Ecuaciones lineales. Didáctica y perspectiva histórica

J. J. Aparicio Pedreño

Nota histórica

Los problemas relacionados con las ecuaciones lineales se remontan a los orígenes de las matemáticas. Aunque ya los babilonios utilizaron procedimientos de eliminación de incógnitas, no es hasta el siglo XVIII, cuando este tratamiento llega a ser un método (Gauss, 1777 - 1855), capaz de hacer posible la discusión y la resolución en el caso general.

Con anterioridad parece ser un hecho unánimemente reconocido por los historiadores, la utilización por Leibnitz (1646 - 1716) de los determinantes en 1693, (aunque en términos distintos de los actuales), en relación con los sistemas de ecuaciones lineales. Algo después Cramer (1704 -1752), en su obra «Introducción al análisis de las curvas algebraicas» (1750), publica la regla que lleva su nombre, pese a que realmente fue descubierta por Colin Maclaurin (1698 - 1746) alrededor de 1729, mientras elaboraba su «Tratado de Algebra». Esta injusticia histórica, como señala humorísticamente C.B. Boyer (Boyer, 1986), se ve compensada por otra arbitrariedad de la diosa Clio, al atribuir a Mac Laurin la serie que lleva su nombre, y que Stirling había sacado a la luz pública una docena de años antes que él, en su «Methodus differentialis».

Matrices y determinantes son objeto de estudio durante el siglo XIX en relación con problemas geométricos y algebraicos. Matemáticos como Cauchy, Hamilton, Cayley, Kronecker, Smith, Weierstrass, Silvester, etc. contribuyen a su desarrollo.

Frobenius (1849 - 1917), perteneciente al círculo de Matemáticas de Berlín, en el cual se forma, y del que Weierstrass (1815 - 1897) es la figura mas representativa, establece el concepto de rango de una matriz, y el Teorema de compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales, atribuído también al matemático francés Rouché (1832 -1910). Bajo la influencia de L. Kronecker, Frobenius desarrolla la teoría de los divisores elementales de una matriz, y con independencia del trabajo de Smith, establece condiciones necesarias y suficientes para la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales diofánticas. Para entender el sentido de trabajos posteriores, algunos de ellos muy recientes, será preciso detenernos en la formulación actual de dichas condiciones:

Se considera un sistema (S) de ecuaciones lineales diofánticas (o con coeficientes en un dominio de ideales principales R), de la forma **A.X = b**, donde **A** es una matriz de orden m x n con coeficientes en R, llamada matriz de coeficientes del sistema, $\mathbf{X}=(x_1, x_2,..., x_n)^t$ es la matriz columna de incógnitas, y $\mathbf{b}= (b_1, b_2,..., b_m)^t$ es la matriz columna formada por los términos independientes de (S). Denotamos a la matriz ampliada al añadir a **A** la columna **b**, por **(A|b)**.

El siguiente Teorema establece condiciones necesarias y suficientes de compatibilidad:

Teorema.- Son equivalentes:

a) El sistema (S) es compatible.

b) Las sucesiones de factores invariantes de la matriz **A** y de la matriz **(A|b)**, son iguales salvo asociados.

c) Para cada entero $i \geq 0$, el máximo común divisor de los menores de orden i de **A** coincide con el máximo común divisor de los menores de orden i de **(A|b)** salvo asociados.

d) $\Delta_i(\mathbf{A}) = \Delta_i(\mathbf{A|b})$ para todo $i \geq 0$.

e) $rg(\mathbf{A})=rg(\mathbf{A|b}) = r$, y $\Delta_r(\mathbf{A}) = \chi_r(\mathbf{A|b})$

Si **M** es una matriz con coeficientes en R y de orden $m \times n$, $\Delta_i(\mathbf{M})$ representa al ideal de R generado por los menores de orden i de **M**, y se llama i – ésimo ideal determinantal de **M**. Para i = 0, por convenio se define $\Delta_0(\mathbf{M}) = R$, y para $i > \min\{m,n\}$, $\Delta_i(\mathbf{M})=(0)$ por ser el ideal generado por el conjunto vacío igual a (0).

Se llama rango de **M**, y se representa por rg(**M**), al mayor entero r, para el que es $\Delta_r(\mathbf{M}) \neq (0)$. Si **R** es un cuerpo, los únicos ideales son (0) y (1), el apartado e) se reduce a la igualdad entre los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada, y el teorema anterior generaliza al Teorema de Rouché - Frobenius.

Por otra parte, como en los apartados a), d) y e) no se hace referencia a la estructura de dominio de ideales principales, podemos preguntarnos si la triple equivalencia a) $\Leftrightarrow$ d) $\Leftrightarrow$ e), o alguna de ellas, sigue cumpliéndose para anillos conmutativos en general.

Esta búsqueda de una mayor generalidad fue abordada ya (Steinitz, 1912), al extender los resultados de Frobenius a los sistemas sobre anillos de enteros algebraicos.

Para anillos conmutativos arbitrarios no se mantiene la validez de esas equivalencias, como se puede constatar con ejemplos sencillos:

En R = Z/(10), el sistema:

$$\begin{aligned} \bar{4}x \quad &= \bar{1} \\ \bar{4}y &= \bar{0} \end{aligned}$$

es incompatible, a pesar de que cumple la condición e) del teorema anterior, por ser rg(**A**) **=** rg(**A|b**) **= 2, y** Δ_2**(A) =** ?$_2$**(A|b) = (**$\bar{6}$**).**

Surge entonces naturalmente la pregunta de saber hasta donde resultan válidas las equivalencias anteriores, es decir: ¿cuál es la máxima generalidad del Teorema de Rouché - Frobenius?

Esta pregunta fue contestada (Camion, Levy, Mann, 1972), al suponer R dominio de integridad. Posteriormente en (Hermida y Sánchez - Giralda, 1984), se caracterizaron siguiendo métodos distintos, aquellos anillos conmutativos en general para los que se cumple a) $\Leftrightarrow$ d).

Más recientemente se han caracterizado (Aparicio, 2002), siguiendo esencialmente los mismos métodos que en (Hermida y Sánchez - Giralda, 1984), aquellos anillos conmutativos en general en los que se cumple a) $\Leftrightarrow$ e).

Estos anillos conocidos como anillos de Prüfer, estrechamente emparentados con los anillos de Dedekind, bien podrían ser también llamados anillos de Frobenius, dado que son el dominio natural en el que gobiernan las condiciones de compatibilidad (en una versión mas general) descubiertas por dicho matemático. Están también caracterizados de otras formas (Hermida y Sánchez - Giralda, 1987), una de ellas, por el hecho de tener dimensión homológica débil menor o igual que uno.

Didáctica

Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales

En la actualidad, según la normativa vigente, el estudio de los sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, está incluido en los contenidos del segundo ciclo de la ESO, tanto en tercero, como en ambas opciones A y B de cuarto. Haremos el planteamiento correspondiente a tercero, y en las dos opciones de cuarto trataríamos el tema como consolidación o repaso. En Bachillerato se estudian los sistemas de ecuaciones lineales en segundo curso de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, y en primero y segundo de Humanidades y Ciencias Sociales. Abordaremos con diferentes tratamientos en cuanto a rigor, profundidad y extensión la didáctica en tercero de la ESO y en segundo del BCNS y del BCCSS.

Es un tema de gran interés, entre otras razones porque en él interaccionan tres lenguajes: el lenguaje verbal con el que se enuncian los problemas, el lenguaje algebraico, y su traducción al lenguaje geométrico al interpretar los conjuntos de soluciones como conjuntos de puntos del plano o del espacio.

Tema: Ecuaciones de primer grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Curso: 3º de ESO

Tiempo: 3 semanas.

Objetivos:

- Saber traducir al lenguaje algebraico las relaciones entre las incógnitas de un problema.
- Distinguir entre identidad y ecuación.
- Resolver ecuaciones de primer grado y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas (métodos de sustitución, igualación y reducción).
- Discutir un problema según el conjunto de sus soluciones.
- Interpretar y resolver gráficamente sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Conceptos:

- Identidad y ecuación.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Equivalencia de ecuaciones.
- Sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Equivalencia de sistemas.

Metodología:

El alumno debe acostumbrarse a utilizar las notaciones y los símbolos algebraicos de las expresiones y ecuaciones. Es interesante también que realice el ejercicio inverso, esto es, en un contexto prefijado, idear un enunciado que se adapte a una expresión, ecuación o sistema.

En la resolución de las ecuaciones y de los sistemas, el alumno debe conocer perfectamente el manejo de las reglas, que serán enunciadas con la mayor claridad y precisión. También se procurará el ejercicio del sentido crítico e interpretativo, sobre las soluciones obtenidas, viendo si se adaptan o no a las condiciones del problema. En consecuencia, entre los problemas a realizar figurarán algunos que carezcan de soluciones válidas, y otros con más de una solución. Será también conveniente la interpretación geométrica de los resultados obtenidos al resolver un sistema, y en este sentido se estudiarán tanto los métodos analíticos como los aspectos gráficos en la resolución.

A destacar también entre los ejercicios, aquellos que contribuyan a afianzar el uso correcto de los paréntesis, de los signos y de las operaciones. Asimismo conviene incluir en el repertorio de los ejercicios, algunos que contengan aspectos geométricos, para consolidar algunas nociones básicas de las que muchos alumnos presentan graves carencias.

La experiencia parece indicar que no es un tema de difícil aprendizaje para el alumno medio, pero conviene tratar de evitar la caída en los aspectos rutinarios, fomentando aspectos críticos e imaginativos, a los que nos hemos referido anteriormente.

En el repertorio de los problemas a realizar son típicos los relacionados con números, edades, mezclas, aleaciones, grifos, móviles, porcentajes, figuras geométricas, etc., aparte de los ejercicios en los que predominan los aspectos operativos.

Sin pretender dar una relación cerrada de problemas, enumeramos a continuación algunos de ellos.

Nota.- Algunos de los ejercicios incluidos en la relación siguiente, van acompañados en letra pequeña de una nota explicativa respecto de la solución. Se trata, sobre todo, de destacar la intención didáctica con la que han sido propuestos.

Ejercicios:

1.- Si un número está representado por x, ¿cómo se expresarán a partir de x los siguientes números?:

a) El doble de x
b) La mitad de x
c) El resultado de elevar x al cuadrado y después restarle dos
d) El 25 % de x
e) El resultado de sumar 1 a x y elevar después al cuadrado
f) Otro número que, dividido por x, dé 2 como cociente y resto 1
g) La quinta parte del cuadrado de x

h) Un número que, al restarle x, dé como resultado la tercera parte de x más 2

2.- a) Resuelve analítica y gráficamente el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$$

b) Estudiar si el siguiente sistema tiene solución

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 4x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

Interpreta gráficamente la respuesta.

c) Comprueba que el sistema

$$\begin{aligned} 2.5x - 3.5y &= -6 \\ 10x - 14y &= -24 \end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones. Interpreta gráficamente el resultado.

3.- Mezclamos cierta cantidad de café de Colombia, cuyo precio es de 7 euros el kg con café de Brasil cuyo precio es de 5 euros el kg. ¿Qué cantidad de cada uno debemos emplear para obtener 5 kg de mezcla con un precio de 6.2 euros el kg?¿Y si quisiéramos obtener 5 kg de mezcla a un precio de 4.8 euros el kg? ¿Cómo debería ser el precio del kg de mezcla para que el problema tenga solución?

Solución: En el primer caso 3.75 kg de café de Colombia y 1.25 kg de café de Brasil. En el segundo caso evidentemente no existe solución. El sistema planteado nos conduciría a una de las cantidades negativa, lo que no tiene sentido. Para que exista solución el precio del kg de mezcla deberá estar comprendido entre 5 y 7 euros.

4.- Después de desarrollar y simplificar, resuelve las ecuaciones:

a) $(x+1)^2-(x-1)^2=8$; b) $(x+2)^2-x^2=24$

5.- En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 4 cm más que uno de los catetos, y el otro cateto mide 12 cm. Hallar las longitudes de los lados desconocidos y el perímetro del triángulo.

6.- Idear un enunciado de un problema geométrico para cada una de las ecuaciones:

a) $2x+2(x+3)=26$

b) $(x+6)^2=x^2+100$

Solución:
a) Hallar las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mide 26 cm sabiendo que la base es 3 cm mayor que la altura.
b) Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 10 cm. Hallar las longitudes de los otros dos lados sabiendo que la hipotenusa es 6 cm mayor que el otro cateto.

7.- Juan dice: "Cada cuaderno cuesta 1.5 euros, y cada bolígrafo 0.25 euros. Entre cuadernos y bolígrafos he comprado 7 objetos en total y me ha costado todo 4 euros". ¿Es cierto lo que dice Juan?.

Solución: No, porque la solución del sistema planteado es 1.8 cuadernos y 5.2 bolígrafos, lo que no tiene sentido.

8.- Idear un enunciado de un problema de mezclas para el sistema:

$$x + y = 30$$

$$1.6x + 2.4y = 30 \cdot 1.4$$

A continuación resolver el problema y criticar la solución encontrada.

9.- De dos ciudades distantes 270 km parten a la vez dos coches, uno al encuentro del otro. Uno de los coches circula a 75 km/h, y el otro a 60 km/h ¿Al cabo de cuánto tiempo se encontrarán? ¿A qué distancia estará el punto de encuentro de cada una de las ciudades?

10.- Idear un enunciado de un problema de móviles para el siguiente sistema. Una vez enunciado, resolver el problema.

$$x + y = 60$$

$$x - 2y = 0$$

Solución: De dos ciudades distantes 60 km parten a la vez dos coches, uno al encuentro del otro. Uno de los coches circula a doble velocidad que el otro. ¿A qué distancia estará el punto de encuentro de cada una de las ciudades?

11.- Idear un enunciado de un problema geométrico relacionado con un triángulo, que se resuelve con el sistema:

$$x + 2y = 20$$

$$2x - y = 0$$

Una vez escrito el enunciado resolver el problema.

Solución: El perímetro de un triángulo isósceles mide 20 cm y uno de los dos lados iguales mide el doble que la base. Hallar sus longitudes.

12.- Nos dicen que en un triángulo la longitud del lado menor es 6 cm menor que la del lado mediano, el cual a su vez tiene una longitud 6 cm menor que la del lado mas grande. También nos dicen que el perímetro mide 30 cm. Calcula las longitudes de los tres lados y, con ayuda de un compás, dibuja el triángulo. ¿Es posible?

Solución: Los "lados" miden 4 cm, 10 cm, 16 cm, que no pueden serlo de un triángulo por ser uno de ellos mayor que la suma delos otros dos.

13.- a) En un rectángulo la base es 3 cm mayor que la altura y el perímetro coincide con la longitud de la circunferencia que tiene a su base como diámetro. Halla las dimensiones del rectángulo y las áreas de las dos figuras.
b) Plantear y resolver, si es posible, el mismo problema en el caso de que fuera la altura 3 cm mayor que la base.

Solución: a) Base = 6.98 cm. Altura = 3.98 cm. Área rectángulo = 27.78 cm^2. Área círculo = 38.26 cm^2. b) No tiene solución.

14.- A las 16 h dos móviles están situados en los puntos A y B distantes 70 km. Las velocidades de A y B son de 60 km/h y 70 km/h respectivamente, y A corre detrás de B. Hallar a qué hora ambos móviles ocupan la misma posición.

Solución: La solución $t = -7$ significa que el encuentro se produjo 7 horas antes, es decir, a las 9 h.

Actividades con ordenador:

1.- Estudiar gráficamente cada uno de los sistemas:

a) $$\begin{aligned} 2x + 2y &= a \\ 4x + ay &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - y &= a \\ ax + y &= 0 \end{aligned}$$

según los valores de a, utilizando el programa *DERIVE for Windows*.

2.- Analizar el problema de mezclas cuyo planteamiento es:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 1.6x + 2y &= 5a \end{aligned}$$

según los valores de a mediante el programa *DERIVE for Windows*.
(Observar que sólo tienen solución aquellos problemas en los que el punto de corte esté situado en el primer cuadrante, y que esto ocurre cuando $1.6 \leq a \leq 2$)

Tema: Sistemas de ecuaciones lineales.

Materia: Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, de segundo curso de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales

Tiempo: 2 semanas

Objetivos:
– Saber utilizar los símbolos y las herramientas del lenguaje algebraico

para plantear y resolver ciertos problemas.
- Conocer la naturaleza de los problemas en relación con el conjunto de sus soluciones.
- Saber discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.
- Saber distinguir las soluciones válidas según el contexto de los problemas.
- Interpretar geométricamente el conjunto de las soluciones de los sistemas lineales con dos y con tres incógnitas.

Conceptos:
- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Soluciones de un sistema.
- Equivalencia de sistemas.
- Compatibilidad e incompatibilidad. Sistemas compatibles determinados e indeterminados.
- Ecuaciones de la recta y del plano en el espacio.

Metodología:

Es conveniente insistir en la utilización del lenguaje algebraico para "traducir" los enunciados de los problemas. Asimismo saber mediante el método de Gauss no sólo resolver sino también discutir cualquier sistema de ecuaciones lineales (aunque normalmente no pasemos de tres ecuaciones con tres incógnitas). Y criticar además las soluciones a un problema, viendo cuales de ellas se adaptan al contexto.

También llevar al convencimiento a los alumnos (mediante ejemplos, como planos coordenados, etc.) de que una ecuación lineal con tres incógnitas representa a un plano en el espacio, y de acuerdo con ello interpretar geométricamente el conjunto de las soluciones de los sistemas con dos o tres ecuaciones y con tres incógnitas.

Ejercicios:

1.- Estudia e interpreta geométricamente el sistema en cada caso:

a) $$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2 - y - z &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - y - z &= 0 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

Solución: a) Es un sistema compatible indeterminado que corresponde a dos planos secantes. b) Sistema compatible determinado. La solución es $x = 1, y = 1, z = 1$, que corresponde al único punto común de los tres planos.

2.- Estudia e interpreta geométricamente el sistema en cada caso:

a) $$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 0 \\ 2x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x + y &= 0 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Solución: a) Es un sistema incompatible. Dos de los planos son paralelos y distintos, y el tercero es secante con ambos. b) Sistema incompatible. Las tres rectas se cortan dos a dos en puntos que forman los vértices de un triángulo.

3.- Nuestro proveedor de pilas nos cobra por una pequeña, dos medianas y una grande 1.83 euros. En otra ocasión por dos pequeñas, tres medianas y dos grandes, 3.24 euros.

a) ¿Cuánto nos cuestan 5 pequeñas, 9 medianas y 5 grandes?
b) ¿Cuál es el precio de una pila mediana?
c) ¿Cuánto vale una pequeña mas una grande?
d) ¿Podemos calcular el precio de una pila pequeña?
e) Si añadimos la condición de que una pila grande vale el doble que una pequeña, ¿cuál es el precio de cada tipo de pila?

4.- Discutir, utilizando el método de Gauss, el sistema según los valores del parámetro a y resolverlo cuando a = -2:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + y + az &= 2 \\ x - y - az &= 2 \end{aligned}$$

Solución: Si $a = -1$, sistema incompatible. En todos los demás casos, sistema compatible determinado. Para $a = -2$, es $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$.

5.- Las edades de tres hermanos son tales que el quíntuplo de la edad del primero, más el cuádruplo de la edad del segundo, más el triple de la edad del tercero es igual a 60. El cuádruplo de la edad del primero, más el triple de la edad del segundo, más el quíntuplo de la del tercero es igual a 50. Y el triple de la edad del primero, más el quíntuplo de la del segundo, más el cuádruplo de la del tercero es igual a 46.

a) Plantear un sistema de ecuaciones que permita determinar las edades de los tres hermanos.

b) Resolverlo.

Solución: Las edades de los tres hermanos son 9 años, 3 años y 1 año.

Actividades con ordenador:

1.- Estudiar gráficamente la posición relativa de las tres rectas del plano:

$$r_1:\ ax - y = -1$$
$$r_2:\ x - ay = a$$
$$r_3:\ x + y = 1$$

según los valores de a, utilizando el programa *DERIVE for Windows*. Indica también para qué valores de a el sistema es compatible, y halla su solución.

Solución: Para $a = 0$, las tres rectas son concurrentes en el punto (0,1). Para $a = 1$, dos de las rectas son paralelas y distintas, y la tercera secante a ambas. Para $a = -1$, dos de las rectas son coincidentes y la tercera paralela. Sólo es compatible para $a = 0$ con solución $x = 0$, $y = 1$.

Tema: Sistemas de ecuaciones lineales.

Materia: Matemáticas II, de segundo curso de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud.

Tiempo: 3 semanas.

Objetivos:

- Transcribir situaciones reales como sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos cuando sea posible.
- Aplicar el Teorema de Rouché - Frobenius al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.
- Conocer y utilizar diversos métodos de resolución de sistemas (Gauss, Cramer, mediante la matriz inversa).
- Expresar con claridad y precisión conceptos y razonamientos.
- Estudiar y resolver sistemas que dependen de uno o más parámetros.
- Eliminar parámetros cuando las incógnitas dependen linealmente de ellos.
- Saber distinguir las soluciones válidas según el contexto de los problemas.

Conceptos:
- Sistemas de ecuaciones lineales.
- Soluciones de un sistema.
- Equivalencia de sistemas.
- Clasificación de los sistemas en cuanto al conjunto de sus soluciones.
- Matrices asociadas a un sistema.
- Sistemas homogéneos.
- Sistemas de Cramer
- Teorema de Rouché - Frobenius.

Metodología:

Después de haber puesto a prueba con éxito en numerosos ejercicios, los procedimientos de este tema, sería conveniente proponer algunos problemas de planteo. Convendría hacer ver en alguno de ellos, la necesidad de complementar los métodos anteriores para tratar adecuadamente ciertas cuestiones (los problemas que requieren soluciones enteras, por ejemplo), procurando así despertar la iniciativa de los alumnos en algunos casos sencillos.

Se pedirá un mayor grado de claridad, orden y precisión en la expresión de los conceptos y de las propiedades.

Además de los típicos ejercicios sistemáticos, también sería conveniente incluir cuestiones de tipo conceptual para clarificar ideas y para fundamentar conocimientos. También es interesante la realización de ejercicios que muestren la relación del tema con otras materias, o incluso con otros temas ya dados, reforzando así una visión de conjunto y dando nuevas perspectivas. La siguiente relación de ejercicios trata sobre aspectos complementarios, a tratar una vez conocidas las destrezas y los métodos específicos del tema.

Ejercicios:

1.- Aplicar el método de eliminación de parámetros para obtener las ecuaciones implícitas de un subespacio.

Ejemplo.- Sea $V \subseteq R^3$ el subespacio generado por los vectores $v_1(2,-1,1)$, $v_2(1,2,3)$. Si $(x,y,z) \in V$, será $(x,y,z) = \alpha(2,-1,1) + \beta(1,2,3)$. La eliminación de α y β nos lleva a $x + y - z = 0$, que es la ecuación de V.

2.- Recíprocamente, dadas las ecuaciones implícitas de un subespacio, hallar un sistema de generadores.

Ejemplo.- Sea V subespacio de R^3 de ecuaciones:

$$2x + y - z = 0$$
$$x + y + z = 0$$

Resolviendo el sistema se obtiene $x = 2\lambda$, $y = -3\lambda$, $z = \lambda$. Entonces $w \in V \Rightarrow w = (2\lambda, -3\lambda, \lambda)$, y el vector $(2,-3,1)$ es un generador de V.

3.- Cálculo de polinomios de interpolación.

Ejemplo.- Hallar el polinomio de segundo grado cuya gráfica pasa por los puntos A(2,1), B(3,9), C(4,21).

Solución: $y = 2x^2-2x-3$. Es interesante hacer ver que el sistema planteado es siempre de Cramer, por ser un determinante especial el de la matriz de coeficientes, llamado de Vandermonde. Y, en consecuencia, siempre existe un único polinomio interpolador de grado menor o igual que n, dados n + 1 puntos.

4.- Estudio de algunos aspectos de ciertas funciones.

El estudio de los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas, es equivalente al estudio de las aplicaciones lineales $f:R^n \to R^m$. A pesar de que este último quedó fuera del programa de segundo de Bachillerato, (y ya antes del programa de COU), podemos tratar algunos aspectos, mediante los correspondientes sistemas, una vez que se ha visto el tratamiento general de éstos.

Ejemplo 1.- Averiguar si la aplicación $f:R^3 \to R^3$, definida por la igualdad:

$$f(x,y,z) = (x-y-z, x+y-z, 2x+2y-z),$$

es una biyección.

Dado $(a,b,c) \in R^3$ arbitrario, se trata de ver que el sistema:

$$\begin{aligned} x - y - z &= a \\ x + y - z &= b \\ 2x + 2y - z &= c \end{aligned}$$

es de Cramer.

Ejemplo 2.- Hallar los valores de α para los que la aplicación $f:R^3 \to R^3$, definida por la igualdad: $f(x,y,z) = (\alpha x+y+z, x+\alpha y+z, x+y+\alpha z)$
es una biyección.

Como en el ejercicio anterior, se trata de ver, dado $(a,b,c) \in R^3$ cualquiera, para qué valores de a, el sistema:

$$\begin{aligned} \alpha x + y + z &= a \\ x + \alpha y + z &= b \\ x + y + \alpha z &= c \end{aligned}$$

es un sistema de Cramer.

5.- Resolución de problemas diofánticos elementales.

Ejemplo 1.- Los precios de las entradas de un teatro son: 18 euros las de patio, 12 euros las de palco y 6 euros las de platea. Gastamos 102 euros en comprar entradas de las tres clases, de modo que hemos comprado tantas butacas de platea como butacas de patio y de palco, y además, la suma de las de palco y platea equivale al triple de las de patio. Estudiar la naturaleza del problema.

Solución: Aunque el sistema es de Cramer, las soluciones son racionales no enteras, y dadas las condiciones del enunciado no tienen sentido. Se trata de un problema imposible.

Ejemplo 2.- Establece condiciones suficientes para que un sistema de ecuaciones lineales diofánticas admita soluciones enteras.

Solución: Además de la igualdad de los rangos, bastará añadir la condición de que la matriz de coeficientes tenga algún menor principal igual a 1 ó a –1, dado que, al aplicar las fórmulas de Cramer, el denominador es el que puede dar lugar a que sólo hayan soluciones racionales no enteras.

Ejemplo 3.- Una empresa constructora hace viviendas de uno, dos y tres dormitorios. ¿Cuántas de cada clase puede construir si en total hace seis viviendas y once dormitorios?

Solución: Supongamos hace x viviendas de un dormitorio, y viviendas de dos dormitorios, y z viviendas de tres. Entonces:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

es un sistema indeterminado y con un menor principal igual a 1. Sus soluciones son: $x = 1 + \lambda$, $y = 5 - 2\lambda$, $z = \lambda$. Como x, y, z $\in$ N, debe ser $\lambda \in N$, $1 + \lambda \geq 0$, $5 - 2\lambda \geq 0$, es decir $0 \leq \lambda \leq 2$.

$$\begin{aligned} \lambda = 0 &\Rightarrow x = 1, y = 5, z = 0 \\ \lambda = 1 &\Rightarrow x = 2, y = 3, z = 1 \\ \lambda = 2 &\Rightarrow x = 3, y = 1, z = 2 \end{aligned}$$

son las tres posibles soluciones.

6.- Ajuste de reacciones químicas.

Ejemplo.- En el esquema ácido + base = sal + agua, consideramos la reacción:

$xClH + y(HO)Na \rightarrow zClNa + tH_2O$

Contando los distintos átomos en los dos miembros de la reacción tendremos:

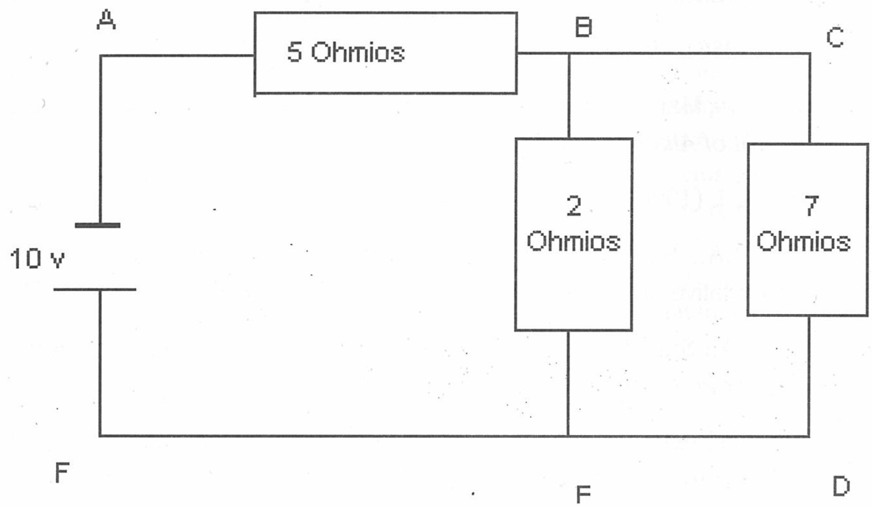
$$\begin{aligned} Cl &\rightarrow x = z \\ H &\rightarrow x + y = 2t \\ O &\rightarrow y = t \\ Na &\rightarrow y = z \end{aligned}$$

sistema cuya solución es de la forma: $x = y = z = t = \lambda$. Para l =λ:

$ClH + (HO)Na \rightarrow ClNa + H_2O$

7.- Aplicación al estudio de circuitos eléctricos.

Ejemplo.- Utilizar la ley de Ohm y las leyes de Kirchoff para hallar las intensidades de corriente i_1 en la línea AB, i_2 en BC, e i_3 en BE, en el circuito:



sabiendo que entre A y B hay una resistencia de 5 Ω, entre B y E otra resistencia de 2 Ω, y que entre C y D hay otra resistencia de 7 Ω. Y que la f.e.m. proporciona un potencial de 10 V.

Solución: La primera ley de Kirchoff en el nudo B del circuito nos dice: $i_1 = i_2 + i_3$

La segunda key de Kirchoff en el circuito ABEF, nos da: $10 = 5i_1 + 2i_3$

La segunda ley de Kirchoff en el circuito ACDF nos da: $10 = 5i_1 + 7i_2$

Resolviendo el sistema obtenemos: $i_1 = 90/59$ A; $i_2 = 20/59$ A; $i_3 = 70/59$ A;

Como comentario final, quisiera añadir que en grupos tan heterogéneos como los de Bachillerato, y mas aún en los de ESO, en donde es frecuente encontrar numerosos alumnos con escasos conocimientos y motivaciones para el estudio en general, y en especial para las Matemáticas, puede que no sea adecuado proponer algunas de las actividades anteriores al conjunto de toda una clase. Mas procedente podría ser la utilización de las clases de recuperación, o parte de otras clases, para trabajar los contenidos mínimos con los alumnos que presentan deficiencias y, al mismo tiempo, proponer a los demás alumnos este otro tipo de actividades que requieren algo más de atención y de interés.

Bibliografía

Aparicio Pedreño, J.J. (2002): "Ecuaciones lineales y anillos Conmutativos". *Extracta Mathematicae.* Vol. 17, Núm. 2, 247 - 257.

Bourbaki, N. (1972): *Elementos de Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad.

Boyer, C. (1986): *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad.

Camion, Levy, Mann. (1972): "Linear equations over a commutative ring". *Journal of Algebra.* 19, 432 - 446.

Dieudonné, J. (1996): *Abregé d'Histoire des Mathématiques*. Hermann.

Hermida, J.A., Sánchez Giralda, T. (1984): "Linear Equations over Commutative Rings and Determinantal Ideals". *Journal of Algebra.* 72 - 79.

Hermida, J.A., Sánchez Giralda, T. (1987): "Sur les anneaux de Prüfer". *Travaux en Cours* 22. Hermann. 117 - 123.

Steinitz, E. (1912): "Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern". *Math. Ann.* 71, 328 - 354.

J. J. Aparicio Pedreño, Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena