La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las Matemáticas a través de la resolución de problemas [1]

Matías Camacho Machín
Luz Manuel Santos Trigo

Resumen

¿Qué tipo de actividades se deben considerar en una instrucción que promueva el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas? ¿Cuál es la importancia del empleo de distintas representaciones en el proceso de solución? ¿Qué aspectos del quehacer matemático se favorecen con el empleo de la tecnología en la solución de problemas? En este trabajo se presenta una actividad donde se destaca la relevancia de buscar distintos caminos o formas de solución de un problema. Se ilustra la importancia de utilizar varias representaciones que permiten analizar el problema a través de distintos recursos y estrategias. Las representaciones dinámicas y algebraicas resultan importantes en el análisis y exploración de relaciones, conexiones y extensiones que emergen durante el proceso de solución.

Abstract

What type of activities should mathematical instruction consider in order to promote students´ development of problem solving strategies? What aspects of mathematical practice are enhanced when technological tools are used in problem solving instruction? In this paper we present a mathematical task to illustrate the importance of searching for different ways to represent and solve the task. During the solution process it becomes important to formulate and pursue questions that emerge from both dynamic and algebraic approaches. Thus, learning mathematics is seen as an ongoing process to find meaning and connections among distinct ways to approach the task.

En los últimos años la idea de que los estudiantes aprendan matemáticas a través de la resolución de problemas se presenta como relevante en casi todas las propuestas curriculares (NCTM, 2000; BOC, 2002(55); SEP,1996). Se sugiere que los estudiantes construyan su propio conocimiento a partir de procesos que involucran la problematización de los contenidos en estudio.

Las actividades de resolución de problemas posibilitan la aplicación de conocimientos, conceptuales y de procesos, y el descubrimiento

[1] Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto Conacyt –México con referencia Nº 42295-S.

> de otros nuevos. Experimentar, particularizar, conjeturar, elegir un lenguaje apropiado, probar una conjetura, generalizar, utilizar distintas partes de las matemáticas, verificar una solución, etc., son una buena forma de convencer al alumnado de su capacidad para intentar la resolución de problemas (BOC, 2002, p. 6266).

En definitiva, a la resolución de problemas se le reconoce como el centro de la actividad matemática. Es decir, en el proceso de aprender matemáticas se reconoce la importancia de que el estudiante se plantee interrogantes, formule conjeturas, utilice distintas representaciones, desarrolle varias estrategias y un lenguaje que le permita expresar y comunicar sus resultados. En este contexto, un aspecto fundamental asociado con la creación de un ambiente donde el estudiante reconozca y valore la necesidad de problematizar su aprendizaje lo constituye el tipo de problemas o actividades con las que debe enfrentarse en sus experiencias de aprendizaje.

En este artículo proponemos una actividad donde se ilustran aspectos importantes del quehacer matemático que emergen durante el proceso de solución. En particular, se destaca la importancia de examinar el problema desde distintos ángulos y buscar varios caminos para su solución. Así durante el proceso de búsqueda de resultados aparecen distintos tipos de recursos, representaciones y estrategias matemáticas. En especial se destaca la relevancia de emplear algunos instrumentos tecnológicos, como la calculadora simbólica y el software dinámico en las etapas que van desde la fase inicial de la comprensión del problema y diseño de un plan de solución, hasta la búsqueda de conexiones o extensiones del problema. La idea de emplear la tecnología en los procesos de resolución de problemas es consistente con los principios del currículo actual, tanto de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) como del Bachillerato. En el currículo del Bachillerato se establece explicitamente:

> ...Es necesario el uso de todos aquellos recursos tecnológicos (calculadoras gráficas, programas informáticos e Internet) que resulten adecuados para facilitar la visualización, la comprensión, la experimentación, la reflexión, el análisis, así como para el desarrollo de procedimientos rutinarios... (BOC, 2002, 59).

De la misma manera, el currículo de la ESO señala que:

> ...este currículo se decanta decididamente por la utilización de software educativo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas...(BOC, 2002, 55), p. 6266)

El tema que sirve de contexto para la actividad que desarrollamos es el estudio de la variación, y durante el análisis de este concepto se muestra la necesidad de usar distintas representaciones que ayudan no sólo visualizar su comportamiento sino también a relacionarlo con otras ideas y aplicaciones. Una meta importante es que el proceso de resolución de un problema se transforme en un mecanismo de reflexión constante para el estudiante que le permita no solamente aplicar sus conocimientos previos, sino que también sea un medio para comprender y desarrollar nuevos conceptos y recursos matemáticos.

¿Existe otro camino para resolver el problema? ¿Qué significa la solución en términos de la información o datos del problema? ¿Es posible generalizar la forma de resolver el problema? ¿Son los métodos de solución aplicables a otros problemas?. Son preguntas que los estudiantes deben discutir durante sus procesos de resolución. Así, el resolver un problema o el tratar de entender un concepto o idea matemática se convierte en una plataforma que permite al estudiante, a través de la formulación de preguntas, identificar y explorar conexiones que le ayudan extender sus caminos de solución o entendimiento de las matemáticas (Santos, 1998).

En el diseño de una actividad como la que vamos a presenar, resulta importante realizar un análisis de su potencial previo a su uso o aplicación con los estudiantes. Así será conveniente identificar los elementos de una estructura que permitan ubicar las metas u objetivos de la actividad y su relación directa con el currículo. Aquí se enuncian algunos componentes que pueden servir de guía tanto en el diseño de la actividad como la forma de presentarse en la instrucción.

Planteamiento del problema inicial

Es importante que la actividad o problema se sitúe en un contexto específico. Una nota de un periódico o una revista puede ser un punto de partida para introducir el problema o actividad. La idea es que el estudiante comience a ubicar los elementos importantes del problema como resultado de establecer relaciones dentro de una situación que le sea familiar. Esto plantea la necesidad de que vaya desarrollando un lenguaje o notación propia que le permita entender y encontrar el sentido a la situación. Por ejemplo, en este caso la situación involucra a un coleccionista que está interesado en reparar una mesa antigua[2].

> La mesa que adquirió un coleccionista de objetos antiguos muestra un agujero que se produjo al derramarse una gota de líquido altamen-

[2] Un enunciado de este problema en el contexto matemático es: En el plano cartesiano se tiene un punto fijo P (3, 2). Por ese punto P pasa una recta que corta a los dos ejes en los puntos B y E respectivamente y se forma la región ABE. Se observa que al mover el punto B sobre el eje X, el área de la región cambia. ¿Dónde ubicar el punto B de tal manera que el área de la región tenga el valor mínimo?

te concentrado. La perforación se ubica exactamente a tres cm hacia la derecha sobre la arista horizontal y dos cm sobre la vertical (figura 1) a partir de la esquina de la mesa. El propietario quiere reemplazar la esquina que contiene el agujero de tal manera que el corte se realice en forma de triángulo rectángulo y que tenga la mínima área. ¿A qué distancia de la esquina se deben ubicar los puntos de corte para lograr este objetivo?

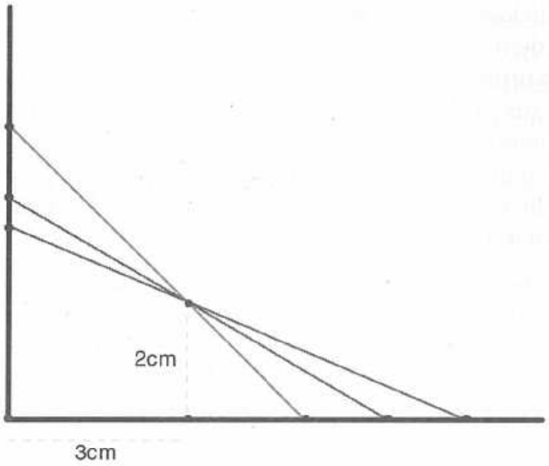


Figura 1. Tres posibles cortes de la esquina de la mesa que se desea reemplazar.

Comprensión del problema

¿Cuáles son los datos relevantes del problema? ¿Cómo representarlos? ¿Cómo encontrar el área del pedazo de madera a reemplazar? ¿Es realmente diferente el valor del área cuando el corte toma distintas posiciones? Éstas son algunas preguntas iniciales que los estudiantes pueden abordar, para eventualmente identificar los recursos matemáticos que le sugieran plantear caminos de solución. Por ejemplo, la misma forma de la mesa puede dirigir al estudiante a pensar en el uso de un sistema cartesiano que permita establecer una representación del problema (figura 2). Resulta también importante introducir una notación pertinente que ayude a identificar con precisión los elementos claves del problema. Además, la notación juega un papel importante en la identificación y tratamiento de relaciones y en la comunicación de resultados.

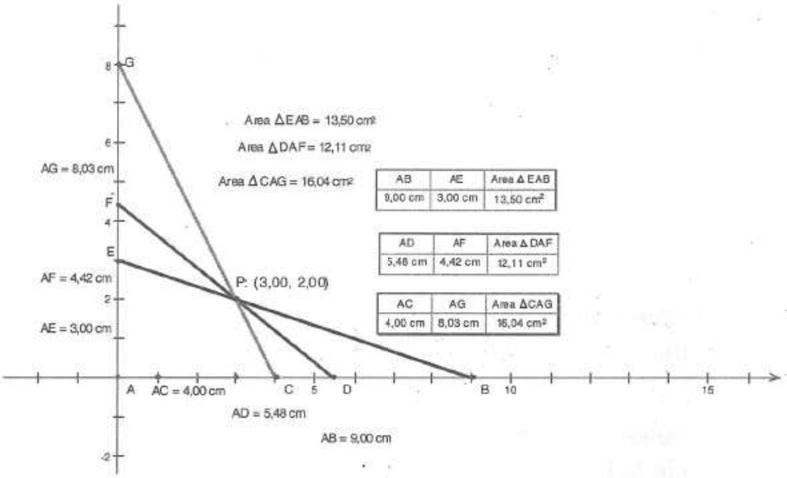


Figura 2. Representación del problema en el plano cartesiano.

En la representación del problema (figura 2) se observa que el primer cuadrante del sistema cartesiano representa la esquina de la mesa y el agujero es el punto P(3,2) y los segmentos GC, FD, EB representan los posibles cortes. Una estrategia importante en la resolución de problemas es la consideración de casos particulares para identificar el comportamiento de las variables o parámetros asociados el problema. En esta dirección se calculan las áreas correspondientes de los tres triángulos rectángulos que se observan en la figura 2. Se nota que, en efecto, el valor del área cambia en relación de la ubicación del corte. Así con estos elementos tiene sentido plantearse la interrogante de ubicar el corte que incluya la menor área.

Hacia el diseño de un plan de solución y su implementación

Una manera de afrontar la resolución del problema será la de emplear un software dinámico con el que se construye una representación del problema. En esta representación se analizan los efectos que se producen en el área al variar la longitud de alguno de los lados del triángulo. Una propiedad importante en esta representación es que el punto B que se ubica sobre el eje X es móvil y que para cada posición sobre el eje genera un triángulo con dimensiones diferentes (figura 3). Es decir, al mover el punto B sobre el eje X se pueden generar una infinidad de triángulos.

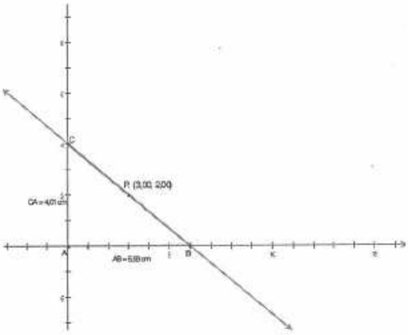


Figura 3. Representación dinámica del problema.

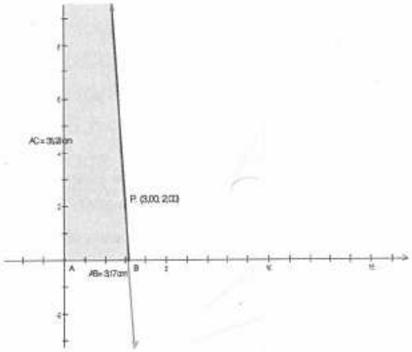
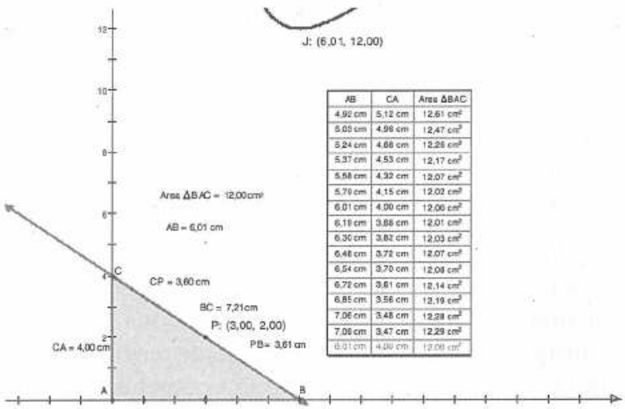


Figura 4. El triángulo cuando el punto B se ubica cerca del punto $x = 3$.

¿Cómo calcular el área de los triángulos que se forman al mover el punto B sobre el eje X? La idea ahora es establecer una relación funcional entre un lado del triángulo y su correspondiente área. Con la ayuda del software se puede directamente determinar el área del triángulo y también representar gráficamente el comportamiento de las áreas de todos los triángulos que se generan al mover el punto B sobre el eje X, en función de uno de los lados. Aquí conviene observar que cuando el punto B se acerca al valor x = 3 (figura, 4) el área del triángulo aumenta y cuando B coincide con ese valor, el triángulo desaparece ya que la recta se convierte en una recta perpendicular al eje X. Esto significa que para encontrar el punto donde se situará el triángulo de área mínima bastará con mover el punto B sobre la semirrecta que se ubica hacia la derecha del punto x = 3. Es decir, el dominio de la función área es el conjunto de puntos mayores que tres unidades (el intervalo $]3,+\infty[$).

Así, con el software se determina el área de los triángulos rectángulos que se forman al mover el punto B sobre la semirrecta de origen el punto x = 3. En la figura 5 se observa parte de la gráfica que representa el comportamiento del área al variar las dimensiones del lado del triangulo que se encuentra sobre el eje X.



AB	CA	Area ΔBAC
4,92 cm	5,12 cm	12,61 cm²
5,03 cm	4,96 cm	12,47 cm²
5,24 cm	4,68 cm	12,26 cm²
5,37 cm	4,53 cm	12,17 cm²
5,58 cm	4,32 cm	12,07 cm²
5,79 cm	4,15 cm	12,02 cm²
6,01 cm	4,00 cm	12,00 cm²
6,19 cm	3,88 cm	12,01 cm²
6,30 cm	3,82 cm	12,03 cm²
6,48 cm	3,72 cm	12,07 cm²
6,54 cm	3,70 cm	12,08 cm²
6,72 cm	3,61 cm	12,14 cm²
6,85 cm	3,56 cm	12,19 cm²
7,06 cm	3,48 cm	12,28 cm²
7,09 cm	3,47 cm	12,29 cm²
6,01 cm	4,00 cm	12,00 cm²

Figura 5. Representación gráfica del área de los triángulos

En la figura 5 también aparece una tabla que incluye valores de los lados de los triángulos y sus correspondientes áreas. Se observa que cuando el valor de la base del triángulo es de 6.01 cm entonces el área alcanza su valor mínimo de 12 cm². También podemos notar que en este caso el punto P parece dividir al segmento BC en dos segmentos congruentes. Por ejemplo, al analizar otro caso donde el punto fijo P tiene coordenadas (2.01, 1.01) se observa el mismo patrón de que cuando P es el punto medio de la hipotenusa, es entonces cuando el área del triángulo alcanza el valor mínimo (figura 6). También se puede ver que el valor de la abscisa del punto B es dos veces el valor de la abscisa del punto fijo P. De la misma manera el valor de la ordenada del punto C es el doble del valor de la ordenada del punto fijo P.

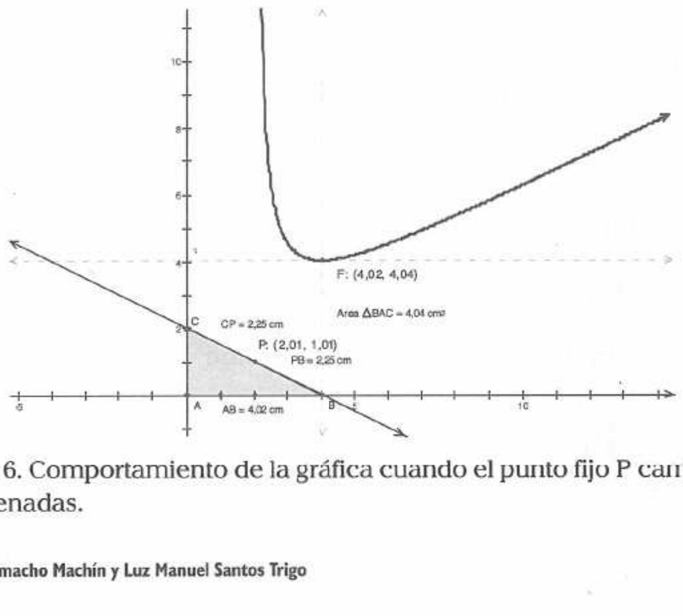


Figura 6. Comportamiento de la gráfica cuando el punto fijo P cambia de coordenadas.

Tomando en cuenta estas observaciones se plantea una conjetura:

> *Si P es un punto fijo en el primer cuadrante, al trazar las rectas que pasan por P, se forma una familia de triángulos rectángulos que se obtienen cuando se unen los puntos de intersección de esa recta con el origen. El triángulo de área mínima es aquél que se forma cuando P es el punto medio de la hipotenusa del triángulo.*

Plantear conjeturas es un aspecto muy importante del quehacer matemático y en este caso el software, al permitir fácilmente mover elementos dentro de una configuración, se convierte en una herramienta poderosa para la búsqueda de conjeturas. El siguiente paso es probar o buscar un argumento matemático que sustente esa conjetura. Más adelante se presenta una demostración.

Acercamiento algebraico

¿Cómo representar el problema algebraicamente? ¿Cuáles son los elementos importantes y cómo se pueden relacionar? ¿Cómo se determina el área de un triángulo rectángulo? ¿Qué significa que el punto P sea fijo? ¿Qué relación tiene el punto fijo con la recta? Una parte importante en la discusión de estas preguntas es buscar una representación del problema que permita expresar el área del triángulo en términos de una variable.

En la figura 7 se observa que las coordenadas de los puntos B y C son (a, 0) y (0, b) respectivamente. Con estos datos el área del triangulo ABC se expresa como: $A=\dfrac{ab}{2}$ y lo que interesa es representar esta función área dependiendo de una sola variable. Se puede encontrar la ecuación de la recta en función de *a* y *b*. Dado que la pendiente de la recta se puede escribir como $m=\dfrac{-b}{a}$, se tendrá que la ecuación de la recta es: $y=\dfrac{-b}{a}x+b$.

Ahora, como esta recta pasa por el punto (3, 2), se tiene que: $2=\dfrac{-3b}{a}+b$, de donde se obtiene que $b=\dfrac{2a}{a-3}$. Al sustituir este valor en la función área se tiene que la función área viene dada por

$$A(a)=\frac{a^2}{a-3}.$$

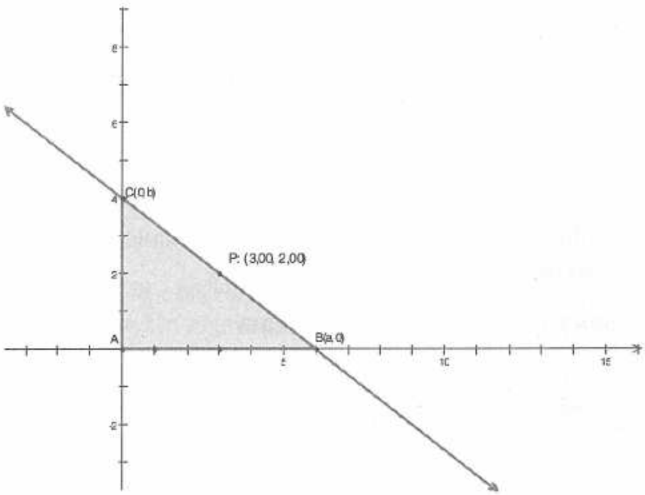


Figura 7. Identificación de relaciones para la construcción de una representación algebraica.

Después de que se ha obtenido la función que representa el área en función de una variable, con la ayuda de la calculadora se puede generar una representación gráfica e identificar el triángulo con área mínima (figura, 8).

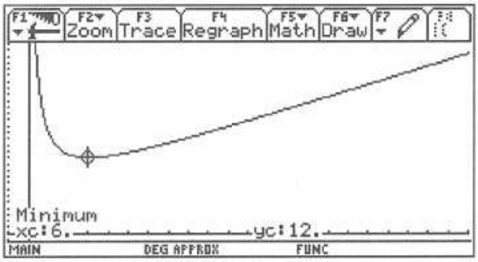


Figura 8. Determinación del valor mínimo del área sobre la gráfica de la función.

Otro procedimiento para obtener el valor mínimo de la función $A(a) = \dfrac{a^2}{a-3}$, es aplicando conceptos de cálculo. Es decir, calculamos la derivada de la función y se encuentran los puntos donde la derivada se anula y finalmente se comprueba que en ese punto la segunda derivada es positiva. La figura 9 ilustra los cálculos realizados con la calculadora.

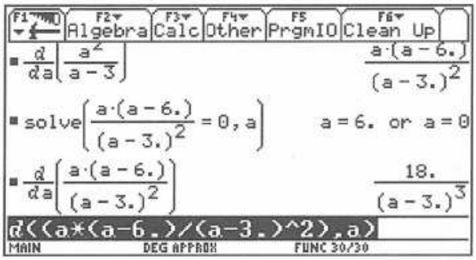


Figura 8. Aplicación de procedimientos de cálculo para determinar el valor mínimo del área.

Extensiones y conexiones del problema

Una forma natural de extender el problema es considerar el punto P en cualquier posición en el primer cuadrante (figura, 9).

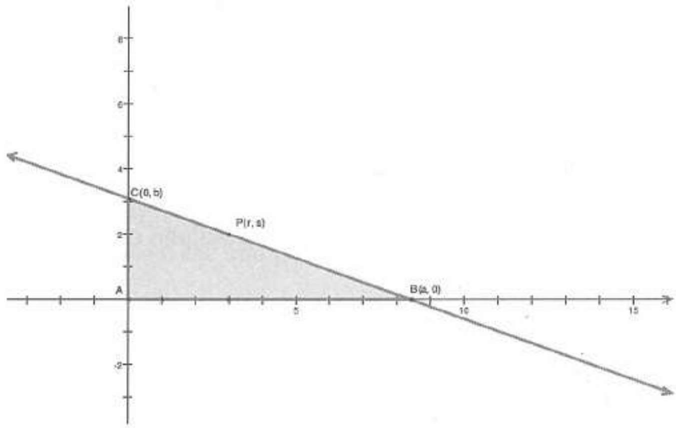


Figura 9. El punto P es un punto arbitrario en el primer cuadrante.

El área del triángulo ABC se expresa como $A=\dfrac{ab}{2}$ y de la misma manera la ecuación de la recta BC es $y=\dfrac{-b}{a}x+b$. Como esta recta pasa por el punto $P(r,s)$, entonces se tiene que $s=\dfrac{-br}{a}+b$. De aquí se tiene que $b=\dfrac{as}{a-r}$. Sustituyendo este valor en la función área se tiene que $A(a)=\dfrac{sa^2}{2(a-r)}$. El proceso y resultado de obtener la derivada y los puntos donde esta vale cero aparecen en la figura 10.

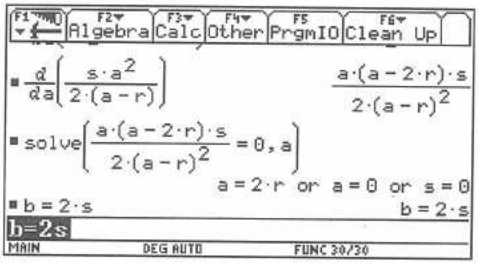


Figura 10. Valores para a y b en función de las coordenadas del punto P.

Regresemos ahora a la conjetura que se había formulado antes. Se observa que con la solución algebraica para el caso general de considerar el punto arbitrario $P(r,s)$ sobre el primer cuadrante, la solución donde se identifica el triángulo de área mínima es cuando los valores de a y b son $2r$ y $2s$ respectivamente. Por lo tanto, el punto P se ubica exactamente a la mitad del segmento que tiene como extremos puntos de coordenadas $(2r, 0)$ y $(0, 2s)$, tal como se había expuesto en la conjetura.

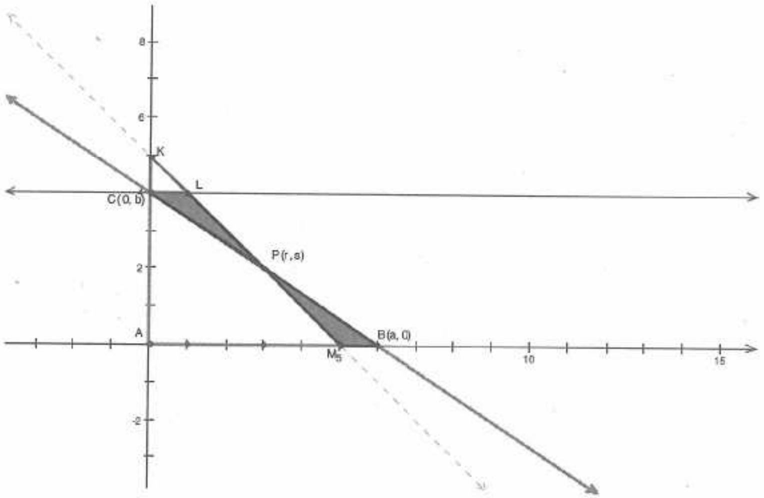


Figura 11. Sustentando una conjetura

Podemos también sustentar nuestra conjetura utilizando argumentos menos analíticos:

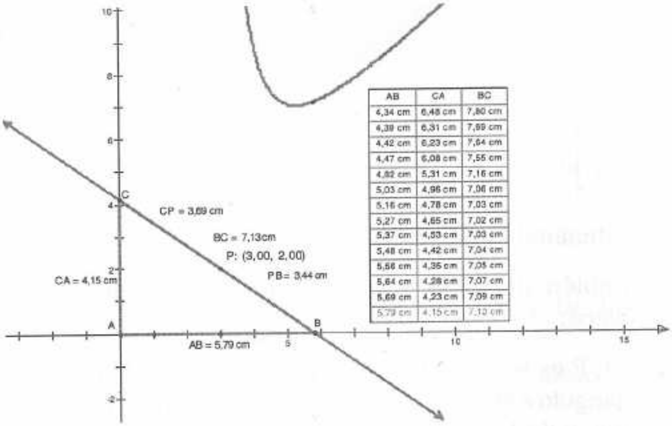
En la figura 11, P es el punto medio del segmento BC. Supongamos que existe otro triángulo AMK distinto del triangulo ABC, que tiene una menor área que el triángulo ABC. Si por el punto C se traza una recta paralela al eje X, ésta corta al lado KM en L. ¿Cómo son los triángulos CPL y BPM? Se observa que CP = BP, ya que P es punto medio de CB. Como la recta CL es paralela a la recta AM (por construcción), entonces los ángulos LCP y

MBP son congruentes (alternos internos). Además el ángulo CPL es congruente al ángulo BPM por ser opuestos por el vértice. Con estos datos se concluye que los triángulos CPL y BPM son congruentes y, por tanto, el triángulo AMK no puede tener menor área que el triángulo ABC, puesto que su área superaría a la del triángulo ABC en el valor del área del triángulo LCK.

Otra extensión

En el problema inicial, el interés se centró determinar el área mínima del triángulo que se formaba en el primer cuadrante al hacer pasar una recta por un punto fijo P. En ese mismo triángulo se observa que al mover el punto B, el cual está sobre el eje de las X, también la longitud de la hipotenusa toma distintos valores. En este contexto se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Dónde se debe ubicar el punto B para que la longitud de la hipotenusa BC alcance el valor mínimo?

Con la ayuda del software se puede representar el problema y observar el comportamiento de la longitud de la hipotenusa de la familia de triángulos que se forma al mover el punto B sobre el eje X (figura, 12). Así, en la gráfica que relaciona el lado AB del triángulo con su correspondiente hipotenusa se observa que cuando el punto B se acerca al punto 3 la longitud de la hipotenusa aumenta. Sin embargo, a medida que el punto B se aleja hacia la derecha de ese punto la longitud de la hipotenusa va disminuyendo hasta alcanzar un valor mínimo y después empieza ese valor a incrementarse otra vez. En la figura 12 también aparece una tabla donde se registran algunos valores que dan cuenta de manera discreta de ese comportamiento de la longitud de la hipotenusa.



AB	CA	BC
4,34 cm	6,48 cm	7,80 cm
4,39 cm	6,31 cm	7,69 cm
4,42 cm	6,23 cm	7,64 cm
4,47 cm	6,08 cm	7,55 cm
4,82 cm	5,31 cm	7,16 cm
5,03 cm	4,96 cm	7,06 cm
5,16 cm	4,78 cm	7,03 cm
5,27 cm	4,65 cm	7,02 cm
5,37 cm	4,53 cm	7,03 cm
5,48 cm	4,42 cm	7,04 cm
5,56 cm	4,35 cm	7,05 cm
5,64 cm	4,28 cm	7,07 cm
5,69 cm	4,23 cm	7,09 cm
5,79 cm	4,15 cm	7,10 cm

Figura 12. Representación discreta (tabla) y continua del comportamiento de la longitud de la hipotenusa cuando el punto B se mueve a lo largo del eje X.

También se puede emplear un método algebraico para determinar el valor mínimo de la hipotenusa de manera similar al procedimiento que se utilizó para identificar el triángulo de área mínima. La longitud del segmento que se desea minimizar se puede expresar como $l = \sqrt{a^2 + b^2}$ donde a y b son, respectivamente, la abscisa y la ordenada de los puntos donde la recta que pasa por $P(3,2)$ corta a los ejes X e Y. De la misma manera que en el problema inicial, se tiene que $b = \dfrac{2a}{a-3}$. Al sustituir este valor en la expresión para l se tiene que $l = \sqrt{(a^2 + (\dfrac{2a}{a-3})^2)}$. Esta función se puede representar gráficamente y visualizar el punto donde alcanza el valor mínimo (figura 13).

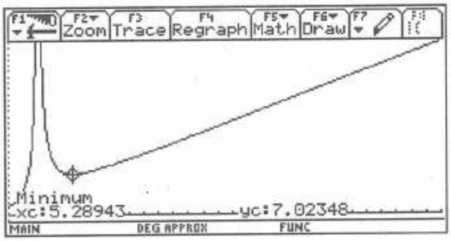


Figura 13. Representación gráfica de la función donde se muestra el valor mínimo de la hipotenusa.

Utilizando los métodos del cálculo, se puede también obtener el lado del triángulo donde la hipotenusa alcanza el valor mínimo. Calculamos la derivada de la función l y determinando el punto donde esta función vale cero, se obtiene el valor del lado (figura 14).

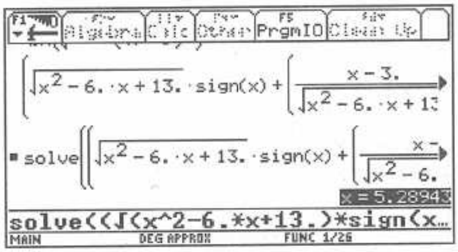


Figura 14. Proceso para obtener la derivada de la función l y la solución de la $l' = 0$

Se podría pensar que otra forma de utilizar el método algebraico para resolver este problema consistiría en representar la longitud de la hipotenusa en función del ángulo que forma con el eje OX.

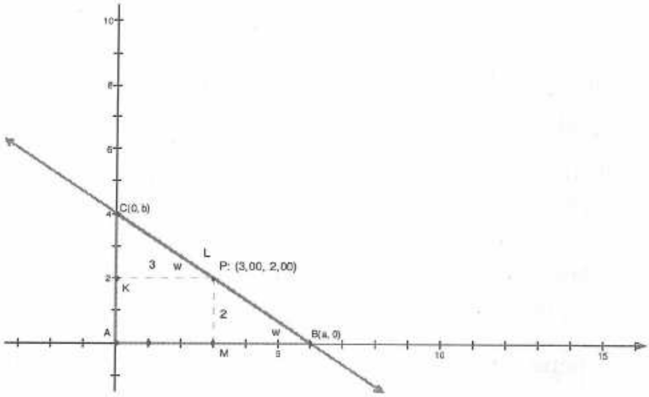


Figura 15. Expresando la hipotenusa L en función del ángulo w.

En efecto, en la figura 15 se observa que la longitud de la hipotenusa L se puede expresar como la suma de los segmentos $CP + PB$. Por otro lado, si consideramos el triángulo rectángulo KCP, se tiene que $\cos w = \dfrac{3}{CP}$ y si consideramos el triángulo MPB, se tiene que $senw = \dfrac{2}{PB}$, de donde se obtiene que $L = CP + PB = \dfrac{3}{\cos w} + \dfrac{2}{senw}$. Es decir se ha expresado la longitud de la hipotenusa en términos del ángulo w. Ahora al representar gráficamente la hipotenusa, es decir graficar $L(w) = \dfrac{3}{\cos w} + \dfrac{2}{senw}$ la figura 16 nos muestra el valor del ángulo al que corresponde el valor mínimo de la hipotenusa. Esta solución es la misma que se obtuvo con los otros métodos, por ejemplo con el método algebraico la hipotenusa mínima alcanzaba un valor mínimo de 7.02348 cuando el valor del cateto del triángulo era de 5.28943. En este caso, $w = \arccos\left(\dfrac{5.28943}{7.02348}\right)$ que se corresponde con el ángulo de 41.1398 grados.

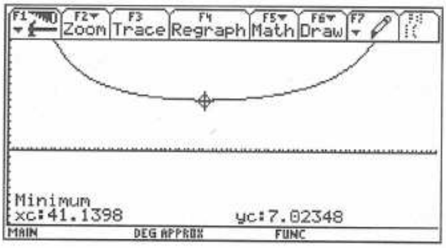


Figura 16. Representación de la hipotenusa en función del ángulo.

Si considera la longitud del segmento que representa el mínimo valor de la hipotenusa como fijo, y se coloca un extremo sobre el eje Y, y el otro sobre el eje X, entonces al mover el extremo que se ubica sobre el eje X, el lugar geométrico que genera el segmento es una astroide (figura 17). Otra conexión interesante de este problema se obtiene al obtener el mínimo valor de L a partir de la expresión $L = \dfrac{a}{\cos w} + \dfrac{b}{senw}$ en términos de a y b. Con procedimientos analíticos se obtiene que $L^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$ lo cuál se relaciona con la ecuación de una astroide $L^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$. (figura 18).

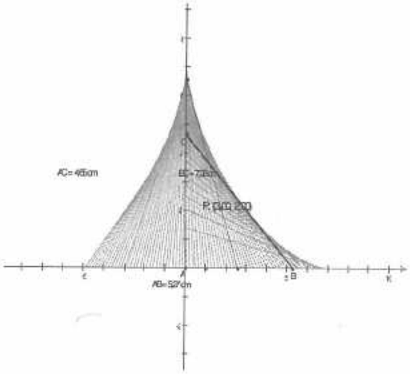


Figura 17. Lugar geométrico del segmento fijo (hipotenusa) cuando un extremo se mueve sobre el eje X

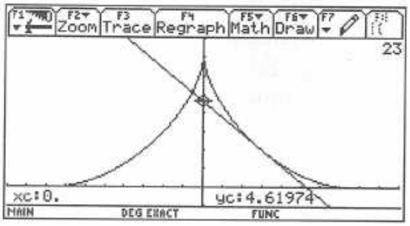


Figura 18. Gráfica de

$$y = \left[(7.02)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}$$

Y de la recta tangente en (3,2).

¿Qué relación existe entre la determinación de la longitud mínima de la hipotenusa de la familia de triángulos que se genera al mover el punto B sobre el eje X y el siguiente problema?

Dos pasillos de anchuras a y b forman un ángulo recto. Se tiene una barra recta de hierro. ¿Cuál debe ser la máxima longitud de esta barra para que pueda pasar de un pasillo a otro?

A manera de conclusión

Un aspecto que se resalta en el proceso de solución de la actividad es la importancia de buscar distintas formas de resolver un problema. En este camino, el estudiante tendrá oportunidad de utilizar varias representaciones del problema que le permitan utilizar distintos recursos matemáticos y estrategias de resolución. En particular, el uso de distintas herramientas tecnológicas como la calculadora simbólica y el software dinámico, le ofrece al estudiante la posibilidad de representar y analizar las condiciones del problema desde distintos ángulos. Por ejemplo, con el empleo del software dinámico se generan representaciones que permiten visualizar al mismo tiempo tres aspectos relacionados: la figura, una tabla discreta de valores, y la representación continua de cierta función. En este acercamiento dinámico el estudiante tiene oportunidad de reflexionar acerca del significado y relaciones que existen entre estas tres instancias. Por otro lado, en el acercamiento algebraico o analítico resulta importante modelar el problema a través de una expresión y es aquí donde el estudiante tiene que examinar en detalle la situación para eventualmente encontrar una representación algebraica. La ayuda de la calculadora resulta relevante al obtener el registro gráfico de esa representación y también en la realización de las operaciones involucradas en el proceso de optimización de la función que modela el fenómeno. Los distintos acercamientos hacia la solución de la actividad también ilustran la importancia de formular diversas preguntas que lleven a la búsqueda y exploración de nuevas conexiones o extensiones del problema. En este sentido se comparte que aprender matemáticas es un proceso continuo donde el estudiante tiene que explorar y plantearse constantemente (a través de recursos matemáticos) una serie de preguntas o interrogantes.

Bibliografía

Boletín Oficial de Canarias (BOC) núm. 55, martes 30 de abril de 2002: *Currículo de Matemáticas en la ESO.*

Boletín Oficial de Canarias (BOC) núm. 59 de 8 de mayo de 2002: *Currículo de Matemáticas en el Bachillerato.*

National Council of Teachers of Mathematics (2000): *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: The Council.

Santos, M. (1998): "On the implementation of mathematical problem solving: Qualities of some learning activities". In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*. III, pp.71-80. Washington, DC: American Mathematical Society.

SEP (1994): *Libro para el Maestro, Matemáticas, Secundaria.* México.

Matías Camacho Machín. Universidad de la Laguna, Tenerife España.
Correo Electrónico: mcamacho@ull.es
Luz Manuel Santos Trigo. Cinvestav, México.
Correo electrónico: msantos@mail.cinvestav.mx