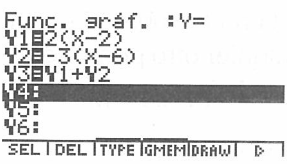
La estrategia ahora se basa en retomar al ejercicio anterior, encontrando en un primer momento la recta que pase por los puntos (2, 12) y (6, 0), y la recta que pase por los puntos (2, 0) y (6, 8). Esto es, dejamos un punto sobre el eje de las equis y al otro fuera del eje, invertimos los papeles y *voilá!*, sólo sumamos las dos funciones.

Tenemos entonces las función $y_1 = 2(x-2)$ y la función $y_2 = -3(x-6)$, cuyas rectas podemos apreciar en la Pantalla 20



Pantalla 20

Ahora bien, el objetivo es encontrar una gráfica que pase por los puntos inicialmente planteados. Para lograrlo "sumaremos las gráficas" tomado como guía los puntos donde ambas rectas cruzan el eje x. Esto es, si sumamos ambas rectas en $x = 2$, la función $y_1 = 2(x-2)$ vale cero y la función $y_2 = -3(x-6)$ vale doce, por lo que la suma de ambas es doce. En $x = 6$ la función $y_1 = 2(x-2)$ vale ocho y la función $y_2 = -3(x-6)$ vale cero, por lo que la suma de ambas es ocho. De esta forma conseguimos que la función suma pase por los puntos (2, 12) y (6, 8). Veamos en la pantalla de la calculadora las gráficas de las funciones y_1, y_2 e $y_1 + y_2$

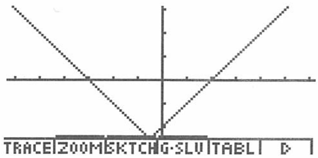


Pantalla 21

Pantalla 22

Esta actividad logra, en nuestra opinión, introducir al estudiante plenamente en el proceso de visualización, de tal forma que en estos momentos se puede construir la función recta con base en información numérica, algebraica y gráfica.

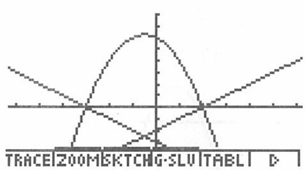
Para el caso de la función cuadrática haremos un tratamiento análogo, pero debemos "multiplicar dos rectas". Consideremos las gráficas de las funciones dadas por $y_1 = (x-2)$ e $y_2 = -(x+3)$, cuyas gráficas son las rectas siguientes:



Pantalla 23

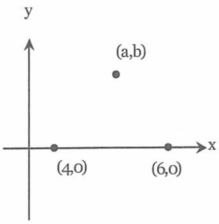
Para "multiplicar las rectas" tomaremos de nuevo como guía los cruces con el eje x. Antes de x = 3 la recta $y_1 = (x-2)$ está por debajo del eje x. Por tanto sus ordenadas son negativas y la recta $y_2 = -(x+3)$ está por encima del eje x, por lo que sus ordenadas son positivas, por lo que su producto será negativo (estará por debajo del eje y). Cuando – 3<x<2 ambas rectas están por debajo del eje x, y en consecuencia sus valores en y serán negativos. Por lo tanto su producto será positivo (la gráfica resultante de la multiplicación estará por encima del eje y). Por último, cuando x>3 la recta $y_1 = (x-2)$ está por arriba del eje x y la recta $y_2 = -(x+3)$ estará por debajo, por lo que el producto de sus imágenes será negativo (la gráfica resultante estará por debajo del eje y). Podemos resumir diciendo que los cruces con el eje x, de cada recta se conservan en el producto. Sin embargo, las rectas sólo pasan de ser positivas a negativas o viceversa, ahora el producto de ambas pasa de ser negativo a ser positivo y vuelve a ser negativo. Entonces el producto de las rectas es de la siguiente forma:

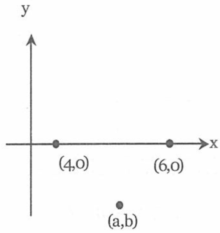
Pantalla 24

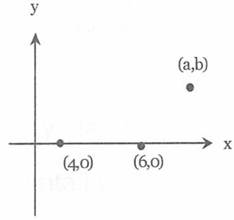


Pantalla 25

Si expresamos el producto de las rectas en forma analítica tenemos $y = -(x-2)(x+3)$, donde los términos (x-2) y (x+3) nos hablan de las raíces en x=2 y x=-3, de tal forma que pedir una parábola que, por ejemplo, cruce por los puntos (4, 0) y (6, 0) sobre el eje x, supondría una expresión de la forma $y = (x-4)(x-6)$. Pero ¿será la única parábola que pase por esos puntos? Una forma de averiguar la respuesta es buscar parábolas para posibles casos, como los siguientes:

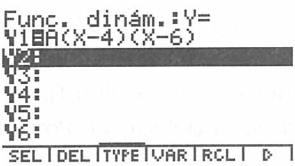






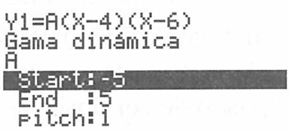
Actividad de visualización

En el Menú DYNA de la calculadora define la función $Y1=A(x\text{-}4)(x\text{-}6)$ y sigue la secuencia de pantallas

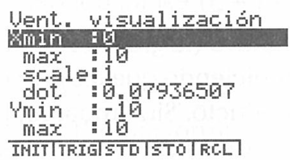


Pantalla 26

Pantalla 27

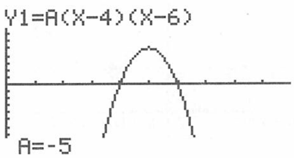


Pantalla 28

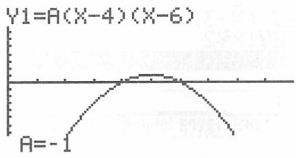


Pantalla 29

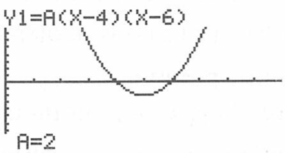
Una posible secuencia de gráficas es la siguiente



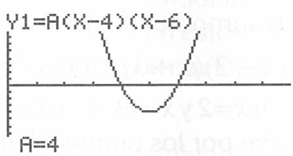
Pantalla 30



Pantalla 31



Pantalla 32



Pantalla 33

Como podemos observar, la parábola queda fija en las raíces y puede tocar cualquier otro tercer punto que no esté sobre éstas, incluyendo otro que pase por el eje x cuando $A=0$. Observemos que cuando el parámetro A es negativo, la parábola abre hacia abajo, mientras que cuando es positivo abre hacia arriba; además, cuando A se acerca a cero los brazos de la parábola se abren, mientras que si se aleja del cero se cierran.

Por ejemplo, para construir la parábola que pase por los puntos (4, 0), (6, 0) y (5, 2) se requiere suponer que la función tiene la forma $y = A(x-4)(x-6)$ donde aseguremos los dos primeros puntos, y necesitamos calcular el valor de A que cumpla con el dato que provee el punto (5, 2), es decir, calculemos la expresión $2 = A(5-4)(5-6)$, donde se obtiene para A el valor de menos dos. Entonces, la expresión de la parábola que cumple las condiciones iniciales es $y = -2(x-4)(x-6)$.

¿Pero cómo construimos la ecuación de la parábola que pase por los puntos siguientes, (2, 0), (5, 2) y (7, -3)? Observemos que ahora no son dos los puntos sobre el eje x, sino sólo uno, el (2, 0). Utilizaremos una estrategia análoga a la empleada con la recta, es decir, encontraremos la parábola que pase por (2, 0), (5, 0) y (7, -3) y después la parábola que pase por (2, 0), (5, 2) y (7, 0), de tal forma que al sumar las dos parábolas, tomando como guía los cruces con el eje x, obtendremos la parábola deseada.

Este procedimiento puede seguirse para construir parábolas que pasan por puntos no colineales que estén fuera del eje de las equis y que tengan distintas abscisas. Por ejemplo, pensemos en los puntos (1, 1), (2, 4) y (3, 3), todos fuera del eje de las x. Éstos, como sabemos, no están sobre una recta ni tienen la misma primer coordenada. Veamos su disposición en una gráfica.

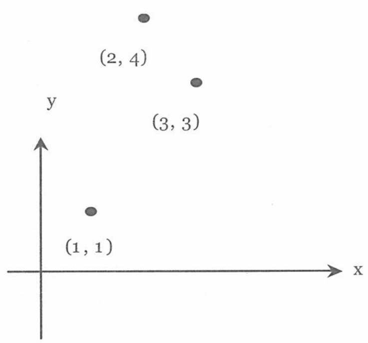


Figura 3

Se espera entonces que la parábola buscada abra hacia abajo y pase por los puntos (1, 1), (2, 4) y (3, 3). Para construir la parábola, según nuestra propuesta de método, tenemos que construir tres parábolas que pasan por dos puntos sobre el eje x y uno fuera. Los puntos sobre el eje de las equis se obtienen desplazando verticalmente a los puntos anteriores (1, 1), (2, 4) y (3, 3) hacia el eje x. Es decir incluimos en el problema a los puntos (1, 0), (2, 0) y (3, 0). Llamaremos f_1, f_2 y f_3 a cada una de las parábolas que pasan, respectivamente, por los conjuntos de puntos siguientes: {(1, 0), (2, 0), (3, 3)}, {(1, 0), (2, 4), (3, 0)} y {(1, 1), (2, 0), (3, 0)}. Mientras que la parábola buscada se formará con la suma de las tres parábolas $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$. Las parábolas pasarán entonces por los puntos de la siguiente manera:

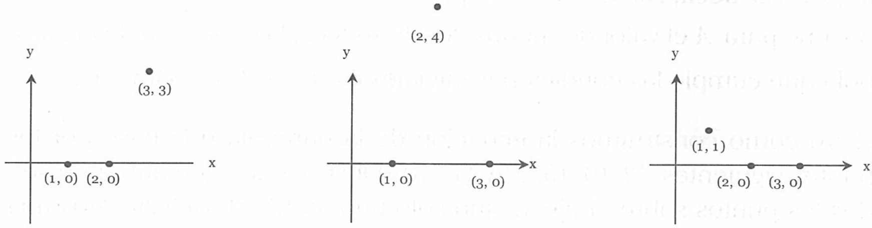
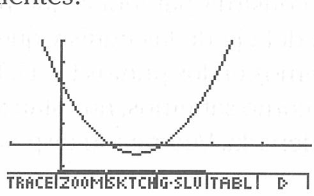
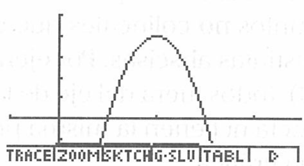


Figura 4

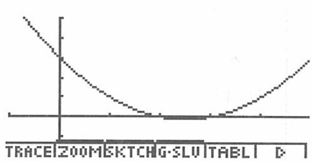
Así la gráfica de f_1 pasa por (1, 0), (2, 0) y (3, 3), la de f_2 por (1, 0), (2, 4), (3, 0) y la de f_3 por (1, 1), (2, 0), (3, 0). Sus gráficas son entonces las siguientes:



Pantalla 34
Gráfica de f_1

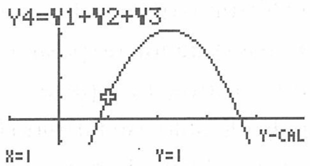


Pantalla 35
Gráfica de f_2



Pantalla 36
Gráfica de f_3

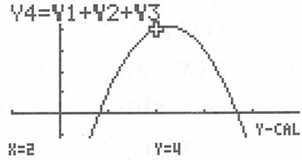
Finalmente si "sumamos" esas tres gráficas vemos que los puntos (1, 1), (2, 4) y (3, 3) pertenecen a la gráfica de $f(x)$, la suma en cuestión, como se ilustra en el siguiente diagrama:



Pantalla 37

Gráfica de $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$

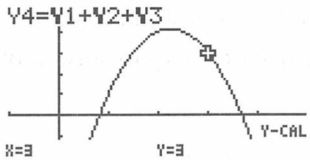
Contiene al (1, 1)



Pantalla 38

Gráfica de $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$

Contiene al (2, 4)



Pantalla 39

Gráfica de $f\ (x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$

Contiene al (3, 3)

Construyendo la generalización

Siguiendo esta idea, podemos generalizar el método para expresiones de mayor grado, de tal forma que podamos llegar a una generalización y así construir el polinomio de interpolación de Lagrange. En este caso, conviene centrar la atención en la regularidad que muestran las respectivas expresiones analíticas en los casos que hemos tratado hasta ahora, la recta y la parábola.

Comencemos pues con el caso de la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) y luego con el de la parábola que pasa por (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

Como la recta pasará por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), consideramos dos rectas que pasen respectivamente por $(x_0, 0)$ y (x_1, y_1) y por (x_0, y_0) y $(x_1, 0)$, a fin de que tenga una raíz conocida. Sus ecuaciones serán entonces, respectivamente: $y = A(x\text{-}x_0)$ e $y=A(x\text{-}x_1)$. Para el primer caso, la recta $y = A\ (x\text{-}x_0)$ debe pasar también por el punto (x_1, y_1), por lo que el valor de A se obtiene con la evaluación $y_1= A(x_1\text{-}x_0)$. Así se tiene para A el valor $A = y_1/(x_1\text{-}x_0)$. En el otro caso, $A = y_0/(x_0\text{-}x_1)$. Así la función f es:

$$f(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\, y_1 + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\, y_0$$

Este polinomio expresa la suma de las dos rectas, tal como lo explicamos con las gráficas. Analizando la fórmula podemos extraer información importante. Si se quiere que $f(x)$ pase por (x_0, y_0) se anula el término que contiene a y_1, es decir $f(x) = (x - x_0)y_1 + y_0$. De forma análoga, si se quiere que $f(x)$ pase por (x_1, y_1) se anula el término que contiene a y_0, es decir $f(x) = (x - x_0)y_1 + (x - x_1)y_0$. Pero esta función no pasa por ambos puntos simultáneamente, por ejemplo para $x=x_0$, $f(x) = (x_0 - x_1)y_0$. Habría entonces que dividir sólo ese término (dado que el otro se anula) entre $(x_0 - x_1)$ Haciendo el cálculo para $x=x_1$ tendríamos que $f(x) = (x_1 - x_0)y_1$, por lo que tenemos que dividir entre $(x_1 - x_0)$.

Ahora bien, la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se construye de manera semejante. Comenzamos con la forma

$$y_2 + y_1 + y_0,$$

si se quiere el punto (x_0, y_0), se anulan los términos de y_2 e y_1 multiplicándolos por $(x\text{-}x_0)$

$$f(x) = (x - x_0)y_2 + (x - x_0)y_1 + y_0$$

Si se quiere el punto (x_1, y_1), se anulan los términos de y_2 e y_0 multiplicándolos por $(x\text{-}x_1)$

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)y_2 + (x - x_0)y_1 + (x - x_1)y_0$$

pero cuando $x=x_0$, $f(x) = (x_0 - x_1)y_0$, así que tenemos que dividir el término de y_0 entre $(x_0 - x_1)$, con lo que tendríamos

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)y_2 + (x - x_0)y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}y_0$$

pero cuando $x=x_1$, $f(x) = (x_1 - x_0)y_1$, así que tenemos que dividir el término de y_2 entre $(x_1 - x_0)$, con lo que tendríamos

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)y_2 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}y_0$$

Si se quiere el punto (x_2, y_2), se anulan los términos de y_1 e y_0 multiplicándolos por $(x\text{-}x_2)$

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)}y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)}y_0$$

pero si $x=x_2$, $f(x)=(x_2-x_0)(x_2-x_1)y_2$, por lo que tenemos que dividir el término de y_2 entre $(x_2-x_0)(x_2-x_1)$, de donde queda

$$f(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)}y_0$$

Pero para que se siga cumpliendo que la gráfica de la función pase por (x_0, y_0), (x_1, y_1), reestructuramos cada término de forma que nos quede:

$$f(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0$$

De aquí podemos obtener analíticamente la suma de las tres parábolas que construimos gráficamente.

Tenemos entonces los siguientes casos:

Polinomio que pasa por dos puntos

$$f(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1+\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0$$

Polinomio que pasa por tres puntos

$$f(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0$$

de tal forma que podemos construir el polinomio que pasa por cuatro puntos

$$f(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0$$

Con este desarrollo, el patrón de comportamiento puede ser claro para el estudiante y, sobre todo, puede reproducirlo directamente con apoyo en estrategias visuales. Lo que logramos con este acercamiento es favorecer la construcción de un objeto matemático utilizando la visualización. La idea de visualización se desarrolla a propósito de un ejercicio fundamental, el de desarrollo de pensamiento matemático avanzado y con ello se logra construir, evolucionar y reforzar aquellas nociones que con la enseñanza tradicional no se ven favorecidas. El uso de la herramienta tecnológica juega en este caso, en nuestra opinión, un papel importante en la percepción de movimientos y la relación entre las representaciones, lo cual constituye el punto de partida del proceso de visualización.

Bibliografía

Cantoral, R. (1998): "Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: Un programma emergente". En: B. D'Amore (ed.) *Diversi Aspetti e Diversi Àmbiti della Didattica della Matematica* (pp. 15–24). Pitagora Editrice, Bologna.

Cantoral, R.; Farfán, R. (1998): "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis". *Epsilon* 42, 353 – 369.

Cantoral, R.; Ferrari, M. (2002): "La predicción y la regla de los signos de Descartes". *Antología de la red de Cimates*. México: 8 – 48.

Cantoral, R.; Montiel, G. (2001): *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice Hall & Pearson Edución, México.

Davis, P. (1993): "Visual Theorems". *Educational Studies in Mathematics* 24(4), 333-344

De Guzmán, M. (1996): *El rincón de la pizarra*. Pirámide, Madrid

Dubinsky, E.; Harel, G. (Eds.). (1992): *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Notes 25, MAA, Washington.

Kincaid, D.; Cheney, W. (1994): *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico*. Addison - Wesley Iberoamericana, México.

Presmeg, N. (1986): "Visualization in high school mathematics". *For the learning of mathematics* 6(3), 42-46.