Ecuaciones lineales. Didáctica y perspectiva histórica

J. J. Aparicio Pedreño

Nota histórica

Los problemas relacionados con las ecuaciones lineales se remontan a los orígenes de las matemáticas. Aunque ya los babilonios utilizaron procedimientos de eliminación de incógnitas, no es hasta el siglo XVIII, cuando este tratamiento llega a ser un método (Gauss, 1777 - 1855), capaz de hacer posible la discusión y la resolución en el caso general.

Con anterioridad parece ser un hecho unánimemente reconocido por los historiadores, la utilización por Leibnitz (1646 - 1716) de los determinantes en 1693, (aunque en términos distintos de los actuales), en relación con los sistemas de ecuaciones lineales. Algo después Cramer (1704 -1752), en su obra «Introducción al análisis de las curvas algebraicas» (1750), publica la regla que lleva su nombre, pese a que realmente fue descubierta por Colin Maclaurin (1698 - 1746) alrededor de 1729, mientras elaboraba su «Tratado de Algebra». Esta injusticia histórica, como señala humorísticamente C.B. Boyer (Boyer, 1986), se ve compensada por otra arbitrariedad de la diosa Clio, al atribuir a Mac Laurin la serie que lleva su nombre, y que Stirling había sacado a la luz pública una docena de años antes que él, en su «Methodus differentialis».

Matrices y determinantes son objeto de estudio durante el siglo XIX en relación con problemas geométricos y algebraicos. Matemáticos como Cauchy, Hamilton, Cayley, Kronecker, Smith, Weierstrass, Silvester, etc. contribuyen a su desarrollo.

Frobenius (1849 - 1917), perteneciente al círculo de Matemáticas de Berlín, en el cual se forma, y del que Weierstrass (1815 - 1897) es la figura mas representativa, establece el concepto de rango de una matriz, y el Teorema de compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales, atribuído también al matemático francés Rouché (1832 -1910). Bajo la influencia de L. Kronecker, Frobenius desarrolla la teoría de los divisores elementales de una matriz, y con independencia del trabajo de Smith, establece condiciones necesarias y suficientes para la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales diofánticas. Para entender el sentido de trabajos posteriores, algunos de ellos muy recientes, será preciso detenernos en la formulación actual de dichas condiciones:

Se considera un sistema (S) de ecuaciones lineales diofánticas (o con coeficientes en un dominio de ideales principales R), de la forma **A.X = b**, donde **A** es una matriz de orden m x n con coeficientes en R, llamada matriz de coeficientes del sistema, $\mathbf{X}=(x_1, x_2,..., x_n)^t$ es la matriz columna de incógnitas, y $\mathbf{b}=(b_1, b_2,..., b_m)^t$ es la matriz columna formada por los términos independientes de (S). Denotamos a la matriz ampliada al añadir a **A** la columna **b**, por **(A|b)**.

El siguiente Teorema establece condiciones necesarias y suficientes de compatibilidad:

Teorema.- Son equivalentes:

a) El sistema (S) es compatible.

b) Las sucesiones de factores invariantes de la matriz **A** y de la matriz **(A|b)**, son iguales salvo asociados.

c) Para cada entero $i \geq 0$, el máximo común divisor de los menores de orden i de **A** coincide con el máximo común divisor de los menores de orden i de **(A|b)** salvo asociados.

d) $\Delta_i(\mathbf{A}) = \Delta_i(\mathbf{A|b})$ para todo $i \geq 0$.

e) $rg(\mathbf{A})=rg(\mathbf{A|b}) = r$, y $\Delta_r(\mathbf{A}) = \chi_r(\mathbf{A|b})$

Si **M** es una matriz con coeficientes en R y de orden $m \times n$, $\Delta_i(\mathbf{M})$ representa al ideal de R generado por los menores de orden i de **M**, y se llama i – ésimo ideal determinantal de **M**. Para i = 0, por convenio se define $\Delta_0(\mathbf{M}) = R$, y para $i > \min\{m,n\}$, $\Delta_i(\mathbf{M})=(0)$ por ser el ideal generado por el conjunto vacío igual a (0).

Se llama rango de **M**, y se representa por rg(**M**), al mayor entero r, para el que es $\Delta_r(\mathbf{M}) \neq (0)$. Si **R** es un cuerpo, los únicos ideales son (0) y (1), el apartado e) se reduce a la igualdad entre los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada, y el teorema anterior generaliza al Teorema de Rouché - Frobenius.

Por otra parte, como en los apartados a), d) y e) no se hace referencia a la estructura de dominio de ideales principales, podemos preguntarnos si la triple equivalencia a) $\Leftrightarrow$ d) $\Leftrightarrow$ e), o alguna de ellas, sigue cumpliéndose para anillos conmutativos en general.

Esta búsqueda de una mayor generalidad fue abordada ya (Steinitz, 1912), al extender los resultados de Frobenius a los sistemas sobre anillos de enteros algebraicos.