Construcción de un triángulo conociendo sus tres alturas

Alvaro Martín González

La constancia de los productos de cada lado de un triángulo por la altura relativa a ese lado, $a.h_a = b.h_b = c.h_c$, sugiere la posibilidad de usar los métodos de la inversión para construirlo.

Para ello, desde un punto O, llevamos segmentos iguales a dos de sus alturas, por ejemplo $OM = h_a$ y $ON = h_b$, en cualquier dirección. En el plano que determinan se dibuja la circunferencia que pasa por O, M y N, una vez hallado el centro de la misma O´ por intersección de las mediatrices de OM y ON.

A continuación, con centro también en O y radio h_c, se traza un arco que determina dos puntos de corte con la circunferencia. Señalamos uno de ellos, P.

Cualquier inversión de centro O transforma esta circunferencia en una recta que no pasa por O y es perpendicular a OO´. Si trazamos una recta r uniendo dos puntos de la circunferencia, Q y R, equidistantes de O, podremos asegurar que será inversa de la circunferencia en una inversión de cierta razón k.

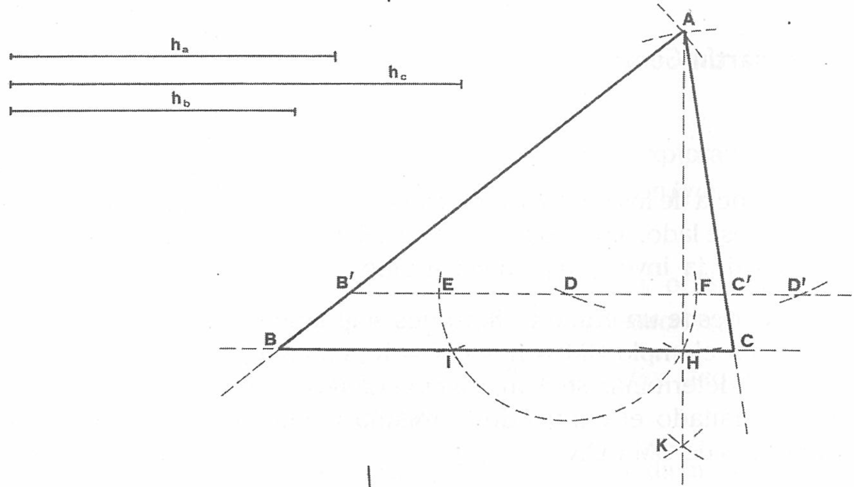
Los homólogos de M, N y P son M´, N´ y P´ situados en r.

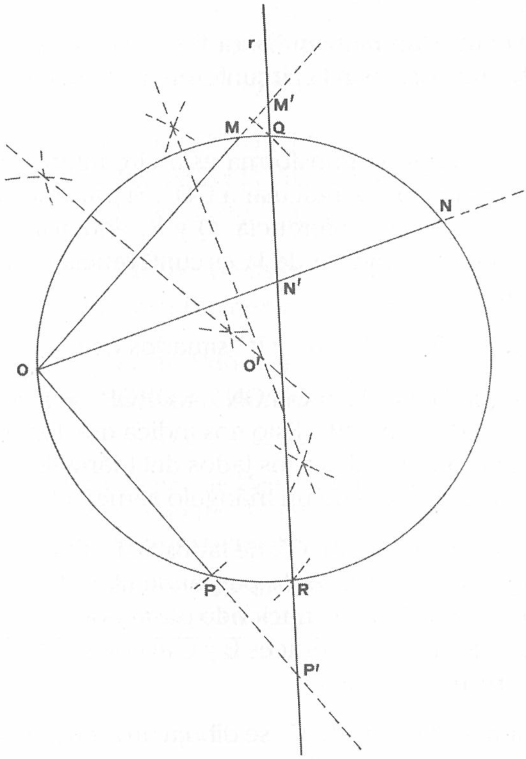
Se cumple entonces que OM.OM´ = ON.ON´ = OP.OP´ = k, o lo que es lo mismo, h_a.OM´ = h_b.ON´ = h_c.OP´. Esto nos indica que los segmentos OM´, ON´ y OP´ son proporcionales a los lados del triángulo que queremos construir, es decir, son lados de un triángulo semejante a él.

Se construye ahora ese triángulo, AB´C´, de lados OM´, ON´ y OP´. Desde un vértice, por ejemplo A se traza la perpendicular al lado opuesto B´C´, y se lleva sobre ella la altura h_a, haciendo pasar por su extremo H la paralela a B´C´ que determina los vértices B y C al cortar a las prolongaciones de AB´ y AC´ respectivamente.

Para trazar por A la perpendicular a B´C´ se dibuja un arco, con centro en A, que corte a B´C´. Haciendo centro en uno y otro de los puntos de corte, D y D´, se trazan dos arcos con cualquier radio. Se cortan en K. La recta AK es perpendicular a B´C´.

Para trazar la paralela por H a B´C´ se hace centro en cualquier punto D de ella y se dibuja el arco EHF. La distancia FH se lleva desde E sobre dicho arco y se determina I. La paralela buscada es IH.





Álvaro Martín González es Catedrático Numerario de Física y Química de Bachillerato. Doctor en Ciencias -Sección Químicas- Profesor del I.E.S. Ofra 5 de Santa Cruz de Tenerife. Licenciado en Bellas Artes. Profesor Tutor de Física de la UNED, en el Centro Asociado de La Laguna.
correo electrónico: alvaromg@ya.com