El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción de un instrumento

Samuel David Bodí Pascual, Julia Valls y Salvador Llinares

Resumen

Este estudio tiene como objetivo validar un instrumento construido para evaluar el desarrollo de la comprensión de la divisibilidad en N desde la perspectiva de la teoría APOS. Se ha realizado un análisis de las actividades y problemas que presentan los diversos libros de texto y una revisión de las investigaciones previas sobre la comprensión de la divisibilidad con el objetivo de elaborar un cuestionario que recoge el desarrollo curricular que se realiza en la enseñanza media. Posteriormente, se ha efectuado un análisis psicométrico del índice de dificultad del cuestionario y se ha validado a través de la realización de entrevistas clínicas basadas en tareas. Este análisis ha permitido determinar la validez de los ítems para discriminar las diferentes formas de comprender las nociones de divisibilidad de los estudiantes de enseñanza media.

Palábras clave: Divisibilidad, Teoría APOS, Índice de dificultad, Entrevistas.

Abstract.

The aim of this study is to validate an instrument built to evaluate the development of the comprehension of the divisibility in N from the APOS theory perspective. An analysis of the activities and the problems that different text books present has been made and also a revision of the previous research on the comprehension of the divisibility in order to prepare a questionnaire which includes the mathematical content of the secondary school curriculum. A subsequent psychometric analysis has followed about the index of difficulty of the questionnaire and it has been validated by clinic interviews. This analysis has allowed us to determine the item validity to discriminate the different ways students of secondary school understand the notions of divisibility.

1. Introducción

Los cambios que afectan a la enseñanza de las matemáticas escolares obliga a formular propuestas y desarrollar investigaciones que proporcionen una mayor comprensión del aprendizaje de las nociones matemáticas. Este trabajo se sitúa en el campo de Pensamiento Numérico y tiene como objetivo analizar la comprensión de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, en estudiantes de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria (alumnos de 12 años). La información obtenida puede ayudar a la planificación y desarrollo de la enseñanza de este contenido matemático.

En los currículos de ESO, la divisibilidad aparece explícitamente en el primer ciclo de la etapa, dentro del bloque de Aritmética y Álgebra, en el punto *«Divisibilidad»*, y en segundo curso, en el punto: *«Relación de divisibilidad. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números naturales»*.

Como una primera aproximación al tema se describió el desarrollo de los contenidos de divisibilidad en distintas editoriales. Se examinaron diez libros de texto, elegidos entre editoriales de gran difusión y otras de menor difusión. Los libros de texto consultados pertenecían al nuevo currículo de Primer Curso de Educación Secundaria Obligatoria. En el estudio se encontró un elevado nivel de coincidencia tanto en los contenidos de divisibilidad como en el desarrollo de los mismos y que esquemáticamente se concreta en los siguientes contenidos: múltiplos de un número natural, divisores de un número natural, propiedades de los múltiplos y divisores, criterios de divisibilidad (por 2, por 3, por 4, por 5, por 6, por 7, por 8, por 9, por 10, por 11, por 25, por 100 y/o 1000, etc.), números primos y compuestos, construcción de tabla de números primos, factorización de un número, cálculo de todos los divisores de un número, máximo común divisor y mínimo común múltiplo. En los textos se trata la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, consolidando y ampliando los diversos conceptos que el alumno ha trabajado en la educación primaria y tratando otros conceptos como los de mínimo común múltiplo y máximo común divisor, y los algoritmos correspondientes para su obtención, así como la aplicación de los conceptos y algoritmos en la resolución de problemas de carácter práctico, real y próximo, que no suponen la continua aplicación mecánica y algorítmica de los contenidos estudiados. El estudio de los contenidos que presentan, el desarrollo curricular que realizan y las actividades planteadas nos ha permitido realizar un cuestionario sobre el tema de la divisibilidad, basado fundamentalmente en las propuestas de actividades y problemas que presentan los diversos libros y su ampliación, y comparación, con estudios como los de Zazkis y Campbell (1996), y Brown, Thomas y Tolias (2002).

2. Modelo de comprensión APOS y divisibilidad

2.1. Teoría APOS sobre la comprensión

El estudio que presentamos se ha realizado desde el punto de vista del marco teórico de APOS (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Para Dubinsky (1991, 2000) y Zazkis y Campbell (1996) las construcciones mentales de los individuos involucradas para obtener significados de los problemas y situaciones matemáticas se denominan acciones, procesos, objetos y esquemas. Los mecanismos para realizar dichas construcciones son:

interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación y tematización, entre otros. Una *acción* es cualquier manipulación física o mental que transforma los objetos de alguna manera. La acción se *interioriza* en un *proceso*, por ejemplo, cuando en la actividad de dividir la acción es pensada pero no realizada. Nuevos procesos pueden ser construidos *invirtiendo* o *coordinando* los procesos existentes. Cuando el proceso se ha transformado por alguna acción, decimos que se ha ***encapsulado*** en un *objeto*. Cuando la reflexión sobre la comprensión de un esquema hace que éste se observe como «un todo» se dice que ha sido *tematizado* en un objeto. Un *esquema* es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados, consciente o inconscientemente, en una estructura coherente en la mente del individuo, que puede ser evocada para tratar una situación problemática de esa área de la matemática (DeVries, 2001).

En este modelo de comprensión, una descomposición genética de un concepto es una detallada descripción, realizada por el investigador, de las construcciones mentales que un individuo puede realizar para comprender un concepto matemático concreto. Sirve como una posible guía del camino que puede recorrer un aprendiz para aprender un determinado concepto (esta descomposición no tiene porque ser única). Desde esta perspectiva teórica, el análisis de los datos de una investigación pueden ratificar una primera descomposición genética de un concepto, o bien conllevar la realización de revisiones y cambios (Clark y otros, 1997). De Vries indica que la descomposición genética es el primer paso del análisis teórico de un concepto matemático en términos de las construcciones mentales que un aprendiz puede hacer en orden a desarrollar la comprensión del concepto.

2.2. La divisibilidad desde el marco teórico APOS.

El marco teórico APOS ha sido usado en estudios sobre la comprensión de la divisibilidad. Por ejemplo, Zazkis y Campbell (1996) basaron su trabajo en entrevistas clínicas a 21 estudiantes para profesores de primaria sobre los conocimientos de divisibilidad en el conjunto de los números naturales, tales como la factorización, descomposición en factores primos, el Teorema Fundamental de la Aritmética o las reglas de divisibilidad por 2, 3, 5 y 9. Zazkis y Campbell (1996, p.562) concluyen que *«existen fuertes evidencias de que los estudiantes para profesor concebían la divisibilidad en términos de multiplicación y división. Es decir, por lo que se refiere a la división,* $a|b$ *(a divide b) si, y sólo si,* $b : a = d$, *dónde d es un número natural; y por lo que se refiere a la multiplicación,* $a|b$ *si, y sólo si, existe un número natural d tal que* $a \times d = b$. *Parece que conexiones insuficientes entre estas dos definiciones son una fuente de discordia cognoscitiva para muchos de los participantes en este estudio. Un acercamiento pedagógico progresivo con* *respecto a esta relación inversa parecería ser muy viable, resaltaría la equivalencia de factores y divisores, y como consecuencia su descomposición en factores primos».* Este resultado indica que la apropiada encapsulación de la «divisibilidad por n», donde n es un número natural, necesita de un conocimiento profundo de la relación inversa entre las operaciones de multiplicación y división. Por otra parte, estos autores señalan que la construcción de la conexión entre la divisibilidad y la descomposición en factores primos parece contribuir enormemente a la comprensión de la divisibilidad como un esquema. Los autores emplazan a una enseñanza que favorezca la comprensión conceptual de la aritmética y la teoría elemental de números, para que el desarrollo del conocimiento conceptual en álgebra tenga éxito.

Por otra parte, Brown, Thomas y Tolias, G. (2002) analizan cómo estudiantes para profesor resuelven problemas sobre la divisibilidad. Este estudio combina la teoría APOS con el «modelo de fases» adaptado de Piaget (1978) (citados en Brown, Thomas y Tolias, G. (2002)). En opinión de los autores, y siguiendo el estudio de Zazkis y Campbell (1996), la comprensión de los conceptos de la estructura multiplicativa requiere la comprensión de la descomposición única de los números naturales como producto de factores primos, y así poder justificar las relaciones de divisibilidad. Se destaca la relación inversa existente entre las operaciones de dividir y multiplicar, subrayando su importancia en la construcción del esquema de la estructura multiplicativa que tienen los estudiantes universitarios. Las conclusiones del estudio de Brown, Thomas y Tolias sugieren el papel fundamental que juega la relación inversa entre la multiplicación y la división en la comprensión de la divisibilidad como proceso. La coordinación de las relaciones: «a es divisible por b»; «a es un múltiplo de b» ; «b es un factor de a», y «b es un divisor de a» (p.78), viéndolas como equivalentes, forman parte de la concepción de la idea de divisibilidad como un proceso. La segunda idea que se destaca es la importancia de la descomposición en factores primos de los números naturales.

Para obtener información sobre el papel desempeñado por la comprensión de la descomposición en factores de los números naturales en la comprensión de la divisibilidad, Zazkis y Campbell (1996) presentaban divisores que fueran factores primos y también compuestos. Por su parte Brown, Thomas y Tolias (2002) también utilizaron en su investigación preguntas similares o idénticas, tomadas del estudio de Zazkis y Campbell (1996).

2.3. Una descomposición genética de la divisibilidad en N

Zazkis y Campbell (1996) proponen la siguiente descomposición genética de la divisibilidad.

a. La construcción de la divisibilidad como un objeto comienza con ejemplos específicos de divisores. Los primeros ejemplos de divisores son números pequeños tales como 2, 3,4 y 5.

b. b.1. Inicialmente, por ejemplo, la divisibilidad por 3 es una acción. Un alumno tiene que realizar la división y obtener el cociente (sin resto) para concluir a posteriori que el número es divisible por 3.

b.2. La acción de dividir puede ser interiorizada como un proceso, en que la acción se piensa pero realmente no se realiza. El estudiante ha comprendido la idea de que el propio procedimiento de la división es el que determina si un número entero satisface o no el criterio de divisibilidad.

c. Pueden **coordinarse o invertirse procesos** de divisibilidad de números particulares para crear nuevos procesos de divisibilidad. Así,

(i) cuando la divisibilidad por 2 y 3 se usa para inferir la divisibilidad por 6, se coordinan dos procesos, y

(ii) sabiendo que la suma de los dígitos de un número entero es divisible por 3 implica que el propio número también es divisible por 3 puede invertirse y construir números divisibles por 3.

d. La **encapsulación** de la divisibilidad como un objeto podría llevar a entender el concepto de divisibilidad como una propiedad esencial de los números enteros, independiente de los procedimientos de la división. El concepto de divisibilidad es visto como propiedad de los números enteros, en términos de dicotomía, «sí o no».

e. Cuando **la divisibilidad se relaciona** con otras estructuras cognoscitivas tales como la factorización y la descomposición en factores primos, diríamos que la divisibilidad **ha sido tematizada para formar un esquema.**

3. Cuestiones de investigación

El objetivo de nuestra investigación es validar un instrumento construido para evaluar el desarrollo de la comprensión de la divisibilidad en N desde la perspectiva de la teoría APOS. Para ello, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son los niveles de dificultad que presentan los ítems que conforman el instrumento?

- ¿En qué medida las características de los ítems ayudan a discriminar las formas de conocer de los alumnos los elementos matemáticos de la divisibilidad?

4. Método

4.1. Población

32 alumnos de 1º de ESO de un instituto público participaron en este estudio. Los alumnos habían estudiado el tema de divisibilidad en el conjunto de los números naturales antes de participar en la investigación. Se trata de alumnos que tienen 12 años o acaban de cumplir los 13. La prueba se realizó en el horario habitual de los estudiantes, en una clase de 55 minutos. Se habló previamente con los profesores implicados, acordando la hora y el procedimiento de aplicación. Los alumnos no sabían que se les iba a preguntar sobre divisibilidad. A cada estudiante le fue otorgado un código aleatorio de identificación para el tratamiento posterior de los datos, así como para la elección de los estudiantes que serían entrevistados.

4.2. Instrumentos

Se diseñó un cuestionario y un guión de entrevistas. Una vez analizados las respuestas a los cuestionarios, se realizaron 6 entrevistas clínicas, seleccionando alumnos en los diversos cuartiles de respuestas correctas, y considerando las posibilidades de hacer emerger conocimientos que permanecieran ocultos en las respuestas dadas a los cuestionarios y determinar la potencialidad de los diferentes ítems para permitirnos describir diferentes maneras de conocer los conceptos de divisibilidad.

4.2.1. El Cuestionario

Para el diseño del cuestionario se consultaron:

- libros de texto,
- problemas olímpicos de la Sociedad Matemática de la Comunidad Valenciana,
- materiales curriculares sobre números y divisibilidad en la enseñanza secundaria de la Conselleria de Cultura i Educació de la Comunidad Valenciana, y
- cuestiones usadas en la investigación de Zazkis y Campbell (1996), y de Brown, Thomas y Tolias (2002),

lo que permitió realizar una selección, aproximadamente 100 ejercicios. Desde esta colección se seleccionaron los problemas que iban a constituir el cuestionario de manera que pudiera ser contestado en el transcurso de una de las clases habituales de un instituto. Se debatió el número y las características de las cuestiones de modo que el cuestionario proporcionara información sobre la compresión de los alumnos de los elementos matemáticos de las nociones de divisibilidad identificados en la descomposición genética inicial y considerando los resultados de las investigaciones (Zazkis y Campbell (1996); Brown, Thomas y Tolias (2002)). Como resultado de este análisis previo se elaboró una prueba de 46 ítems, distribuidos en 10 preguntas. Se propusieron 4 problemas de reserva, distribuidos en dos bloques, para que aquellos alumnos que finalizaran los 10 primeros con suficiente tiempo respondieran y eligieran dos de ellos de uno de los bloques.

El cuestionario se centraba en las ideas de múltiplo y divisor, en las relaciones entre las operaciones de multiplicación y división, en la expresión de números naturales en factores primos y relaciones de divisibilidad, en la aplicación de los criterios de divisibilidad de 2 y 3 , y la coordinación de estos, relaciones entre «a es divisible por b»; «a es un múltiplo de b» ; «b es un factor de a» , y «b es un divisor de a» , en la descomposición factorial, y en los conceptos y aplicación de mínimo común múltiplo y máximo común divisor. Se permitió a los alumnos el uso de calculadora científica, puesto que concebíamos que podía facilitar sus respuestas, evitando tediosos cálculos, reforzando su confianza en la solución, además de permitirnos observar la necesidad del cálculo o la habilidad de la discusión y propuesta en las diferentes cuestiones.

4.2.2. Las entrevistas

Las entrevistas clínicas son un elemento necesario para obtener información detallada (Goldin, 2000; Clement, 2000). La realización de las entrevistas pretende obtener mayor información sobre las respuestas que ofrecen los estudiantes. El guión de la entrevista siguió las cuestiones del cuestionario y tuvo como objetivo obtener aclaraciones y justificaciones de las respuestas dadas en el cuestionario. Las preguntas de la entrevista versaron sobre los aspectos de contenido que no habían quedado claros y pretendían descubrir detalles ocultos sobre la comprensión de los estudiantes que no se habían mostrado en los cuestionarios. Se realizaron un total de seis entrevistas clínicas. Se llevaron a cabo después de ser analizados los cuestionarios. Las entrevistas duraron cuarenta minutos y se realizaron aproximadamente seis semanas después de la realización del cuestionario.

4.3. Análisis realizado

Se utilizó una metodología cualitativa y cuantitativa a fin de poder realizar un estudio de las cualidades psicométricas del cuestionario. Para el estudio cuantitativo se ha utilizado el paquete estadístico del programa SPSS (versión 11.5) Las respuestas se codificaron 0 ó 1, siendo el rango de puntuación de cada cuestionario entre 0 y 46:

a) Valoración 0: *La respuesta es incorrecta*. Se ha dado un resultado incorrecto o no se ha contestado.

b) Valoración 1: *La respuesta es correcta.* Se ha utilizado el procedimiento adecuado, u otro procedimiento no totalmente adecuado pero que produce una respuesta correcta; se ha operado y alcanzado la respuesta correcta; realiza una justificación correcta con resultado correcto; da el resultado correcto sin justificar; el procedimiento, justificación o respuesta son totalmente correctas en función de lo que «esperamos» como profesores.

Por otra parte, las entrevistas fueron transcritas y se aplicó un análisis de contenido intentando identificar evidencias de las construcciones de los estudiantes utilizando para ello las caracterizaciones de la descomposición genética considerada inicialmente. El análisis de las entrevistas se basó en la identificación de características de la comprensión de los diversos aspectos de divisibilidad que desarrollaron los estudiantes, siendo interpretados desde la teoría APOS. Este análisis permitió determinar la validez de los diferentes ítems para discriminar las diferentes formas de comprender las nociones de divisibilidad de los estudiantes.

Resultados

La tabla 1 muestra las medias clasificadas distribuidas en cuatro intervalos. Se observa que únicamente el 22% de los alumnos estudiados obtiene un resultado que se encuentra a partir del tercer cuartil. La media global del cuestionario fue de 0,3533.

Intervalo	[0, 0'25[	[0'25, 0'50[	[0'50, 0'75[	[0'75, 1[
Nº Alumnos	10	15	6	1
%	31'3	46'9	18'8	3'1

Tabla 1. Cuartiles

El coeficiente de consistencia interna α de Cronbach, que indica la fiabilidad del cuestionario, es 0,8762, lo que indica que la fiabilidad del cuestionario es buena, es decir, que el grado o precisión con que el cuestionario mide la competencia del alumno en divisibilidad es alto.

La tabla 2 muestra los estadísticos descriptivos para cada ítem: media, desviación típica y el número de alumnos que han respondido al ítem. Las medias están comprendidas entre 0,6563 del ítem 1a3 *(¿Es 21 múltiplo o divisor de 7?)* y 0,0313 de los ítems 4d *(¿Es 3^4x5^3x7^3x13^{18} múltiplo de 3^3x5^2x7?)* y 8b2 (*Tenemos tres cuerdas que miden 1980 cm, 990 cm y 756 cm, y queremos cortarlas en trozos de igual longitud.¿Cuántos trozos se han conseguido?).* La mayor desviación típica, 0,5080, corresponde a los ítems 1a4 *(¿Es 25 múltiplo o divisor de 625?)* y 4b5 *(¿ Es 3^3x5^2x7 divisible por 2?*).

Aplicamos el cálculo del Índice de Dificultad definido por García y Pérez (1989) como «el número de respuestas correctas del ítem dividido por el número de sujetos que han intervenido, I.D = A/n, (donde A es el número de respuestas correctas, y n el número de sujetos que la han realizado)». La tabla 3 aporta la información sobre el índice de dificultad de los ítems.

En primer lugar, observamos en la tabla 3 que ninguno de los 46 ítems puede ser considerado como ***«Muy fácil».*** Los ítems que han resultado ***«Fáciles» se pueden agrupar en dos grupos.***

- En el primer grupo se incluyen los items que discriminan las relaciones *«a es divisor de b» o «b es múltiplo de a»*, cuando se aplican a números pequeños (ítems: 1a1, 1a2, 1a3, 1b1, 1b2, 1c1).

Del análisis de las respuestas cabe inferir que estos ítems solo exigen a los alumnos conocer estas relaciones como procesos [según la descomposición genética planteada]. Se pone de manifiesto que los estudiantes asocian divisor con la operación de dividir, múltiplo con la operación de multiplicar pero sólo piensan en el procedimiento. En el siguiente protocolo desde las entrevistas, podemos observar esta asociación:

Pedro: *Múltiplo de un número es otro número que se obtiene multiplicándolo por otro. Por ejemplo 8 es múltiplo de 2.*

....

Patricia: *El número 21 es múltiplo de 3, puesto que 3 x 7 es 21. Y de divisor, mm. (piensa), 25 es,..., 25 es divisor de 5 puesto que da exacta la división.*

....

E: *¿Puedes indicar qué es un divisor de un número?*

Victoria: *Es un numero que al dividir a otro da un resultado exacto.*

- Un segundo grupo de ítems psicometricamente ***«fáciles»*** incluye ítems que hacen referencia a *«la relación entre los divisores de un número natural y la descomposición factorial de dicho número, expresados mediante factores sencillos y exponentes pequeños»* (4a, 4b1, 4b2, 4b3, 4b4). El tamaño de los exponentes de la descomposición factorial simple ha permitido, en una gran parte de los casos, la operatividad con la calculadora y discernir la divisibilidad mediante la obtención del número y su división por el posible divisor, mostrando, en este caso, una concepción acción de la idea de divisor al tener que realizar la operación de dividir. Evidencias al respecto las encontramos en las entrevistas realizadas.

E: *Indicas que el número $M = 3^3 \times 5^2 \times 7$ es divisible por 7, y lo has hecho operando [multiplicando los factores de M] y dividiendo. ¿Podrías hacerlo de otra forma?*

Pedro: *No, no se me ocurre ninguna, sólo operar.*

Estos ítems permiten identificar, por lo menos, aquellos procedimientos de resolución que se apoyan en una comprensión de los elementos matemáticos *«divisor» o «múltiplo»* como procesos y *«descomposición factorial»* como acción.

Los ítems considerados de ***«Dificultad media»*** hacen referencia a *«la discriminación entre divisor y múltiplo y la relación que existe entre estos términos»* (1a4) y a la *«relación entre los divisores de un número natural y la descomposición factorial de dicho número»* (4b5), que están directamente relacionados con los ítems del apartado anterior pero aquí los números son mayores. Creemos que el mayor grado de dificultad viene motivado por

(i) el tamaño de los números implicados, lo que dificulta el cálculo. Por ejemplo, en el ítem 1a4 *(¿25 es múltiplo o divisor de 625?)* y

(ii) por tratarse de un número compuesto como es 15 y un número descompuesto en factores primos, 4b5 (*¿ $3^3 \times 5^2 \times 7$ es divisible por 15?*).

RELIABILITY ANALYSIS - SCALE (ALPHA)

		Mean	Std Dev	Cases			Mean	Std Dev	Cases
1.	1a1	,5625	,5040	32,0	24.	4d	,0313	,1768	32,0
2.	1a2	,5938	,4990	32,0	25.	5a	,1875	,3966	32,0
3.	1a3	,6563	,4826	32,0	26.	5b	,1250	,3360	32,0
4.	1a4	,5000	,5080	32,0	27.	5c	,1250	,3360	32,0
5.	1b1	,5938	,4990	32,0	28.	5d	,1563	,3689	32,0
6.	1b2	,6250	,4919	32,0	29.	6	,2500	,4399	32,0
7.	1c1	,5938	,4990	32,0	30.	7a	,0938	,2961	32,0
8.	1c2	,4063	,4990	32,0	31.	7b	,2500	,4399	32,0
9.	1c3	,3125	,4709	32,0	32.	7c	,3125	,4709	32,0
10.	1c4	,3750	,4919	32,0	33.	7d	,3750	,4919	32,0
11.	2	,0625	,2459	32,0	34.	7e	,3125	,4709	32,0
12.	3a1	,1563	,3689	32,0	35.	7f	,2813	,4568	32,0
13.	3a2	,3125	,4709	32,0	36.	8a	,2813	,4568	32,0
14.	3a3	,2813	,4568	32,0	37.	8b1	,0625	,2459	32,0
15.	3a4	,1563	,3689	32,0	38.	8b2	,0313	,1768	32,0
16.	3b	,3125	,4709	32,0	39.	9a	,3750	,4919	32,0
17.	4a	,6250	,4919	32,0	40.	9b	,4063	,4990	32,0
18.	4b1	,5938	,4990	32,0	41.	9c	,3125	,4709	32,0
19.	4b2	,5625	,5040	32,0	42.	10a	,4063	,4990	32,0
20.	4b3	,5625	,5040	32,0	43.	10b	,4063	,4990	32,0
21.	4b4	,5938	,4990	32,0	44.	10c	,3750	,4919	32,0
22.	4b5	,5000	,5080	32,0	45.	10d	,3750	,4919	32,0
23.	4c	,4063	,4990	32,0	46.	10e	,3750	,4919	32,0

Tabla 2. Estadísticos descriptivos univariados

Tipo de ítem	**Valores que los limitan**	Nº de ítems	**Número de ítems** (por orden de dificultad)	**Elementos matemáticos y relaciones**
Muy difíciles	< 0.25	11	4d, 8b2, 2, 8b1, 7a, 5b, 5c, 3a1, 3a4, 5d,5a	• Inversión de la noción de múltiplo. • Relación entre la noción de múltiplo y la descomposición factorial» • Coordinación de criterios de divisibilidad (6)» • «Diferentes descomposiciones de un número natural y la noción de divisor y multiplo» • «m.c.m.»
Difíciles	0.25 a 0.44	22	6, 7b, 3a3, 7f, 8a, 1c3, 3a2, 3b, 7c, 7e, 9c, 1c4, 7d, 9a, 10c, 10d, 10e, 1c2, 4c, 9b, 10a, 10b,	• Las relaciones entre «ser múltiplo de», «ser divisible por» y «ser divisores de» de un determinado número» • Criterios de divisibilidad por 3 y por 5 aplicados a números en los que algún dígito era una letra. • Relación noción de múltiplo y divisor de un número y la descomposición factorial de dicho número, y su representación como suma de un producto de factores primos y un número natural» • «m.c.d. y m.c.m.»
Dificultad media	0.45 a 0.54	2	1a4, 4b5	• «La discriminación entre divisor y múltiplo y la relación que existe entre estos términos» • «Relación entre los divisores de un número natural y la descomposición factorial de dicho número»
Fáciles	0.55 a 0.74	11	1a1, 4b2, 4b3, 1a2, 1b1, 1c1, 4b1, 4b4, 1b2, 4a, 1a3	• «a es divisor de b» o «b es múltiplo de a» • «La relación entre los divisores de un número natural y la descomposición factorial de dicho número, expresados mediante factores sencillos y exponentes pequeños»
Muy fáciles	**>0.74**	**0**		

Tabla 3. Categorías de dificultad de los ítems

Los ítems clasificados como «***Difíciles***» hacen referencia a cuatro grupos de elementos y relaciones matemáticas. En el primer grupo se incluyen las relaciones entre *«ser múltiplo de», «ser divisible por» y «ser divisores de» de un determinado número* (ítems: 1c2, 1c3 y 1c4). Este resultado induce a pensar en cierta confusión de los términos respecto a su significado. Los estudiantes justifican sus respuestas (acertadas o no) mediante las operaciones de dividir o multiplicar, lo que indica que los estudiantes estaban mostrando una comprensión como acción de estas relaciones. Observemos las siguientes respuestas:

E:	*¿Podrías indicarme un número que fuera divisible por 24?*
Rebeca:	*Por ejemplo, entre 2.*
E:	*Es decir, 2 es divisible por 24.*
Rebeca:	*Sí.*
E:	*Indica ahora un número por el que 24 es divisible.*
Rebeca:	*Mmm, (prueba con la calculadora) entre 6.*

- *En el segundo grupo de items considerados como difíciles se incluyen «Criterios de divisibilidad por 3 y por 5» aplicados a números en los que algún dígito era una letra*. Así, por ejemplo, en los ítems 3a2, *«Indica un valor de b para que 2b45 sea divisible por 3», 3b, «Indica un valor de a y b para que el número 19a9b sea divisible por 3», y 3a3, «Indica un valor de b para que 2b45 sea divisible por 5»,* los estudiantes utilizan el ensayo y búsqueda de un número que cumpla las condiciones dividiendo, o aplicando criterios de divisibilidad. Se puede decir entonces que este grupo de ítems permite discriminar entre conocer como acción y conocer como procesos la idea «ser divisible por» aplicado al caso 3 y 5. Los alumnos en ocasiones aplican el criterio de divisibilidad (proceso), pero en otras lo desconocen y dividen (acción) por lo que el hecho de que haya dígitos en forma de letras dificulta su resolución al exigir una comprensión de la idea de «divisibilidad por ...» mayor que simplemente una acción. Veamos algunos extractos de entrevistas que muestran este hecho.

E:	*Has dado el 2445.*
Rebeca:	*Si, es un número divisible por 3, por 5, por 6 y por 2.*
E:	*¿Cómo sabes que es divisible entre 2?*
Rebeca:	*Porque lo comprobé.*
....	
E:	*¿Y para que 2b45 sea divisible por 3?*
Luis:	*Un 1*
E:	*¿Únicamente?*
Luis:	*No, varios números (suma las cifras y piensa)*
E:	*¿Qué estas buscando?*

Luis: *Un número para que al sumarlos todos de un número divisible por 3*
E: *¿Y para qué sea divisible por 5?*
Luis: *Cualquier número, ¿no?, acaba en 5.*

- Otro grupo de ítems considerados como difíciles hacen referencia a la *«Relación entre las nociones de múltiplo y divisor (ser divisible) de un número y la descomposición factorial de dicho número»*. En el ítem 4c (*¿$3^4 \times 5 \times 7^3$ es un múltiplo de $3^3 \times 5^2 \times 7$?*), procedente de la investigación de Brown et al (2002), las respuestas producidas ponen de manifiesto la comprensión de la relación anterior como una acción. Los alumnos, usando la calculadora, obtienen los números representados en el sistema decimal y, a continuación, dividen, para comprobar si la división genera un número entero. Las entrevistas aportan información sobre la necesidad de los alumnos de convertir el número *$3^4 \times 5 \times 7^3$ y el número $3^3 \times 5^2 \times 7$* en su representación decimal canónica.

E: *En el tercer apartado, te preguntaba si el número dado [3^4x5x7^3] es múltiplo de M [3^3x5^5x7]. Has contestado que no.*
Alejandro: *No sé si es múltiplo si no lo compruebo. Tengo que realizar la multiplicación.*

El siguiente protocolo muestra la posible influencia de los exponentes en los factores de la descomposición del número en la forma de conocer la noción de múltiplo.

E: *En el apartado c, ¿el número es múltiplo del inicial?*
Luis: *Sí, porque tiene los mismo números.*
E: *Si, pero ¿los exponentes no tienen ninguna influencia?*
Luis: *Sí, ..., no sé. Tendría que calcularlo.*

La respuesta de Luis muestra la «inestabilidad» con la que en estos momentos comprenden la relación entre la idea de múltiplo y la descomposición factorial del número y la idoneidad del formato del ítem para mostrar las características de la comprensión de la relación entre la noción de múltiplo y la descomposición en factores del número.

Por otra parte, la relación entre la idea de «ser divisible y la descomposición en factores primos se muestra en el siguiente protocolo procedente del ítem 9a, *«¿1001 = 7x11x13 es divisible por 77?»*, y 9b, *«¿91 no es divisor de 1001?»*. La dificultad puesta de manifiesto por estos ítems puede ser debida a la expresión de los números, lo que incide en el papel que desempeña la representación del número en la comprensión de las relaciones entre los elementos matemáticos del esquema de divisibilidad. En este sentido, los items que inciden sobre la comprensión de la relación entre «ser divisible por», «ser múltiplo de» y *«la descomposición en factores»* y que varíen la representación de los números permiten discriminar diferentes formas en las que los estudiantes comprenden estas relaciones. En los siguientes ejemplos mostramos algunas evidencias que apoyan esta interpretación:

E:	*¿Podrías decirme si 77 es divisor de 1001?*
Luis:	*Mmm, 77, 1001, ..., tendría que operar.*
E:	*¿Y sin operaciones?*
Luis:	*Sin operar, puede ser (risas), ..., no lo sé.*

La necesidad de una comprensión de las relaciones anteriores como objeto se pone de manifiesto en la resolución del item *«¿2002 no es múltiplo de 13 ?»* cuando se dispone de 1001 expresado mediante su descomposición factorial, mostrando el 13 como uno de sus factores. Así, tenemos:

E:	*¿2002 es múltiplo de 13? Dime si la descomposición factorial de arriba sirve para algo.*
Victoria:	*Para algo servirá, sino no tiene sentido que lo digan. Ahhh, claro, lo que queda es lo que nos da en el resultado de la división. El 11, el 13.*
E:	*Volvamos a la pregunta, ¿2002 es múltiplo de 13?. Veámoslo por partes, ¿2002 está relacionado con 1001?*
Victoria:	*No.*
....	
E:	*Indica si 2002 es múltiplo de 13.*
Pedro:	*Tengo que operar.*

La idea de «ser divisible» utilizada para coordinar varios procesos se pone de manifiesto en los ítems en los que se proporcionan los números añadiendo una suma (por ejemplo, $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$). El uso de esta representación del número en los ítems permite identificar la coordinación de las relaciones «divide a» para tomar decisiones. En este sentido, el uso de esta forma de representar el número permite identificar como los estudiantes pueden crear nuevos procesos a partir de la coordinación de procesos previos. En este caso, como ocurre con los ítems 10a, 10b, 10c, 10d y 10e, *«Es* $2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$ *divisible por 5, 2, 4, 3 o 6»*, permite ver como los estudiantes manejan la coordinación entre *«si p divide a q y p divide a k, entonces p divide a q+k»*. Las respuestas obtenidas en estos ítems mostraban una comprensión acción de la idea de divisor (p divide a q) ya que los estudiantes multiplicaban y dividían, y una comprensión proceso cuando multiplicaban y aplicaban los criterios de divisibilidad. Los protocolos siguientes muestran este hecho.

E:	*Has tenido que obtener el valor de* $K = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 + 3$
Rebeca:	*Sí, he realizado las operaciones, he dividido y he contestado.*

E: *Has utilizado la calculadora. ¿Podrías indicarme alguna otra forma de responder a la pregunta sin necesidad de operar?*
Rebeca: *No, no sabría ninguna otra.*

En otro caso, la respuesta de Alejandro indica como realiza la coordinación de estos procesos.

E: *Por tanto si le sumamos 3 tendremos K. ¿K será par?*
Alejandro: *No, porque entonces será impar. No será divisible por 2.*
E: *¿Y será divisible por 4?*
Alejandro: *No. Pero yo lo que hice fue obtener el número K.*
E: *¿K es divisible por 3?*
Alejandro: *Sí, porque la suma de sus cifras es múltiplo de 3.*
E: *¿Y de otra manera sabrías decirlo? Observando los dos sumando de K.*
Alejandro: *Mmm, la primera parte si tiene un tres, por tanto será múltiplo de 3, y la segunda le sumamos 3, pues sí será múltiplo de 3.*
E: *¿Y por 6 será divisible?*
Alejandro: *Creo que no, porque si es de 6 será de 2 y de 2 no lo es.*
E: *¿Y divisible por 15?*
Alejandro: *Lo he operado y el resultado no es exacto, por tanto no.*

Finalmente, otro grupo de ítems que aparece en el nivel de ***«difíciles»*** están centrados en la *Relación entre el concepto* y procedimientos *de obtención del máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números.* (ítems: 7b, 7c, 7d, 7e y 7f).

E: *¿Qué es el mínimo común múltiplo? ¿Y el máximo común divisor?*
Victoria: *Realizas la descomposición factorial y tomas el más pequeño. Para el máximo común divisor tomas el más grande..*
E: *En las contestaciones de los dos últimos apartados contestas el m.c.d como 30 x 50, y el otro no lo has contestado. ¿No recuerdas hacer el mínimo?*
Victoria: *Sí, sí, haces la descomposición y tomas el común.*

La aparición en este grupo de la *Aplicación a problemas concretos en situaciones reales (ítems. 6 y 8a)* puede tener otra interpretación vinculada a la capacidad de modelizar situaciones reales por parte de los estudiantes a través de la idea de máximo común divisor. Esta situación volverá a repetirse en los ítems clasificados como *«Muy difíciles»* desde una perspectiva psicométrica Por ejemplo:

E: *Tu dices que se encontrarán de nuevo después de tres semanas.*

Victoria: *He hecho la descomposición factorial y el número común que aparecía en los dos lo he dado.*

....

E: *Has dado bien el resultado, pero pones que es el m.c.m. En el ejercicio 8 tienes que dividir las cuerdas.*

Luis: *No lo sé, es que lo confundo, pero lo he hecho dividiendo.*

Por último, los ítems clasificados como ***«Muy difíciles»*** hacen referencia a *«la inversión de la noción de múltiplo»* (es decir, dados los múltiplos encontrar el número), *«la coordinación de criterios de divisibilidad»* y *«la relación entre la descomposición factorial»*. Por ejemplo, el ítem 2,*»hallar un número del cuál se conocen 4 de sus múltiplos consecutivos (464, 493, 522 y 551)»*, exigía que los alumnos establecieran la relación *«Si a es múltiplo de b, entonces b es divisor de a»* conociéndola como objeto y desencapsulándola para hacerla efectiva. Para desencapsular este proceso el estudiante debería tener en cuenta que podía obtener un divisor común mediante la descomposición factorial, observar la diferencia entre términos sucesivos y/o realizar la división para comprobar que la diferencia obtenida es un divisor. La necesidad de desencapsular la idea de múltiplo (conocida como objeto) para usarla como proceso en la resolución de este ítem implica el nivel de dificultad observado. La entrevista confirma esta dificultad:

E: *Has dado como respuesta que no existe dicho número, ¿podías indicarme por qué?*

Pedro: *No sabría decir, es un problema difícil.*

....

E: *Se solicita el número que sea divisor de una serie dada, ¿por qué has indicado que la respuesta es 29?*

Luis: *Por que si restas da 29, pero ahora no me acuerdo muy bien ....*

E: *Pero ¿puedes afirmar que los números de la serie son múltiplos de 29?*

Luis: *No sé, bueno al multiplicar o dividir por 29 da exacto, pero...*

....

E: *Das como respuesta el valor de 1, puesto que no lo encuentras probando.*

Alejandro: *No encontraba otro, pues al dividirlos, no encontraba ninguno que estuviera en todos.*

E: *Es decir, estás buscando un divisor. Pero, ¿puedes obtenerlo?*

Alejandro: *Realizaré divisiones con la calculadora.*

- Otros items pertenecientes a este nivel de dificultad son los que se centran en la *«Relación entre los divisores de un número natural y la descomposición factorial de dicho número»* En el ítem 4d, «¿$3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$

es un múltiplo de $3^3 \times 5^2 \times 7$?», el tipo de número utilizado (exponente 18) hacía difícil la operatividad de la calculadora, de ahí que se necesitase más que una comprensión acción de la idea de divisor. De los estudiantes que contestaron a esta cuestión, la mayoría recurrieron a la operación en la calculadora y únicamente 2 dieron la respuesta correcta. Por ejemplo:

E:	*¿Así con todos? ¿Y para los dos últimos?*
Pedro:	*Sí, con todos. Pero el último no cabe en la calculadora. No, no sé.*

....

E:	*¿Y $3^4 \times 5^3 \times 7^3 \times 13^{18}$ es un múltiplo de $3^3 \times 5^2 \times 7$?*
Alejandro:	*Podría ser, tendría que operar y probarlo.*

- Finalmente, la coordinación de los criterios de divisibilidad para obtener otro criterio es el origen de la dificultad de algunos ítems. Por ejemplo, *«Criterios de divisibilidad por 2 y coordinación del criterio de divisibilidad por 6»*. En los ítems 3a1 y 3a4 se pide hallar una de las cifras desconocidas del número 2b45, para que este número sea divisible por 2 o por 6, respectivamente. La dificultad del ítem 3a1 (divisibilidad por 2) radica en que el número propuesto acaba en 5 y no conocen el criterio de divisibilidad por 2. Los 11 alumnos que contestan el ítem 3a4 determinan que el número propuesto no es divisible por 6 mediante la división, no utilizan la ***coordinación*** para pasar de la ***acción*** al ***proceso.*** Veamos algún de ejemplo:

E:	*¿Significará algo que 6 sea múltiplo de 2 y de 3?*
Alejandro:	*Pues.., creo que no. A ver, el número 6 es múltiplo de 3 y de 2. De 3 sí tenemos, pero de 2.... No , no lo sé.*

....

E:	*¿Y para que 2b45 sea divisible por 6?*
Luis:	*Mmm, tendría que utilizar la calculadora.*

- Las diferentes descomposiciones de un número natural como las utilizadas en los ítems 5a, 5b, 5c y 5d, tratan la descomposición del número 100 en dos, tres, máximo número de factores o factores primos, inciden otra vez en la influencia de la representación del número en la determinación de la comprensión por parte de los estudiantes de los diferentes elementos y relaciones matemáticas del esquema de divisibilidad. Los protocolos desde las entrevistas muestran como influye las diferentes representaciones de los números en la comprensión de las relaciones anteriores.

E:	*Así por ejemplo, en tu respuesta, ¿podrías indicar los factores de 100 para descomponerlo en dos factores?*

Pedro:	*Sí, en el primer caso 2 y 2.*
....	
E:	*Has contestado que puedes descomponer 100 en dos factores en la forma 50^2. Pero ¿al operar da 100?*
Luis:	*Si, pero, no, no da, tendría que ser 50+50.*

- Por último, cabe reseñar que en el trabajo de Brown, Thomas y Tolias (2002) se pregunta explícitamente por los conceptos de múltiplo y divisor con el objetivo de poder observar la concordancia entre los conceptos y las respuestas dadas por los alumnos. Con similar objetivo, se plantearon los ítems de nuestra investigación para los conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor. En el ítem 7a se pregunta por el concepto de mínimo común múltiplo. De las respuestas obtenidas, se desprende, por una parte, desconocimiento del concepto y, por otra, confusión del concepto con el procedimiento.

E:	*Has obtenido el m.c.m., ¿por qué?*
Pedro:	*Porque es una forma de hacerlo.*
E:	*¿Estás seguro de que el valor 60 obtenido es el correcto? ¿Por qué no puede ser por ejemplo 30?.*
Pedro:	*Sí estoy seguro. Porque, ..., sí porque con sucesivos 12 no se puede formar 30. El 12 no es divisor de 30.*
....	
E:	*Indica qué es el mínimo común múltiplo de dos números.*
Pedro:	*El mínimo común múltiplo es cuando dos números multiplicados por un mismo número dan do el mismo valor.*
....	
E:	*Pero cuando te indican la notación m.c.m. lo respondes correctamente, realizando la descomposición factorial.*
Pedro:	*Sí, pero.... es por que se hace así, ¿no?*

- Finalmente, entre los items muy difíciles aparecen también los centrados en la *aplicación del máximo común divisor de tres números naturales en situaciones reales». (Ítems 8b1 y 8b).* Ambos ítems tratan sobre la partición de tres cuerdas, en trozos de igual longitud, lo mayor posible y de cuántos trozos se pueden conseguir, respectivamente. La dificultad de éstos radica en que, al tratarse de tres longitudes 1980, 990 y 756 cm, realizar cálculos sencillos de ensayo y error, dividir o efectuar cálculos mentales supone mayor complejidad.

E:	*En tu contestación indicas que es 6, porque es el máximo común divisor. Y en el segundo has realizado la descomposición factorial, pero en el primero no.*

Alejandro: *En el primero lo hice mentalmente, porque los números son más fáciles, pero en ambos es el máximo común divisor.*

Discusión

Los resultados de este estudio indican que el cuestionario construido nos ha permitido discriminar diferentes formas de comprensión de los elementos matemáticos y sus relaciones que constituyen el esquema de divisibilidad en N desde la perspectiva APOS. De los resultados obtenidos, destacamos:

1. Los ítems del cuestionario permiten discriminar

   (i) diferentes formas de conocer los conceptos de divisibilidad. Así, los ítems muestran como los estudiantes para tomar decisiones recurren al uso de la división o multiplicación; sienten necesidad de operar para obtener la representación en el sistema de numeración decimal de los números descompuestos en factores primos. Los alumnos entrevistados muestran como principal forma de conocer la acción, realizando en la mayor parte de ocasiones la multiplicación y la división para justificar sus respuestas.

   (ii) a los alumnos con distinta comprensión, al no poder resolver aquellos ítems que exigen una comprensión objeto del elemento matemático al que hacen referencia y la desencapsulación de éste para poder usarlo como proceso en la resolución de estos ítems.

Estas dos características se han manifestado a través de la formas en las que los estudiantes usaban las diferentes maneras en las que se les representaban los números para manejar los elementos matemáticos y sus relaciones en el esquema de la divisibilidad.

2. Las características de algunos ítems permiten identificar cuando los estudiantes coordinan procesos para generar nuevos procesos. La dificultad de la coordinación de procesos y la relación con las características de los items utilizados se ponía de relieve cuando los estudiantes, aún teniendo resultados previos que les podían permitir realizar esta coordinación, realizaban acciones para fundamentar su respuesta.

3. El cuestionario permite identificar el papel que desempeña la comprensión de la descomposición factorial de un número natural como producto de factores primos, las características de la estructura multiplicativa y el Teorema Fundamental de la Aritmética en la encapsulación de la divisibilidad como un objeto. Zazkis y Campbell (1996), señalan la impor-

tancia de la descomposición en factores primos de un número para la ***tematización*** de la divisibilidad en un ***esquema.***

4. Los ítems en los que hay que utilizar los conceptos de divisor o múltiplo resultan «fáciles» al establecer asociaciones firmes entre divisor y la operación de dividir y múltiplo con la operación aritmética de multiplicar. Sin embargo, en los items en los que se debe usar la equivalencia y relaciones entre *«múltiplo»*, *«divisor»*, *«ser divisible por»* aumentan la dificultad mostrando que el cuestionario permite identificar la encapsulación de la divisibilidad como un objeto.

Desde los resultados obtenidos podemos asumir que el cuestionario ha cumplido los objetivos para los que fue elaborado, habida cuenta que la categorización de los items según su nivel de dificultad y las características de los mismos nos ha permitido discriminar las formas en las que los alumnos conocen los elementos matemáticos y sus relaciones del esquema de divisibilidad. La revisión de estos ítems con otras poblaciones deberá proporcionarnos información sobre cómo diferentes ítems ayudan a identificar diferentes formas de conocer.

Bibliografía

Brow, A.; Thomas, K.; Tolias, G. (2002): «Conceptions of divisibility: success and understanding». En S.R. Campbell and R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory* (pp. 41-82). Westport: Ablex Publishing.

Clark, J.; Cordero, F.; Cottrill, J.; Czarnocha, B.; DeVries, D.; St. John; D., Tolias; G.; Vidakovic, D. (1997): «Constructing a schema: The case of the chain rule». *Journal of Mathematical Behavior, 16* (4), 345- 364.

Clement, J. (2000): «Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability». En Kelly, A. y Lesh, R., *Handbook of research methodologies for science and mathematics education*. (pp. 547-589). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

DeVries, D.J. (2001): RUMEC / APOS Theory Glossary. Georgia College & State University. Milledgeville.http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html [Disponible 18 de Noviembre de 2003]

Dubinsky, E. (1991): «Reflective abstraction in advanced mathematical thinking». En Tall, D (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Boston: Kluver Academic Publishers.

Dubinsky, E. (2000): «De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3* (1), 47-70.

García, V.; Pérez, R. (1989): *La investigación del profesor en el aula.* Madrid: Escuela Española.

Goldin, G. (2000): «A scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research». In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* (pp.517-545). Mahweh, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zazkis, R.; Campbell, S. (1996): «Divisibility and Multiplicative structure of natural numbers: preservice teacher's understanding». *Journal for Research in Mathematics Education, 27 (5)*, 540-563.

Samuel David Bodí Pascual. IES Profesor Manuel Broseta. Banyeres de Mariola
Correo electrónico: samueldbodi@telefonica.net

Julia Valls . Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante.
Correo electrónico: julia.valls@ua.es

Salvador Llinares. Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante.
Correo electrónico sllinares@ua.es