

El pensamiento geométrico espacial en los diferentes niveles de enseñanza

Oscar Sardella, Adriana Berio y Silvana Mastucci

Introducción

En ocasión de la realización de la VI Reunión de Didáctica de la Matemática del Cono Sur realizada en Buenos Aires, Argentina, en Julio de 2002, el mismo grupo de docentes que escribimos el artículo "Poliedros en el aula" que se publicó en el volumen 49 de esta revista, presentamos en un taller la ampliación y continuación de la experiencia allí relatada, al nivel terciario.

Desarrollo del taller

Se realizó en tres encuentros con la siguiente distribución de actividades:

Primer encuentro:

- *Encuesta*
- *Proyección de un video donde se muestra una experiencia realizada en el Colegio de Primaria Aguamansa, Tenerife – España, con alumnos de primer grado, cedido gentilmente por el profesor Antonio Martín Adrián.*
- *Trabajo práctico para alumnos de escuela media con la evaluación correspondiente.*

Segundo encuentro:

- *Exposición y realización de poliedros mediante la técnica de origami, a cargo de la profesora Susana Arashiro.*

Tercer encuentro:

- *Realización de una actividad realizada con alumnos de primer año del nivel terciario del Profesorado de Matemática.*

Encuesta:

La misma apuntó a indagar si el tema de poliedros se desarrolla en los diferentes niveles y con qué intensidad. De la misma rescatamos seis opiniones, dado que las restantes se encuentran dentro de ellas.

Las respuestas seleccionadas fueron las siguientes:

“Trabajo con chicos cuyas edades oscilan entre 12 y 13 años, es el año de cambio: pasan de la escuela primaria a la secundaria. De mi experiencia observo que se trabaja poco, en la primaria, en geometría del espacio y en construcciones geométricas basadas en sus propiedades. No tienen hábito del uso del compás. Sólo trabajan en espacio con algunos poliedros y cuerpos geométricos, pero encaminado al cálculo de volúmenes.” (Aleen - Canelones - Uruguay)

“Trabajo en dos escuelas:

Escuela rural: donde sólo somos tres docentes que planificamos intentando articular contenidos. Es por eso que trabajamos geometría desde primer año (6 años) hasta el séptimo año (12 años) de igual manera que los otros bloques (numeración y cálculo, probabilidad, medición).

Escuela privada (en la ciudad) : desde hace cuatro años se ha revalorizado la enseñanza de la geometría y se articulan los distintos niveles de enseñanza teniendo en cuenta secuencias didácticas de geometría.” (Nancy - Tres Arroyos - Argentina)

“La importancia se la dan los docentes, algunos la enseñan de una forma más profunda y esmerada y otros sólo para cumplir con lo que se requiere desde los contenidos” (Virginia - Ciudad De Buenos Aires - Argentina)

“Existe un rechazo por parte de los alumnos porque les cuesta representar en el plano o realizar proyecciones. En el momento en que el alumno se pone en contacto con lo tangible aprecia el valor de todo aquello que lo rodea” (Silvia - Ciudad De Buenos Aires - Argentina)

“Como trabajo en la formación de profesores, procuro enfatizar la importancia de la enseñanza de la geometría como medio para desarrollar algunas capacidades matemáticas: comunicar, argumentar, representar, conjeturar, validar hipótesis, etc. También como para desarrollar la percepción espacial y el pensamiento geométrico.” (Nelson - Brasil)

Video

En el mismo se observó cómo trabajan los alumnos de primer grado de la escuela antes mencionada.

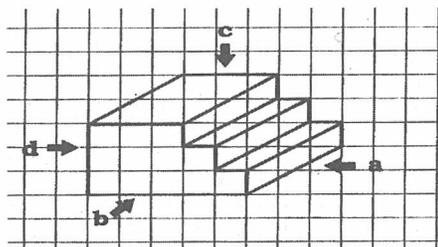
Las actividades realizadas muestran con claridad como los alumnos reconocen los diferentes poliedros por el número de caras, por sus nombres y desarrollos planos. Finalmente se proyectaron secuencias de actividades integradoras como ser de lecto-escritura.

Actividades seleccionadas para alumnos de escuela media

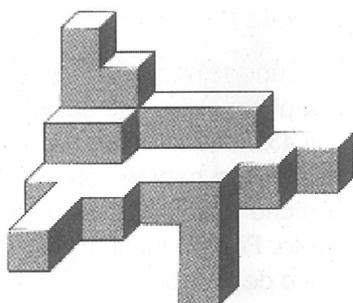
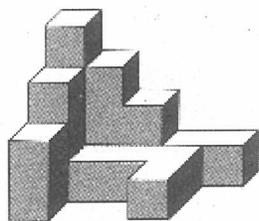
Se les entregó a los asistentes un trabajo práctico para que lo desarrollen grupalmente. Los ejercicios propuestos fueron los siguientes:

- 1) Observar el siguiente cuerpo y dibujar ¿qué es lo que se ve?. Según nuestra ubicación:

- a) de frente
- b) de costado
- c) desde arriba
- d) desde atrás

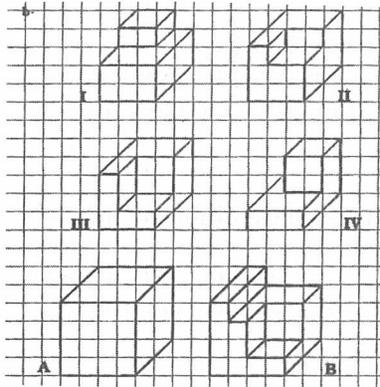


- 2) Encontrar el volumen de la figura, teniendo en cuenta la unidad cúbica. (la parte oculta se ve como la esquina de una caja).

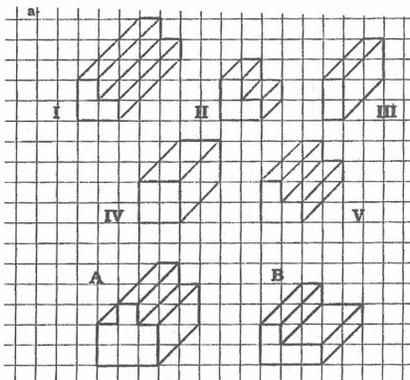


3) ¿Cuál de las siguientes piezas fue recortada del cuerpo A para obtener el cuerpo B?

a)



b)



4) *Los cubos de Platón*

A menudo se hace referencia a la clásica leyenda del problema délico de duplicar el área de un cubo. Filoponus cuenta que los atenienses, en el 432 a.C., infectados por esa plaga, fueron a consultar a Platón. Previamente habían consultado al oráculo de Delos, y Apolo les había dicho que debían duplicar las dimensiones del altar de oro del templo. Fueron incapaces de hacerlo. Platón, el más grande matemático de la época, les dijo que estaban siendo castigados por haber descuidado la sublime ciencia de la geometría, y deploró que no hubiera entre todos ellos un solo hombre capaz de resolver el problema.

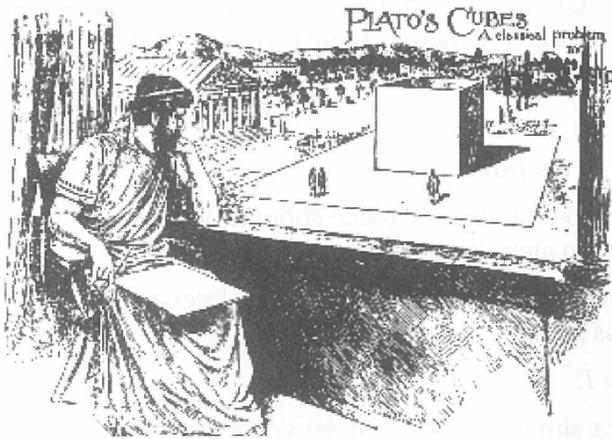
El problema délico, que es nada más y nada menos que la duplicación del cubo, suele confundirse generalmente con el de los cubos de Platón, a tal punto que los autores no familiarizados con la matemática los mezclan terriblemente. Este último problema es el a veces llamado *Números Geométricos de Platón*, y usualmente se agrega que muy poco o nada se sabe acerca de las verdaderas condiciones del problema.

Algunos autores sostienen que sus términos se han perdido.

Hay una antigua descripción de un enorme cubo erigido en el centro de una plaza embaldosada, y no hace falta un esfuerzo de la imaginación para asociar este monumento con el problema de Platón.

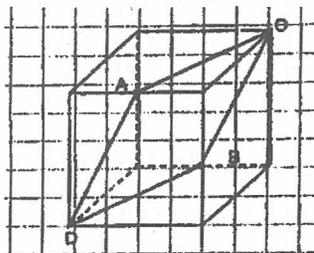
La ilustración muestra a Platón contemplando el enorme cubo de mármol construido con un cierto número de cubos más pequeños. El monumento descansa en el centro de una plaza cuadrada pavimentada con similares bloques cúbicos de mármol. En ese pavimento hay tantos cubos como en el monumento, y todos ellos son precisamente de la misma medida.

Establezca la cantidad de cubos necesaria para construir el monumento y la plaza cuadrada en la que está situado, y habrá usted resuelto el gran problema de los Números Geométricos de Platón



- 5) Un cubo de madera de 4 cm de lado está pintado en toda su superficie exterior de color azul. Realizando cortes horizontales y verticales se obtienen 64 cubitos de 1 cm de lado. Determina el número de cubitos que tienen tres ; dos; una y ninguna caras azules respectivamente.

- 6) En el siguiente cubo, los puntos A y B son puntos medios de las aristas sobre las que se encuentran. ¿Qué tipo de figura es ABCD? Justificar.



Como consideramos que a partir de la percepción visual es que se acumula gran parte del conocimiento geométrico elemental, seleccionamos los ejercicios anteriores que ayudaron para verificar lo mencionado.

Esta afirmación fue validada durante la puesta en común con nuestros colegas asistentes al taller.

Origami

Con la colaboración de la profesora Susana Arashiro que mediante la técnica de plegado de papel (origami), se construyeron distintos poliedros regulares y no regulares y se analizaron sus propiedades.

La clase ayudó a encontrar un nuevo “camino” para la visualización de estos cuerpos geométricos, ya que la misma es compleja para los alumnos de los distintos niveles.

Simetría en los poliedros

Se desarrolló un trabajo práctico sobre simetría en los poliedros experimentado con alumnos de nivel terciario.

En este trabajo práctico nos ocuparemos del análisis de algunas simetrías de los poliedros regulares.

Definición 1:

La palabra simetría, por su origen griego, significa **con medida** (sun: con, metron: medida), y en su sentido más general implica una idea de armonía, de algo bien proporcionado, bien equilibrado.

Un segundo sentido de la palabra simetría, es la que se usa, por ejemplo, en el lenguaje de los arquitectos, o sea de la **simetría bilateral**: la que indica una similitud de las partes opuestas, la reproducción exacta a la

izquierda, de un eje o de un plano, de lo que está a la derecha. Desde este punto de vista la simetría es un concepto estrictamente geométrico.

Definición 2:

Un **plano de simetría** es un *espejo*. Un plano de simetría de un poliedro es un espejo que un trozo del poliedro lo refleja exactamente en el otro trozo.

Definición 3:

- Un **eje de rotación** de un poliedro es una recta que si se gira el poliedro alrededor de ésta, antes de dar la vuelta completa el poliedro presenta el mismo aspecto que en la posición inicial.

Por ejemplo, un eje de rotación del cubo es el que pasa por los centros de dos caras opuestas. El *orden de rotación* de este eje es 4, porque hay un giro (en este caso el de 90°) que si se hace cuatro veces se llega a la posición inicial.

- En la rectas donde se cortan dos planos de simetría hay un eje de rotación. El *orden de rotación* de estos ejes es igual al número de planos que se cortan en ese eje.

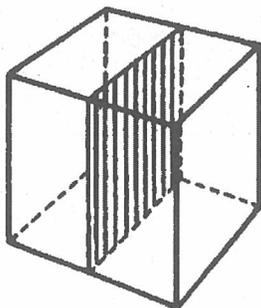
Los poliedros regulares (al igual que los cuadriláteros) pueden clasificarse en función de sus simetrías.

Se encuentran tres grandes grupos:

- El del tetraedro
- El del octaedro y el cubo
- El del dodecaedro e icosaedro.

Actividad 1:

Describir las distintas posiciones de los planos de simetría del cubo.

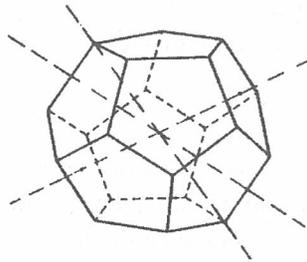


Actividad 2:

Describir la posición de los planos de simetría del tetraedro.

Actividad 3 :

Analizar el siguiente párrafo, completar las cantidades que faltan en cada caso e indicar en la figura cada tipo de eje:



“El dodecaedro tiene tres tipos de ejes de rotación:

- Ejes de rotación de **orden 5**, que pasan por los centros de las caras. Existen..... ejes este tipo. *Eje A.*
- Ejes de rotación de **orden 3**, que pasan por los vértices opuestos del dodecaedro. Existen..... ejes de este orden. *Eje B.*
- Ejes de rotación de **orden 2**, que pasan por los puntos medios de aristas opuestas y son perpendiculares a planos de simetría del poliedro. Hay 15 ejes de este tipo. *Eje C.*

Actividad 4:

Completar las siguiente tablas

A) PLANOS DE SIMETRÍA DE LOS POLIEDROS (DESCRIPCIÓN Y CANTIDAD)

Poliedro	Paralelos a pares de caras	Perpendiculares al segmento que une pares de vértices	Pasan por puntos medios de pares de aristas opuestas	Pasan por pares de aristas opuestas y cortan por el puntomedio a otro par de aristas
Tetraedro					
Cubo			
Octaedro			3		6	
Dodecaedro						15
Icosaedro						15

B) EJES DE ROTACIÓN DE LOS POLIEDROS (DESCRIPCIÓN, CANTIDAD Y ORDEN)

Poliedro	Ejes de orden 2	Ejes de orden 3	Ejes de orden 4	Ejes de orden 5
Tetraedro	3		
	Perpendiculares a secciones cuadradas	Perpendiculares a secciones triángulos equiláteros		
Cubo	4	
	Perpendiculares a planos de simetría	Perpendiculares a secciones hexagonales		Perpendiculares a planos de simetría
Octaedro	6	4	3	
Dodecaedro
	Perpendiculares a planos de simetría	Perpendiculares a secciones hexagonales regulares o dodecágono		Perpendicular a sección dodecágono regular
Icosaedro	15	10		6

Actividad 5:

Determinar área y perímetro de cada una de las secciones del cubo determinadas por los planos de simetría en función de la arista del mismo.

Comentario final

Al finalizar el taller se hizo una evaluación del mismo que sirvió para verificar que las expectativas de logro propuestas fueron alcanzadas. Las mismas se basaron en el estudio de los poliedros en general, reconocimiento y uso de las formas bidimensionales y tridimensionales para la resolución de problemas y la aplicación de los conceptos de ubicación y transformación en el espacio.

Bibliografía

- Alsina, Claudi; Burgués, Carme; Fortuny, Josep (1991): *Materiales para construir la geometría. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Nº11*. Ed. Síntesis. Madrid.
- García Arenas, J. ; Beltrán, C. (1998): *Geometría y experiencias*. Addison Wesley Longman, Madrid.
- Guillén Soler, G. (1991): *Poliedros. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Nº15*. Ed. Síntesis. Madrid.
- Villella, J. ; Crespo Crespo, C. ; Ponteville, C. (1999): *Cuando la geometría es el tema de la reflexión matemática*. Universidad Nacional de General San Martín.
- Contenidos Básicos Comunes* (1995): Ministerio de Cultura y Educación de la Nación. Consejo Federal de Cultura y Educación. República Argentina.

Oscar Sardella, Adriana Berio y Silvana Mastucci son profesores del Instituto Superior del Profesorado "Joaquín V. Gonzalez" y de la escuela de enseñanza medio ECOS - Escuela Secundaria. Buenos Aires. República Argentina.

Correos electrónicos: oscarsardella@hotmail.com
aberio@ciudad.com.ar
smastucci@hotmail.com