Fracciones intermedias

Martin Kindt

Sumar de modo ingenuo

Y cuando hay fracciones,... es difícil, pero buscaré el denominador común...

Así medita Woutertje Pieterse, el hijo espiritual del decimonónico autor holandés Multatuli en la oficina de sus nuevos patrones Ouwetijd & Kopperlith. Es casi seguro que Woutertje está pensando en sumar (o restar) las fracciones. Ya que para multiplicar no tiene mucho sentido buscar el denominador común; como tampoco tiene sentido para la división. Se puede dudar si los 'Woutertjes', en el año 2003, saben perfectamente cuando y cómo deben buscar las fracciones con denominador común. Ciertamente es inevitable cuando se trata de fracciones con denominadores variables.

¿Quien de nosotros no se ha sorprendido cuando un alumno reduce una forma como $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$ a $\dfrac{3}{2x}$?

Sin duda su recompensa será un tachón rojo en la libreta o en el papel de examen. Pero, en lugar de presentar el método correcto, el profesor podría investigar con sus estudiantes cuál es el significado de esta suma ingenua de numeradores y denominadores.

Partiendo, por ejemplo, de $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{3}$ se obtiene $\dfrac{2}{5}$ y el valor de la última fracción está comprendido entre los valores de las dos fracciones de partida.

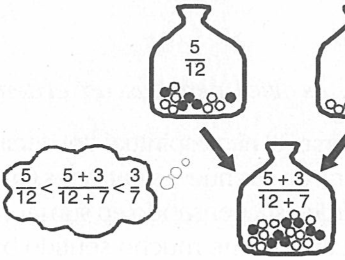
Después de algunos ejemplos más, se podrían sospechar que, siempre, el resultado de esta nueva operación será una *fracción intermedia.* Y la pregunta es ¿podemos explicarlo?

Utilizo un nuevo ejemplo como paradigma.

La fracción $\dfrac{5}{12}$ es un poco menor que la fracción $\dfrac{3}{7}$ ya que ambas son, respectivamente, iguales a $\dfrac{35}{84}$ y $\dfrac{36}{84}$, como tendría que comprobar Woutertje Pieterse.

Si se saca una bola de un jarrón con 12 bolas (5 negras y 7 blancas), la probabilidad de sacar una bola negra es un poquito menor que en un jarrón en el que 3 de las 7 bolas son negras.

Si se juntan los contenidos de ambos jarrones, la probabilidad de sacar una bola negra será un poco mayor si comparamos con el primer jarrón y un poco menor si comparamos con el segundo.



Una demostración formal

Supongamos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ con a, b, c, d números positivos.

Con la ayuda del denominador común, bd, se puede comprender que $ad < bc$.

Ahora comparemos $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+c}{b+d}$.

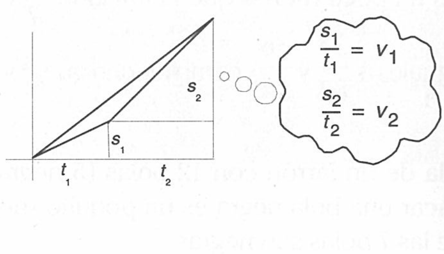
Se tiene: $\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)} < \frac{ab+bc}{b(b+d)} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{a+c}{b+d}$

Análogamente se tiene que: $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Se puede argumentar que se trata de una 'demostración dura'. Sin embargo yo pienso que hay mucha gente que se puede convencer mejor con las bolas blancas y negras.

Hay otro contexto que es más convincente.

Observa la siguiente gráfica 'tiempo-distancia' que corresponde con un paseo en bicicleta:



Durante los primeros t_1 minutos del paseo se pedalea con velocidad constante v_1; durante los siguientes t_2 minutos la velocidad (constante) fue mayor (v_2).

Por supuesto, la velocidad media en el total del paseo es más que v_1 y menor que v_2, como también muestra el dibujo. Pues la pendiente de la línea punteada se sitúa entre las pendientes de ambas partes de la gráfica.

¿Cómo se calcula esta velocidad media?: la distancia total dividida por el tiempo total.

Así tenemos otra vez que: $\dfrac{s_1}{t_1} < \dfrac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} < \dfrac{s_2}{t_2}$

Este contexto explica, inmediatamente, que el valor de la fracción intermedia depende de los representantes de ambas fracciones. Si se continúa el paseo un rato a la velocidad v_2, la fracción $\dfrac{s_2}{t_2}$ no cambia de valor, pero la fracción intermedia (que representa la velocidad media) crece.

Es divertido considerar los dos casos especiales; $t_1 = t_2 = t$ y $s_1 = s_2 = s$.

En el primer caso tenemos: $v_{med} = \dfrac{s_1 + s_2}{t + t} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s_1}{t} + \dfrac{s_2}{t}\right) = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$

Pues para fracciones con el mismo denominador, la fracción intermedia es la *media aritmética* de sus *productores*.

En el segundo caso tenemos:

$$v_{med} = \frac{s + s}{t_1 + t_2} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{s} + \frac{t_2}{s}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)}$$

En el caso de numeradores iguales la fracción intermedia es igual a la *media armónica* de sus *productores*.

Observo que la media armónica es menor que (o igual a) la media aritmética. Se puede pensar en un paseo con bicicleta, de ida y vuelta. El camino de ida se hace con viento favorable, el de vuelta con viento contrario. La velocidad media del paseo total es menor que la media aritmética de las dos velocidades, por la razón sencilla de que el ciclista va *más largo* (¡en tiempo!) con la velocidad menor.

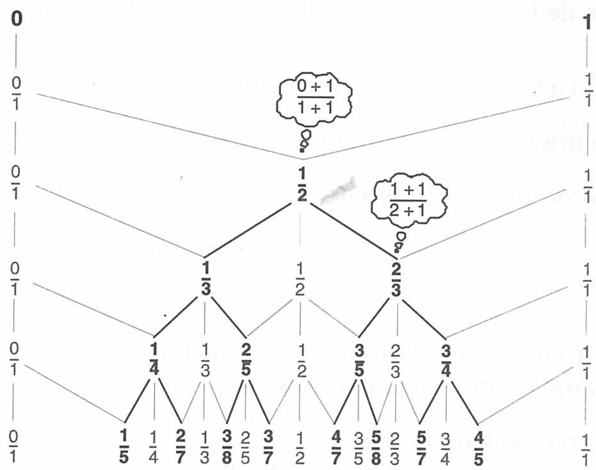
Árbol genealógico de las fracciones

La 'adición ingenua' de las fracciones nos da un árbol genealógico infinito de los números racionales entre 0 y 1.

Escribo los padres primitivos 0 y 1 como $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$. Ambos dan lugar a la fracción intermedia $\frac{1}{2}$.

De $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{2}$ nace $\frac{1}{3}$, en tanto que $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{1}$ producen $\frac{2}{3}$,... etcétera.

Después de cuatro pasos obtenemos:



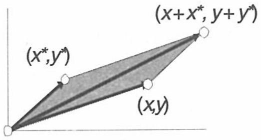
El esquema muestra muchas propiedades interesantes; por ejemplo:

1. Cada línea contiene una serie de fracciones, ordenadas de menor a mayor.
2. Sí $\frac{y}{x} < \frac{y^*}{x^*}$ son 'vecinos' en una línea, se tiene que $xy^* - yx^* = 1$.
3. Todas las fracciones del árbol (excepto $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$) son irreducibles.

La propiedad 1 es muy clara, pues en cada paso se añaden fracciones intermedias.

Para una posible demostración de las otras dos propiedades, usaré las herramientas del álgebra lineal.

Una fracción $\frac{y}{x}$ (con x e y números enteros positivos) corresponde con un 'vector' (x, y) en el plano Oxy.



La fracción intermedia de $\frac{y}{x}$ e $\frac{y^*}{x^*}$ corresponde con la suma de los vectores (x, y) e (x^*, y^*).

El número $xy^* - yx^*$ es el determinante de (x , y) e (x^* , y^*),en la notación clásica:

$$\begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix}$$

Si $\frac{y}{x} < \frac{y^*}{x^*}$ el determinante representa el área del paralelogramo formado por los vectores (x, y) e (x^*, y^*).

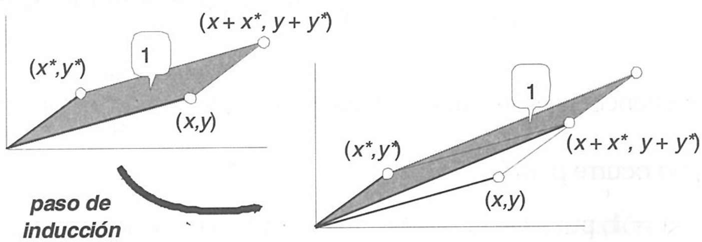
La demostración de la propiedad 2 se hace por inducción matemática.

El teorema es correcto para el caso: $(x , y) = (1 , 0)$ y $(x^* , y^*) = (1 , 1)$.

Luego (por inducción) resulta que:

$$\begin{vmatrix} x & x+x^* \\ y & y+y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+x^* & x^* \\ y+y^* & y^* \end{vmatrix}$$

Una explicación geométrica es:



El área del paralelogramo no cambia por medio de la transformación ilustrada.

La propiedad 3 es una consecuencia de la propiedad 2.

Sea $\frac{y}{x}$ una fracción del árbol, y sea $\frac{y}{x} = \frac{kv}{ku}$ con x, y, k, u, v números naturales.

Si $\frac{y}{x}$ es un vecino de $\frac{y^*}{x^*}$ por dicha regla, tenemos que

$$1 = \begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kv & x^* \\ ku & y^* \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} v & x^* \\ u & y^* \end{vmatrix}$$

Entonces, como divisor de 1, k es igual a 1.

A partir de estas tres propiedades se puede probar que el árbol contiene **todos** los números racionales entre 0 y 1 (representados por fracciones irreducibles). La demostración no es tan fácil como los razonamientos anteriores y necesitamos el principio de reducción al absurdo.

Supón que la fracción $\frac{n}{d}$ **no** está en el árbol siendo n y d números naturales, mutuamente indivisibles,

Entonces se puede aproximar esta fracción, paso por paso y acercarnos por medio de 'fracciones vecinas' del árbol.

Supón que después de un cierto número de pasos, tenemos

$\frac{y}{x} < \frac{n}{d} < \frac{y^*}{x^*}$ con $\frac{y}{x}$ e $\frac{y^*}{x^*}$ vecinos.

El vector $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{n})$ es linealmente dependiente de los vectores (x, y) e (x^*, y^*), es decir:

$(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{n}) = \lambda\,(x, y) + \mu\,(x^*, y^*)$, con λ y μ racionales.

Entonces, por la propiedad 2, tenemos:

$$\begin{vmatrix} x & \boldsymbol{n} \\ y & \boldsymbol{t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & \lambda x + \mu x^* \\ y & \lambda y + \mu y^* \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix} + \mu \cdot \begin{vmatrix} x & x^* \\ y & y^* \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu$$

En consecuencia, μ es un número entero y dado que $\frac{y}{x} < \frac{n}{d}$ es también $\mu > 0$.

Lo mismo ocurre para λ.

Sea $\lambda = \mu = 1$, pues $\boldsymbol{d} = x + x^*$ y $\boldsymbol{n} = y + y^*$ y la fracción $\frac{n}{d}$ estará en la siguiente línea del árbol.

$$\begin{tikzcd} \frac{y}{x} \arrow[dr, no head] & & \frac{y^*}{x^*} \arrow[dl, no head] \\ & \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{d}} & \end{tikzcd}$$

Sea $\lambda > 1$ o $\mu > 1$, pues: $\boldsymbol{d} > x + x^*$ y $\boldsymbol{n} > y + y^*$ entonces $\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{n} > x + x^* + y + y^*$.

Ahora la fracción $\frac{n}{d}$ puede quedar comprendida por $\frac{x+x^*}{y+y^*}$ y una de las fracciones $\frac{y}{x}$ o $\frac{y^*}{x^*}$

Luego, se puede escribir el vector $(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{n})$ como combinación lineal de los vectores que corresponden con los nuevos vecinos.

La suma de los numeradores y denominadores del nuevo par de fracciones vecinas es al menos 1 unidad mayor que la suma precedente $x + x^* + y + y^*$.

Si $\frac{n}{d}$ no estuviera en el árbol, el proceso de 'encerramiento' jamás terminaría.

Ya que la suma de los numeradores y denominadores de las aproximaciones $\frac{y}{x}$ e $\frac{y^*}{x^*}$ está creciendo en cada paso al menos una unidad y también se tiene que esta suma es menor que el valor constante $\boldsymbol{d} + \boldsymbol{n}$

¡De esta forma llegamos a una contradicción!

Entonces tenemos que el árbol produce cada número racional entre 0 y 1.

Además queda claro que se puede construir, al invertir las fracciones, un árbol con todos los números racionales > 1.

El árbol que está compuesto de los dos árboles proviene de 1860 y tiene el nombre de sus inventores Stern (un matemático alemán) y Brocot (un relojero francés).

Aproximación de $\sqrt{2}$

En el árbol de las fracciones > 1, se puede buscar la fracción tal que su cuadrado es igual a 2.

Una vez que la hemos encontrado la llamamos $\sqrt{2}$

Claro que debe quedar entre los vecinos $\frac{1}{1}$ y $\frac{2}{1}$

La fracción intermedia es $\frac{3}{2}$ y puesto que $3^2 = 2 \times 2^2 + 1$, tenemos que $\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

Así, para llegar a la fracción intermedia, construimos una serie de aproximaciones $\dfrac{y}{x}$ e $\dfrac{y^*}{x^*}$

En cada paso calculamos el valor de

$$D = y^2 - 2x^2, \text{ si } D > 0, \text{ vale } \frac{y}{x} > \sqrt{2}\text{; si } D < 0, \text{ tenemos } \frac{y}{x} < \sqrt{2}.$$

Veamos la tabla con los resultados:

(x, y)	(x^*, y^*)	$D = y^2 - 2x^2$	$D^* = y^{*2} - 2x^{*2}$
(1 , 1)	(1 , 2)	–1	+2
(1 , 1)	(2 , 3)	–1	+1
(3 , 4)	(2 , 3)	–2	+1
(5 , 7)	(2 , 3)	–1	+1
(5 , 7)	(7 , 10)	–1	+2
(5 , 7)	(12 , 17)	–1	+1
(17 , 24)	(12 , 17)	–2	+1
(29 , 41)	(12 , 17)	–1	+1
(29 , 41)	(41 , 58)	–1	+2
(29 , 41)	(70 , 99)	–1	+1
(99 , 140)	(70 , 99)	–2	+1
(169 , 239)	(70 , 99)	–1	+1
(169 , 239)	(239 , 338)	–1	+2
(169 , 239)	(408 , 577)	–1	+1

Unas observaciones.

a. Los pares de números de la lista son las soluciones positivas de las ecuaciones diofánticas $y^2-2x^2= \pm 1$ e $y^2-2x^2 = \pm 2$

b. La serie de las aproximaciones que corresponden con las soluciones de $y^2-2x^2 = \pm 1$ eran conocidas ya en tiempos de los Pitagóricos.

c. Una aproximación famosa corresponde con el par (408 , 577); proviene de las matemáticas védicas:

$$\frac{577}{408} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{3\times4\times34}\approx 1.41421568$$

Que es válido hasta cinco decimales después el punto.

Mirando las dos últimas columnas de la tabla nos parece que son periódicas.

¡Si podemos *demostrar* la periodicidad, quedará probada la irracionalidad de $\sqrt{2}$!

En este caso es cierto que no aparece una fracción en el árbol de Stern-Brocot que satisface la ecuación $y^2 - 2x^2 = 0$, o en otras palabras, no existe una fracción de números naturales que sea igual a $\sqrt{2}$.

Hay otra regularidad visible en la tabla.

En los casos $D=-1$, $D^*=2$, tenemos que $y^* = 2x, x^* = y$.

Y en los casos $D=-2$, $D^*=1$, tenemos $y = 2x^*, x = y^*$.

Esto se puede demostrar con álgebra elemental.

Supón que $(x, y) = (a, b)$, $(x^*, y^*) = (b, 2a)$ y $D=b^2-2a^2= -1$.

Entonces $D^*=4a^2-2b^2= -2D=2$.

La fracción intermedia se representa por $(x + x^*, y + y^*) = (a + b, 2a + b)$ con

$$(2a+b)^2-(a+b)^2 = -(b^2-2a^2) = 1$$

De este modo podemos continuar el procedimiento unos pasos más. El lector puede comprobar las reglas siguientes:

(x, y)	(x^*, y^*)	$D=y^2-2x^2$	$D^*=y^{*2}-2x^{*2}$
(a, b)	$(b, 2a)$	-1	$+2$
(a, b)	$(a+b, 2a+b)$	-1	$+1$
$(2a+b, 2a+2b)$	$(a+b, 2a+b)$	-2	$+1$
$(3a+2b, 4a+3b)$	$(a+b, 2a+b)$	-1	$+1$
$(\underbrace{3a+2b}_{A}, \underbrace{4a+3b}_{B})$	$(\underbrace{4a+3b}_{B}, \underbrace{6a+4b}_{2A})$	-1	$+2$

Combinando con la salida de la primera tabla se prueba la periodicidad (con periodo 4) y por eso se tiene la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Resumen breve

Sumar simultáneamente los numeradores y los denominadores de dos fracciones es algo más que la equivocación de un alumno. No es una operación válida para números racionales, en el sentido usual, porque el resultado depende de las representaciones de los racionales. En el árbol de Stern-Brocot esta desventaja no pesa mucho, ya que todas las fracciones del árbol son irreducibles.

Este árbol nos da un algoritmo facilísimo para aproximar números irracionales, al menos cuando son algebraicos (es decir que satisfacen una ecuación polinomial). Partiendo de los dos números enteros consecutivos que encierran al número irracional, se puede descender en el árbol hasta aproximar dicho número de forma progresiva. El algoritmo es lentísimo, porque se debe transitar por todas las capas del árbol. Un aspecto positivo es que el procedimiento es aplicable en general.

De la misma forma se puede retar a los estudiantes a investigar tales tablas sobre la periodicidad de otros números algebraicos, como por ejemplo $\sqrt{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}, \sqrt[3]{2}$, utilizando $D=y^2-3x^2$, $D=y^2-xy-x^2$, $D=y^3-2x^3$, respectivamente.

Si se aplica el algoritmo al número áureo, aparece –no de forma inesperada– las fracciones de Fibonacci:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$$

Aún con un número transcendente como $\log_{10}2$, es posible descender en el árbol, utilizando $D=10^y - 2^x$, para encontrar fracciones aproximadas.

Para terminar, se puede encontrar un tratamiento amplio del árbol de Brocot-Stern , y una representación alternativa de los números reales (Minkowski, 1904), en el libro *Concrete Mathematics for Computer Science,* de R.L. Graham, D.E.Knuth y O. Patashnik, publicado por Addison-Wesley en 1994.

(Arreglos para su publicación en castellano por J.A. García Cruz)

Martin Kindt es investigador del Instituto Freudenthal de la Universidad de Utrecht. Retirado, sigue trabajando en la formación de profesores.
Correo electrónico: M.kindt@fi.uu.nl