Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato

Marcelino J. Ibañes y Tomás Ortega

Resumen

En la investigación que se describe en este artículo se analiza el tratamiento de la demostración matemática que dan los libros de texto de Matemáticas I, de primer curso de Bachillerato, en el tema de Trigonometría. Esta investigación forma parte de una mucho más amplia que trata de describir los aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática por alumnos de ese nivel educativo. El análisis se ha llevado a cabo en el marco teórico dado por de Villiers (1993), Ibañes y Ortega (1997), y Harel & Sowder (1998), y en el mismo ha jugado un papel fundamental el sistema de categorías de contenido matemático definido en Ibañes (2001)[1].

Abstract

In this study we analyze how Math I textbooks (for 16- or 17-year-old students) deal with mathematical proofs in Trigonometry. Our paper is part of a much larger project whose aim is to try to describe the cognitive aspects of learning mathematical proofs at the age and level of education. The analysis has been carried out in the theoretical framework proposed by de Villers (1993), Ibañes y Ortega (1997) and Harel & Sowder (1998); the system of mathematical content categories laid out by Ibañes (2001) is also a fundamental part of our study.

Introducción

En el último cuarto de siglo la demostración matemática ha sido objeto de numerosas investigaciones desde el campo de la Didáctica de la Matemática y se han producido numerosas publicaciones que, según el tema tratado, se pueden agrupar en cuatro grandes bloques:

- Trabajos generales sobre el aprendizaje de la demostración: Lakatos (1978), Kitcher (1983), Arsac (1988), Alibert y Thomas (1991), ... De todos estos autores destacamos a Hanna (1989a-b) que piensa que en la aceptación de un teorema juegan un papel más importante que la existencia de una demostración rigurosa, su significado global, la com-

[1] Este trabajo es parte de un proyecto de investigación subvencionado por la D.G. de Enseñanza Superior BXX2000-0069

prensión del resultado y los conceptos subyacentes; y, en consecuencia, enuncia una serie de factores para la aceptación de un nuevo teorema: comprensión, relevancia, compatibilidad, reputación, y existencia de un argumento convincente. La misma autora, Hanna (1990), mantiene que el propio papel que juega la demostración en matemáticas conduce a la conclusión de que la demostración debe formar parte de cualquier curriculum.

- Trabajos sobre las funciones de la demostración: Bell (1976), Hersh (1993), Reid (1996), ... De estos autores destaca de Villiers (1993) quien, desarrollando las ideas de Bell, presenta un modelo en el que a las demostraciones las asigna cinco funciones. Éstas se hacen explícitas más adelante.

- Trabajos sobre niveles de demostración: Bell (1979), Van Dormolen (1977), Usiskin (1986), Balacheff (1987), Van Asch (1993), Ibañes y Ortega (1997 a-b), Miyazaki (2000), ... De todas las investigaciones llevadas a cabo en este campo, la que más ha influido en nuestro trabajo ha sido la desarrollada por Harel y Sowder (1998), de la que se incluye una breve reseña después.

- Trabajos sobre la demostración en el aula: Bell (1976), Galbraith (1981) Fischbein (1982), Martin y Harel (1989), Hanna (1990), Bero (1994), ... Martin y Harel (1989) describen una experiencia con estudiantes de magisterio de la Universidad de Illinois (USA) en la que se les solicitó decidir sobre la corrección de verificaciones inductivas y deductivas de determinadas proposiciones. Estos autores descubrieron importantes deficiencias de los alumnos sobre reconocimiento, distinción, veracidad y falsedad de los "esquemas de prueba".

En la investigación desarrollada en la Universidad de Valladolid se ha analizado la evolución de los esquemas de prueba de los alumnos de primer curso de bachillerato (Ibañes y Ortega, 2001), las dificultades que tienen esos alumnos en la identificación y reconocimiento de los procesos matemáticos (Ibañes y Ortega, 2002-a), y la influencia de las expresiones matemáticas (Ibañes y Ortega, 2002-b) en los esquemas de prueba de los alumnos. Asimismo, es evidente que los libros de texto influyen de forma decisiva en los procesos educativos y, por esta razón, se ha revisado buena parte de los manuales de Matemáticas I de primer curso de Bachillerato publicados en castellano, concretamente se han analizado los de once editoriales, y éstos han sido elegidos por ser los más conocidos y de mayor difusión –según las librerías especializadas-.

En este trabajo se describe un análisis especifico sobre contenidos de Trigonometría y para ello se han tenido en cuenta algunas de las categorías de contenido matemático definidas para ese fin en Ibañes (2001). En concreto se han analizado los siguientes aspectos:

- En cuanto al *esquema de prueba*, se observa la clase de justificación utilizada, y se sigue la clasificación de Harel y Sowder (1998), que se hace más explícita después.
- Si se trata de una demostración, se analizan las *técnicas empleadas – método, estilo y modo-*. En esta cuestión se sigue la clasificación de Ibañes y Ortega (1997). Para que no sea repetitivo se describen después.
- Por lo que se refiere a las *funciones de la demostración* (de Villiers, 1993) se observa si los textos valoran, o no, las que posee la prueba objeto de atención. Se enuncian un poco más tarde.
- En cuanto al *reconocimiento de procesos*, nos fijamos si hace alguna reflexión sobre ello, o sobre sus consecuencias.
- También se estudian las *expresiones* que utiliza. En particular, si habla de *hipótesis* y *tesis* o *conclusión*, si emplea las expresiones *si..., entonces*, *una condición necesaria*, etcétera, y si explica o no la terminología empleada.
- Finalmente, se tiene en cuenta si hace alguna consideración global del proceso seguido, si explica su significado, si distingue claramente entre el enunciado y la justificación, si señala otras posibles vías de actuación, etcétera.

Como ya se ha indicado, el marco teórico que se ha considerado para el análisis está basado en los trabajos de de Villiers (1993), de Ibañes y Ortega (1997a-b), y de Harel & Sowder (1998), y se complementa con las aportaciones realizadas por Ibañes y Ortega (2001 y 2002a-b). De Villiers asigna cinco funciones a la demostración matemática: *Verificación*, concerniente a la *verdad* de una afirmación; *Explicación*, *profundizando en* por qué es verdad; *Sistematización*, la *organización* de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas; *Descubrimiento*, es decir, el descubrimiento o invención de nuevos resultados; *Comunicación*, la *transmisión* del conocimiento matemático.

Por su parte, Ibañes y Ortega (1997a-b) consideran otros criterios más ligados a la resolución de problemas, y distinguen *tipos* –atendiendo a la estructura lógica del enunciado-, *métodos* –atendiendo a los procedimientos lógicos que se utilizan en la demostración-, *estilos* –atendiendo a los procedimientos matemáticos-, y *modos* –atendiendo a la forma de exposición-. En cuanto al tipo, se distinguen los de *condición necesaria o sufi-*

ciente, y el de *condición necesaria y suficiente*; si, además, se refieren a la existencia de algún objeto matemático, pueden ser de *existencia simple*, de *existencia y unicidad*, o de *imposibilidad*. Por lo que se refiere a los métodos, se consideran los siguientes: *silogismo*, *demostración por casos*, *reducción al absurdo*, *inducción completa*, *método constructivo*, y demostraciones por *analogía* y *dualidad*. Entre los estilos, se citan el *geométrico*, el *algebraico*, el de *coordenadas*, el del *análisis matemático*. Por último, se consideran dos modos de exposición: el *sintético* o *directo* y el *analítico* o *indirecto*.

Harel & Sowder (1998) tienen en cuenta la etapa cognitiva en el desarrollo matemático de los alumnos, consideran que "*Esquema de Prueba de una persona consiste en lo que constituye descubrimiento y persuasión para esa persona*" y el trabajo con alumnos les lleva a distinguir tres grandes categorías de esquemas de Esquemas de Prueba: De convicción externa (Rituales, Autoritarios, Simbólicos), Empíricos (Inductivos, Perceptuales), Analíticos (Transformacionales y axiomáticos). Para estos autores, cada una de las categorías de esta clasificación representa una etapa cognitiva en el desarrollo matemático de los alumnos y que los esquemas axiomáticos son, epistemológicamente, una extensión de los transformacionales, de manera que estos últimos constituyen una etapa inevitable para alcanzar los primeros.

Ibañes (2001) e Ibañes y Ortega (2001) analizan los esquemas que tienen los alumnos y, entre otras cosas, completan la clasificación de los esquemas empíricos y transformacionales de Harel y Sowder según la tabla adjunta. En esta clasificación sólo se ha considerado una evolución hasta los esquemas intuitivo-axiomáticos, que están caracterizados porque los axiomas que utilizan los alumnos responden únicamente a su propia intuición (que es lo que ocurre en este nivel educativo). Conscientes de la dificultad de esta empresa tratan de indagar la relación que existe entre las creencias de los alumnos y la realidad, qué esquemas creen que utilizan y cuáles están usando, y cuál es la evolución de los mismos en los alumnos. Para hacer estas indagaciones se considera la siguiente tipología:

Esquema declarado. Esquema de prueba que un alumno declara que ha utilizado.

Esquema utilizado. Esquema de prueba que un alumno ha utilizado.

Esquema aceptado. Esquema de prueba que acepta un alumno en el transcurso de una secuencia didáctica.

Esquema adherido. Esquema de prueba que acepta un alumno, con rechazo de los anteriores, en el transcurso de una secuencia didáctica.

Esquema inicial. Esquema de prueba que se estima posee un alumno al iniciar una secuencia didáctica.

Esquema final. Esquema de prueba que posee un alumno al finalizar una secuencia didáctica.

<table>
<tr><td rowspan="6">De convicción externa</td><td colspan="2">Experimentales</td><td colspan="2">Transformacionales</td></tr>
<tr><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inductivos</td><td>Particulares</td><td>Generales</td></tr>
<tr><td>Falsos</td><td>Auténticos</td><td>Incompletos</td><td>Completos</td></tr>
<tr><td>De un caso</td><td>De varios casos</td><td colspan="2" rowspan="2">Intuitivo-Axiomáticos</td></tr>
<tr><td>No Sistemáticos</td><td>Sistemáticos</td></tr>
</table>

La investigación desarrollada, además, pone de manifiesto que los alumnos de este nivel se encuentran en un estado de transición bajo la influencia de distintos esquemas, no siendo plenamente conscientes ni de sus diferencias ni de sus limitaciones; y, por consiguiente, utilizan uno u otro según las peculiaridades de lo que se les propone, o, incluso, emplean varios al mismo tiempo. Asimismo, los alumnos pueden evolucionar hacia los intuitivo-axiomáticos con una instrucción adecuada.

El reconocimiento de procesos y las expresiones que utilizan los alumnos son aspectos a tener en cuenta, y también han sido objeto de investigación de Ibañes y Ortega (2002a-b), y tienen su importancia en el análisis que nos ocupa, ya que, por una parte, los alumnos tienen que reconocer lo que constituye demostración frente a aquello que no lo es y, por otra, deben saber interpretar el lenguaje propio de los procesos de demostración, formalismos que, en general, no se interpretan adecuadamente. Nuestra tesis es que los libros de texto, como manuales que son para el uso del alumno, debieran contemplar los aspectos estudiados por los autores anteriores, que son los que conforman el marco teórico en el que debe ser analizada la demostración en matemáticas. Por tanto, no hay duda de que, hablando en términos comparativos, un texto hace un tratamiento de la demostración mejor que otro si incorpora todos estos aspectos.

Análisis realizado

En particular, se han estudiado las justificaciones que dan los textos para los siguientes resultados de Trigonometría: relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas; razones trigonométricas de ángulos notables; fórmulas trigonométricas para la suma y diferencia de ángulos, el ángulo doble y el ángulo mitad; el teorema de los senos; y, el teorema del coseno. No obstante, por razones de espacio, aquí sólo presentaremos lo que concierne al "**teorema del coseno**". Además, para facilitar la comprensión de cómo se ha realizado este análisis, a continuación se reseñan las distintas categorías antes citadas, acompañadas de unas tablas en las que se muestran las justificaciones que presentan las once editoriales consideradas (*Anaya*, *Bruño*, *ECIR*, *Edebé*, *Edelvives*, *Epígono*, *Everest*, *Hespérides*, *McGraw-Hill*, *Santillana*, *S.M.)*,. Sin embargo, las reflexiones y consideraciones son globales y hacen referencia al análisis completo de las once editoriales y de todos los tópicos analizados.

Clase de justificación utilizada y técnicas empleadas.
Estos aspectos se reflejan en la tabla 1.

Editorial	*Clase de Justificación*	*Técnica empleada*		
		Método	*Estilo*	*Modo*
Anaya	Demostración	Casos/Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
Bruño	Demostración	Casos/Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
ECIR	Demostración	Casos/Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
Edebé	Demostración	Casos/Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
Edelvives	Demostración	Casos/Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
Epígono	Demostración	Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
Everest	Demostración	Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
Hespérides	Demostración	Casos/Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
McGraw-Hill	Demostración	Casos/Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
Santillana	Demostración	Casos/Silogismo	Geométrico/Algebraico	Analítico
S.M.	Demostración	Casos/Silogismo	Geométrico/Algebraico	Sintético

Tabla a 1. Clase de justificación utilizada y técnicas empleadas en el teorema del coseno.

Funciones de la demostración. Ninguno de los libros de texto consultados incluye comentarios acerca de las funciones que cumplen las demostraciones expuestas.

Reconocimiento de procesos. El tratamiento que dan estos textos a este aspecto se resume en la tabla 2.

Editorial	*¿Reflexiona sobre el procedimiento?*	*¿Se refiere a sus consecuencias?*
Anaya	Lo titula "demostración"	Sí, a la resolución de triángulos. Además, da un ejemplo
Bruño	No	Sí, a la resolución de triángulos. Además, da ejemplos y propone ejercicios
ECIR	Lo titula "demostración"	Sí, a la resolución de triángulos. Además, da un ejemplo y propone ejercicios
Edebé	Lo califica de "demostración"	Sí, a la resolución de triángulos. Además, da un ejemplo y propone ejercicios
Edelvives	Lo califica de "demostración"	Sí, a la resolución de triángulos. Además, propone ejercicios
Epígono	Lo califica de "demostración"	Sí, a la resolución de triángulos. Además, da un ejemplo
Everest	Lo titula "demostración"	Sí, a la resolución de triángulos. Además, da un ejemplo y propone un ejercicio
Hespérides	Lo titula y se refiere al proceso como una "demostración"	Sí, a la resolución de triángulos. Además, da ejemplos y propone ejercicios
McGraw-Hill	Lo titula "demostración"	Sí, a la resolución de triángulos. Además, da ejemplos y propone ejercicios
Santillana	Lo califica de "demostración"	No, aunque da un ejemplo de resolución de triángulos y propone ejercicios
S.M.	No	No, aunque propone ejercicios de resolución de triángulos

Tabla 2. Reconocimiento de procesos en el teorema del coseno.

Expresiones que utiliza. Las expresiones propias del lenguaje matemático que los textos examinados utilizan en la demostración de este teorema se especifican en la tabla 3.

Editorial	*Expresiones*	*¿Explica su significado?*
Anaya	"en un triángulo cualquiera"	No
Bruño	El enunciado incluye sólo la fórmula $\Rightarrow$	- No
ECIR	"en todo triángulo" $\Rightarrow$	- No
Edebé	"en un triángulo"	No
Edelvives	"en un triángulo" $\Rightarrow$	No No
Epígono	"en un triángulo"	No
Everest	"en un triángulo" $\Rightarrow$	No No
Hespérides	"en un triángulo" $\Rightarrow$	No No
McGraw-Hill	El enunciado incluye sólo la fórmula	-
Santillana	"en todo triángulo"	-
S.M.	"en todo triángulo"	-

Tabla 3. Expresiones del lenguaje matemático utilizadas en el teorema del coseno.

Consideraciones globales: La visión global del proceso se recoge en la siguiente tabla 4.

Editorial	*¿Explica globalmente el proceso?*	*¿Comenta su significado?*	*¿Distingue entre el enunciado y la justificación?*	*¿Señala otras vías posibles de justificación?*
Anaya	No	Sí	Sí	Sugiere distintas relaciones entre a^2 y b^2+c^2 para distintas clases de triángulos
Bruño	No	No	No. Además el enunciado es incompleto	No
ECIR	No	Sí	Sí	No
Edebé	No	Sí	Sí	No
Edelvives	No	Sí	Sí	No
Epígono	No	No	Sí	No
Everest	No	Sí	Sí	No
Hespérides	No	Sí	Sí	Sugiere distintas relaciones entre a^2 y b^2+c^2 para distintas clases de triángulos
McGraw-Hill	No	Sí	Sí, pero el enunciado es incompleto	No
Santillana	No	No	Sí	No
S.M.	No	Sí	No	No

Tabla 4. Consideraciones globales en el teorema del coseno.

Para completar el análisis, interesa señalar que ninguno de los once libros de texto consultados dedica un tema específico para iniciar a los alumnos en la demostración matemática. Solamente tres editoriales incluyen un breve comentario referido a las demostraciones dentro de un capítulo que destinan a la resolución de problemas.

Reflexiones generales

A continuación se hace una referencia de las reflexiones que son consecuencia del análisis completo que se ha llevado a cabo (relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas; razones trigonométricas de ángulos notables; fórmulas trigonométricas para la suma y diferencia de ángulos, el ángulo doble y el ángulo mitad; el teorema de los senos; y, el teorema del coseno). Son estas:

1. *Clase de justificación utilizadas y técnicas empleadas*.

- Casi siempre se trata de demostraciones más o menos completas y rigurosas. Sólo en alguna ocasión no se justifica un resultado. Parece que sería conveniente proponer también, con todas las garantías, otras justificaciones alternativas para que los alumnos apreciaran las características de los distintos procesos.
- No se emplea otro *método* que el de *silogismo* (aunque, a veces, se consideran *casos*). Esto parece razonable, dado que los alumnos están iniciándose en las demostraciones.
- Los *estilos* son uniformes en cada teorema, lo que es consecuencia de las limitaciones propias del nivel de enseñanza con que tienen que trabajar los autores.
- Donde hay más variedad es en el *modo* de exposición, puesto que se han encontrado tanto el *sintético* como el *analítico*. Entendemos que el predominio del modo analítico constituye un acierto de los autores, puesto que este modo de exposición está más próximo de las claves del descubrimiento del resultado que el sintético.

2. *Funciones de la demostración*. Los libros de texto consultados no hacen ningún comentario sobre este aspecto.

3. *Reconocimiento de procesos*.

- No hay comentarios explícitos con el fin de llamar la atención sobre la clase de razonamiento que se hace, sus características, y sus efectos, o para distinguirlo de otras posibles justificaciones.
- La muestra más clara, en este sentido, que se encuentra en los textos, es la referencia al proceso, o su titulación, como una "demostración".
- En muchos casos ni siquiera se califica el procedimiento empleado.

4. *Expresiones que utilizan*.

- En los enunciados de los teoremas considerados que se refieren a fórmulas –los tres primeros-, evidentemente no incluyen las expresiones específicas del lenguaje matemático que se estudian en este trabajo. Pero, conviene destacar que algunos textos incluyen el símbolo $\Rightarrow$, y, al leerlo, habrá que utilizar alguna de esas expresiones; por lo tanto, en estos casos lo que señalamos es la ausencia de una expresión adecuada.

- En los teoremas de los senos y del coseno, aparecen las expresiones "en un triángulo", "en un triángulo cualquiera", "en todo triángulo", cuya incidencia se estudia en el capítulo II de Ibañes (2001).
- En otros teoremas, sobre todo los referidos a funciones, los textos examinados contienen algunas de las expresiones que se estudian en el capítulo IV de Ibañes (2001): "condición necesaria", "condición suficiente", "si, y sólo si", etcétera. La utilización de estas expresiones se hace general en los libros de texto de 2° de Bachillerato.

5. *Consideraciones globales*.

- En ningún caso se ha encontrado una explicación global del proceso, es decir, ninguna explicación de las líneas generales que se han seguido, lo que resulta fundamental para su comprensión.
- En muchos casos también falta un comentario acerca de lo que significa el teorema, de las relaciones que establece, y de su utilidad.
- También se ha podido observar que, muy frecuentemente, no se separa con claridad el enunciado del teorema de su demostración, lo que puede dificultar la distinción del papel que juega cada uno de ellos.
- Los autores se limitan a dar una demostración para cada teorema estudiado. Podría ser interesante presentar también otro tipo de justificaciones y alguna demostración más.
- Otra clase de justificaciones, como comprobaciones o explicaciones, pueden ayudar a preparar el terreno, por ejemplo, contribuyendo al convencimiento de que la proposición es cierta.
- Además, presentar dos o más demostraciones con distintos *estilos*, resulta muy ilustrativo. Por ejemplo, el teorema del coseno puede demostrarse de muchas maneras –algunas están recogidas en Esteban, Ibañes y Ortega (1998), páginas 192 a 195-. La del estilo *vectorial* es muy adecuada para que fuera expuesta, o propuesta, en el capítulo de vectores; sin embargo, ninguno de los libros consultados lo hace.

6. De los anteriores puntos se deduce que los autores de los textos se preocupan de demostrar los teoremas que enuncian para cumplir con un trámite obligado y no ser acusados de falta de rigor (paradoja de *inadaptación a la exactitud*, Brousseau 1998, página 74), pero emplean pocos recursos en hacer comprensibles esas demostraciones, en resaltar sus características, en detenerse en sus razonamientos, en reconocer sus técnicas, en destacar sus funciones, y en potenciar su utilización.

7. Esta ausencia de intención didáctica que se observa en el tratamiento que dan los libros de texto a la demostración, que se concreta en la uni-

formidad de métodos y estilos, en el silencio sobre sus funciones, en las casi inexistentes reflexiones sobre la naturaleza del procedimiento, en la ausencia de explicaciones sobre las expresiones que se utilizan, en la unánime carencia de explicaciones sobre el sentido global del proceso y de sus líneas maestras, y en el nulo interés por indicar otras vías de justificación para establecer afinidades y contrastes, debería ser tenido en cuenta para remediarla en lo posible.

Bibliografía

Alibert, D.; Thomas, M. (1991): "Research on mathematical proof". En Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, 215-230.

Arsac, G. (1988): "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **9(3)**, 247-280.

van Ash, A.G. (1993): "To prove, why and how?". *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, **2**, 301-313.

Balacheff, N. (1987): "Processus de preuve et situations de validation". *Educational Studies in Mathematics*, **18**, 147-176.

Bell, A. W. (1976): "A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations". *Educational Studies in Mathematics*, **7**, 23-40.

Bell, A. W. (1979): "The learning of process aspects of mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, **10**, 361-387.

Bero, P. (1994): "Pupil's understanding of mathematical proof". En: Bazzini (Ed.) *Theory and practice in Mathematics Education. Proceedings of the "Fifth international conference on systematic cooperation between theory and practice in Mathematics Education"*, 27-33. Grado, Italia.

Brousseau, G. (1998): *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

van Dormolen, J. (1977): "Learning to understand what giving a proof really means". *Educational Studies in Mathematics*, **8**, 27-34.

Esteban, M.; Ibañes, M.; Ortega, T. (1998): "*Trigonometría*". Síntesis (Colección: Educación Matemática en Secundaria, nº 20). Madrid.

Fischbein, E. (1982): "Intuition and Proof". *For the learning of Mathematics*. **3**, **2**, 9-18 y 24.

Galbraith, P.L. (1981): "Aspects of proving: a clinical investigation of process". *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 1-28.

Hanna, G. (1989 a): "More than Formal Proof". *For the Learning of Mathematics*, **9**(1), 20-23.

Hanna, G. (1989 b): "Proofs that prove and proofs that explain". *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, 45-51. París.

Hanna, G. (1990): "Some pedagogical aspects of proof". *Interchange*, **21**, 6-13.

Harel, G.; Sowder, L. (1998): "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283 . American Mathematical Society, Providence, USA.

Hersh, R. (1993): "Proving is convencing and explaining". *Educational Studies in Mathematics*, **24**, 389-399.

Ibañes, M. (2001): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Dirigida por *Tomás Ortega*.

Ibañes, M.; Ortega, T. (1997a): "La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria". *Educación Matemática*, **9**, **2**, 65-104. México, D.F.

Ibañes, M.; Ortega, T. (1997b): "Mathematical Proofs: Classification and Exemples for Use in Secondary Education". En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 109-155. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

Ibañes, M.; Ortega, T. (2001): "Un estudio sobre los *esquemas de prueba* en alumnos de primer curso de bachillerato". *UNO*, **28**, 39-59. Barcelona.

Ibañes, M.; Ortega, T. (2002-a): "Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato". *Enseñanza de las Ciencias.* (En prensa) Barcelona.

Ibañes, M.; Ortega, T. (2002-b): Interpretación de algunas expresiones usuales en los enunciados de los teoremas. Remitido para su publicación.

Kitcher, P. (1983): *The nature of mathematical knowledge*. Oxford University Press, New York.

Lakatos, I. (1978): *Pruebas y refutaciones*. Alianza Editorial. Madrid. (El original es de 1963-1964).

Martin, W. G.; Harel, G. (1989): “Proof frames of preservice elementary teachers”. *Journal for Research in Mathematics Education.* **20**, **1**, 41-51.

Miyazaki, M. (2000): “Levels of proof in lower secondary school mathematics”. *Educational Studies in Mathematics*, **41**, 47-68.

Reid, D.A. (1996): “The role of proving: studens and mathematicians”. En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 185-199. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

Semadeni, Z. (1984): “Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training”. *For the Learning of Mathematicas*, 4(1), 32-34.

Usiskin Z.P. (1986): “A pretrigonometry proof of the reflection property of the ellipse. Numerische Quadratur ueber partielle Integration”. *Coll. Math. J.* v. 17(5) p. 418-422. *MESC.*

de Villiers, M. (1993): “El papel y la función de la demostración en matemáticas”. *Épsilon*, **26**, 15-30. Original de 1990.

Varios Autores (Libros de texto de Primer Curso de Bachillerato): *Anaya* (Colera y otros, 1996); *Bruño* (Sánchez y Rodríguez, 1997); *ECIR* (Ramírez y otros, 1998); *Edebé* (Biosca y otros, 1998); *Edelvives* (Monteagudo, Paz y Cámara, 1997); *Epígono* (Navas, 1997); *Everest* (Arranz y otros, 1999); *Hespérides* (Primo y otros, 1997); *McGraw-Hill* (Abellanas, Martímez-Mediano y Martínez, 1995); *Santillana* (Negro y otros, 1996); *S.M.* (Vizmanos y Anzola, 1996).

Marcelino J. Ibañes Jalón. Instituto “Vega del Prado”. Valladolid. Línea de trabajo: Demostración y pruebas en secundaria.
Correo electrónico: marcel33@terra.es.

Tomás Ortega del Rincón. Facultad de Educación. Universidad de Valladolid. Líneas de trabajo: Desarrollo Curricular, Didáctica del Análisis y Pensamiento Numérico y Algebraico.
Correo electrónico: ortega@am.uva.es