Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato [1]

Marcelino J. Ibañes y Tomás Ortega

Resumen: Desde hace unos cuantos años, en el Área de Didáctica de la Matemática de nuestra Universidad, se viene desarrollando un Proyecto de Investigación sobre la Demostración Matemática, en el nivel de bachillerato (alumnos de 16-17 años). El trabajo que aquí se explicita forma parte de ese proyecto y en él se estudian cuatro dimensiones de la demostración matemática: histórica, epistemológica, social y cognitiva. Asimismo se trata de dar respuesta a las siguientes preguntas: *¿Qué es la demostración en matemáticas? ¿Para qué sirve? ¿Dónde está su valor? ¿Cómo se aprende?*[1]

Abstract: It is a long time since the Area of Didactic of Mathematics in our University has been developing a Research Project on mathematics proof in high School level (pupils between 16-17 years old). The work here presented is a part of it, and it is articulated in four dimensions of mathematics proof: historic, epistemological, social and cognitive. This analysis tries to give an answer to the following questions: What is the mathematics proof? What does it serve for? Where is its value? How is it learned?

Introducción

La demostración matemática ha despertado un interés creciente en Didáctica de la Matemática y no son pocos los autores, tanto de esta disciplina como de las propias Matemáticas, que coinciden en señalar a la demostración matemática como el procedimiento más importante de las matemáticas, el motor que ha permitido el desarrollo de esta Ciencia. El trabajo de investigación que venimos desarrollando en nuestra universidad nos ha permitido establecer cuatro dimensiones de la demostración, que están relacionadas con las cuestiones formuladas (que no son exclusivas), pero que sin duda contribuyen a una mayor aproximación y a una mejor interpretación de este procepto desde la Didáctica de la Matemática. En la dimensión histórica se va a explicitar una brevísima descripción de los aspectos más relevantes de la demostración desde la época clásica. En la dimensión epistemológica se tratan aspectos relativos a la fundamentación y a los métodos del conocimiento científico relativos a la demostración matemática. En la dimensión social se hace un análisis de las funciones propias de la

[1] Este trabajo es parte de un proyecto de investigación subvencionado por la Dirección General de Enseñanza Superior BXX2000-0069

demostración desde el punto de vista de la matemática educativa. En la dimensión cognitiva se describe un marco de modalidades de esquemas de prueba que ayudan a descubrir el estado en el que se encuentran los alumnos. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.

Dimensión histórica

Para hacernos una idea de lo que supone demostrar y de su necesidad, y con el fin de aplicarlo después a su enseñanza, proponemos una breve descripción de la presencia de la demostración en la historia de las matemáticas. Los historiadores coinciden en que en las civilizaciones anteriores a la griega no se encuentran teoremas ni demostraciones formales, pero sí algunas explicaciones acerca de la validez de los resultados que aplicaban (Boyer, 1987, 37-67), y que deben considerarse como una forma de prueba o demostración en un sentido amplio (Gheverghese, 1996, 183), de manera que Wilder (1944, 156) considera que las ideas ya estaban suficientemente maduras para que hicieran su aparición los teoremas y las demostraciones. Y, esto sucede en Grecia (Kleiner 1991, 293), ya sea por la estructura de su sociedad, o por la aspiración de la filosofía griega de encontrar las últimas causas, (Kleiner 1991, 293) o por la intención pedagógica de los recopiladores del saber geométrico. En opinión de Boyer (1999, 111), resulta razonable señalar que el punto de partida de la forma racional deductiva de la matemática se produjo en el siglo V a. C. -descubrimiento de segmentos inconmensurables, paradojas de Zenón... -, aunque fuera Eudoxo de Cnido el que primero fundamentó esta organización deductiva sobre un sistema explícito de axiomas (Kline 1992, 81), además de aplicar distintos *métodos* de demostración -*reducción al absurdo*, *exahusción*, etc.- y de utilizar de distintos *modos* de exposición -*analítico*, *sintético*-. Una vez establecido el método hipotético-deductivo y de que éste fuera consolidado por Euclides, los matemáticos griegos posteriores, como por ejemplo, Arquímedes y Apolonio, utilizaron este método como forma de exposición de sus investigaciones en geometría.

Con todo rigor se puede considerar que en esta época también se fundamentó la Didáctica de la Matemática, ya que buena parte de los tratados que se escribieron tenían como fin la enseñanza de esta Ciencia. Desde esta perspectiva se pueden destacar a los Pitagóricos, a Platón, a Zenón y a una lista interminable de la que sin duda hay que destacar a Euclides, por sus *Elementos*, y a Arquímedes, porque en su *Método* nos describe las ideas que le llevaron a probar sus descubrimientos. Sin embargo, durante el período greco-romano, en Alejandría se produce un resurgimiento de la aritmética y del álgebra, se desarrollan independientemente de la geometría y poco a poco se va abandonando el método hipotético-deductivo.

Otras civilizaciones, como los hindúes o los árabes, avanzaron en estas materias, pero optaron por desarrollar los algoritmos en lugar de buscar una Fundamentación de sus conocimientos, por lo que no se interesaron especialmente por las demostraciones. Volviendo a occidente, durante la Edad Media se produce una despreocupación por el mundo físico, centrándose el interés intelectual en la espiritualidad, por lo que se produce un abandono del conocimiento matemático. Es a partir del siglo XII cuando resurge el interés por una explicación racional de la naturaleza, y comienzan a traducirse obras árabes y griegas, reiniciándose así la actividad matemática en Europa. En la Alta Edad Media, París y Oxford son los centros del saber y se producen los primeros avances significativos: en el Merton College se construye por primera vez una gráfica funcional en un sistema cartesiano; Nicole de Oresme, hacia el año 1365, logra verificar geométricamente el cambio uniforme de velocidad y es el primero que consigue sumar la serie armónica. El descubrimiento de los números complejos y de los logaritmos en la primera mitad del S. XVI dieron otro impulso y abrieron la posibilidad de considerar nuevos estilos a las demostraciones, pero fue la introducción de un simbolismo adecuado -Viète, Descartes, Leibniz- lo que resultó fundamental para el desarrollo de las demostraciones. Éste permitió el descubrimiento de nuevas relaciones y produjo la inversión en la dependencia del álgebra respecto de la geometría, pues a partir de entonces se resolvieron problemas geométricos mediante procedimientos algebraicos. Además, se introducen nuevos métodos de demostración *-inducción completa* o *descenso infinito*-.

En estos tiempos comenzó también a desarrollarse el análisis matemático. Sus creadores -Cavalieri, Barrow, Newton, Leibniz, Saurin y otros- se lanzaron abiertamente al descubrimiento de nuevos resultados siguiendo modelos de razonamiento influenciados por la termodinámica y por la dinámica de fluidos, y descuidando los aspectos de rigor. Los conceptos sobre los que se basaron –indivisibles, infinitésimos, diferenciales, etc.- eran muy imprecisos y, como describe L. A. Sainz (2004) en su trabajo de tesis, no fueron bien formulados ni entendidos. Esta situación hizo que surgieran fuertes controversias y críticas a los nuevos métodos (C. Huygens, O. Gherli, M. Rolle), y que en el siglo XVIII (L. A. Sainz 2004, Kline 1992, 567-577) surjan intentos de fundamentación más rigurosa; los matemáticos ingleses tratan de hacerlo sobre la geometría y la mecánica, mientras que los continentales prefieren apoyarse en el álgebra. Entre estos últimos cabe citar a Euler, D'Alambert y Lagrange. A finales de este siglo, la matemática se caracterizaba por su dependencia de la física, la supremacía del razonamiento inductivo, la confianza en las operaciones formales y la indiferencia respecto al rigor.

En el siglo XIX comienza una época en la que los matemáticos revisan los conceptos y métodos que se han utilizado en los dos siglos anteriores, dando paso a un período de reflexión y fundamentación. Gauss vuelve al rigor de la Geometría y lo aplica a todos sus descubrimientos; Cauchy establece el concepto de límite, basándose en él definió otros fundamentales –continuidad, derivada, integral- y dedujo los teoremas básicos del análisis. Esta preocupación por el rigor es compartida por otros matemáticos: Bolzano, Abel, Dirichlet, etc. No obstante, como señala Kleiner (1991, 299-300), la respuesta de Cauchy a la falta de rigor de los matemáticos del siglo XVIII genera otros problemas, como el relacionado con la mezcla de estilos que utiliza. Esta dificultad fue abordada por los matemáticos relacionados con la «Escuela de Berlín» (Weierstrass, Kronecker, Dedekind y Cantor, principalmente), que se propusieron demostrar los teoremas del análisis de una forma puramente aritmética, dando lugar así a lo que se conoce como *aritmetización del análisis* (Dedekind, 1963, 2). Puesto que la base de todo el análisis se encuentra en los números reales, estos matemáticos encaminaron sus esfuerzos en definir aritméticamente los números reales, construyéndolos a partir de los naturales. De esta manera, lo que faltaba era dar una fundamentación a los números naturales. Peano lo hace definiéndolos *axiomáticamente*. Esta misma técnica es empleada por Hilbert para definir los números reales, lo que suscita las protestas de Russell (Kline 1992, 1308).

Por otra parte, Cantor desarrolló la *teoría de conjuntos* y la de los *cardinales transfinitos*, que constituye un tratamiento sistemático del *infinito actual* y contiene resultados muy sorprendentes en su época. Según de Lorenzo (1977, 131-136), Cantor ofreció ingeniosas y complicadas demostraciones que precisaron las técnicas matemáticas más refinadas, y esto supuso un cambio en el modelo demostrativo. La correspondencia que Cantor mantuvo con Dedekind, (Cavaillés 1962), pone de relieve la importancia de la demostración como comunicación de conocimiento matemático.

En geometría, hasta mediados el siglo XIX, y a pesar de algunas objeciones de sus numerosos comentaristas, los *Elementos* de Euclides fueron considerados como un modelo de rigor matemático, pero las investigaciones en las *geometrías no euclídeas* fomentaron el espíritu crítico de los matemáticos ante las demostraciones que aquellos contenían y se emprendió la labor de la fundamentación de la geometría euclídea. Ésta culminó con los *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert y a finales del S. XIX, los axiomas de Euclides, que eran idealizaciones de la realidad física y se consideraban como verdades evidentes que no necesitan demostración, dieron paso a axiomáticas que no pretenden que los axiomas sean verdaderos ni evidentes, sino simplemente proposiciones relativas a los términos primitivos que se toman como punto de partida. Por otra parte, como resalta Kleiner (1991, 304), el método axiomático moderno constituye una herramienta de descubrimiento de nuevos resultados, de manera que las actividades de descubrimiento y demostración, tantas veces opuestas, coexisten en el método axiomático.

El álgebra, la lógica, o el cálculo de probabilidades experimentan también transformaciones muy profundas, y a comienzos del siglo XX todas estas áreas están fundamentadas axiomáticamente. Sin embargo, no tardan en aparecer grietas: Hilbert no había podido demostrar la independencia de sus axiomas para la geometría euclídea, la consistencia de ésta quedaba condicionada a la de la aritmética, y empezaron a surgir las primeras paradojas en la teoría de conjuntos, lo que impulsó nuevos intentos de axiomatización que dejaron abierto el problema de la consistencia de esta teoría. Simultáneamente, la preocupación por dar una base más sólida a las matemáticas dio lugar a diferentes corrientes en la fundamentación de las matemáticas: *logicismo*, *formalismo* e *intuicionismo*. De éstos últimos, interesa aquí dejar constancia de su insistencia en que las demostraciones debían ser constructivas y, en consecuencia, no admitieron el método de demostración por reducción al absurdo. En este estado de cosas, Gödel -en 1931- enuncia su teorema de *incompletitud*: *Una teoría axiomática que incluya la aritmética no puede ser a la vez consistente y completa*. Este sorprendente teorema echa por tierra el sistema de axiomas para la lógica de Whitehead y Russell, la axiomatización de la teoría de conjuntos de Zermelo y Fraenkel, y la de Hilbert de la teoría de números. Todos estos hechos produjeron un estado de división entre los matemáticos –más en el plano teórico que en el práctico- respecto a lo que debe considerarse una demostración, que fue muy patente hasta mediados del siglo XX.

En el último tercio del siglo XX ha recibido un impulso especial la matemática aplicada y la aplicación de los medios informáticos se ha extendido a la justificación de algunos teoremas, sobrepasando una función de simple auxiliar de generación o comprobación de datos para jugar un papel más esencial –demostración del *problema de los cuatro colores*, por de Appel y Haken en 1976-, lo que ha llevado a plantear la necesidad de una reflexión sobre el significado y la *función* de las demostraciones en matemáticas. Se han opuesto diferentes razones a las pruebas realizadas mediante un ordenador: no es posible realizar una revisión completa, puesto que se basan en programas no publicados; tanto el hardware como el software están sujetos a error; estas demostraciones no explican *por qué* el resultado es verdad, lo que para de Villiers (1993) empobrece las funciones de la demostración; etc. De esta forma surge una nueva idea de «demostración», una clase de prueba casi-empírica no infalible, de tal forma que los teoremas matemáticos no pueden establecerse con certeza absoluta. Además, esta falta de seguridad en la validez de un teorema se puede extender a los demostrados según los cánones tradicionales, ya que según Davis y Hersh (1988, 33), citando a Ulam, cada año se publican más de doscientos mil teoremas, algunos de los cuales son enormemente largos y complicados, lo que hace muy difícil la tarea de su revisión. Ésta es acometida por un número relativamente reducido de personas y, por tanto, es posible que después del examen permanezcan errores o lagunas.

Hanna y Jahnke (1996, 880-884) y Hanna (1996, 3-4) hacen referencia a las *pruebas probabilísticas,* en las que la rectitud de una proposición se determina con un cierto margen de error –expresado en términos de probabilidad-, y a otras ideas de demostración como las *zero-knowledge proofs*, las *holografics proofs*, etc., que no siguen los cánones tradicionales. Un punto de vista diferente es el de Lakatos, quien estima que las demostraciones informales –llamadas *pre-formales*- deben ser sometidas a examen continuamente, ya que pueden ser objeto de *falsación* (Lakatos 1981, 96).

Este breve recorrido histórico sobre las ideas que han rodeado a la demostración matemática –desde la propia disciplina- nos permite hacer algunas reflexiones, cuya consideración puede ser útil en su enseñanza:

- No existe un modelo de demostración independiente de la época ni de las personas que han construido el conocimiento matemático.
- Las exigencias de rigor en la argumentación matemática han ido variando a lo largo de la historia.
- El rigor absoluto es inalcanzable. Nunca se ha podido conseguir una certeza total en los resultados obtenidos, y no debemos pensar que la idea actual de demostración va a ser la última.
- No ha habido siempre un total acuerdo entre los matemáticos en cuanto a que los conceptos y procedimientos utilizados fuesen las más adecuados.
- Resulta enriquecedora la búsqueda de distintas fundamentaciones para una teoría, diferentes explicaciones para un resultado, y distintos estilos y métodos para una demostración.
- Esta diversidad propicia también la coexistencia plural de las funciones de la demostración.

Dimensión epistemológica

En la *demostración* se utiliza una clase de *argumentación* típica de las Matemáticas. Y, esto es así porque los procedimientos de verificación que se utilizan en otras áreas del saber son de distinta naturaleza. Así, los de las ciencias experimentales se basan en la evidencia empírica de los hechos, los de la economía en la evidencia estadística de los resultados, y los de la historia en la evidencia de los datos y de los documentos. No obstante, el término *demostración* se utiliza en diversos contextos, aunque con distintos significados –como muestra Martínez Recio (1999)-. Centrándonos en las matemáticas, podemos pretender una definición *esencial*. En este caso está claro que dicha definición dependería del lugar y del momento histórico. Incluso en épocas en las que ha primado la presentación axiomática de las teorías matemáticas el concepto de demostración tendría matices diferentes, como se ha puesto de manifiesto en la comparación de la axiomática griega con las del siglo XIX. Una fuente, relativamente reciente en este sentido, es Bourbaki (1970), que para definir lo que entiende por demostración comienza con una serie de conceptos previos. En concreto, establece lo que son los signos de una teoría matemática, lo que se entiende por emsambladura y, finalmente, cómo se caracteriza a una construcción formativa de una teoría.

Seguidamente, Bourbaki da una ilustración extensiva del término y expone que un *texto demostrativo* de una teoría T comprende:

1°. Una construcción formativa auxiliar de relaciones y términos de T.

2°. Una *demostración* de T, es decir, una sucesión de relaciones de T incluidas en la construcción formativa auxiliar, tales que, para cada relación ***R*** de la sucesión, se verifica al menos una de las condiciones siguientes:

a_1) ***R*** es un axioma explícito de T;

a_2) ***R*** resulta de la aplicación de un esquema de T a términos o relaciones incluidos en la construcción formativa auxiliar;

b) en la sucesión hay dos relaciones **S** y ***T***, que preceden a ***R***, tales que ***T*** es $\boldsymbol{S \Rightarrow R}$.

Otra orientación diferente a ésta es la que dan Bouvier y George (1984) que explicitan las significaciones de la *demostración formal del cálculo de predicados* y de la *demostración formal del cálculo de proposiciones.*

Pero, está claro que tales demostraciones *formales* pueden interesar a un investigador en lógica o en fundamentos de las matemáticas, pero no se trata de la clase de pruebas que se consideran en el ámbito de la enseñanza secundaria –o universitaria-, y ni siquiera se trata del sentido que tiene la demostración para un matemático profesional. Nosotros consideramos la demostración en un sentido *no formal*. En este sentido, los investigadores en Didáctica de la Matemática distinguen distintos *niveles* de demostración. Por ejemplo, Van Dormolen (1977) distingue tres niveles de demostración correspondientes a los niveles de abstracción en los que trabaja el alumno: *nivel cero* el estudiante limita su pensamiento a objetos específicos; primer nivel, en el que se trabaja con objetos como representantes de una clase; segundo nivel, en el que se producen razonamientos generales. Bell (1979) distingue otras tres dimensiones en la comprensión y el uso de las demostraciones: el *grado de regularidad o de racionalidad* esperado por los alumnos, la *cualidad explicativa* de la respuesta y el *nivel de sofisticación de las técnicas de demostración* disponibles para el alumno. Semadeni (1984) propone una vía de enseñanza intermedia entre la explicación intuitiva y la demostración formal que denomina *demostración acción*. Balacheff (1987) distingue entre *pruebas pragmáticas*, *pruebas intelectuales* y *demostraciones*. La distinción viene dada en función del *contrato didáctico* establecido con los alumnos, que se manifiesta por el cambio de función de la actividad matemática en el aula. Las primeras son efectuadas por el propio alumno -por ejemplo, en la geometría práctica, la de regla y compás- con el fin de establecer la validez de una proposición. Cuando no es posible acceder a su realización práctica -por ejemplo, en geometría deductiva-, las validaciones son intelectuales. Entre las pruebas pragmáticas y las intelectuales el autor sitúa distintos niveles:

- El primero es el del *empirismo ingenuo*. Se trata de concluir la veracidad de una proposición a partir de la realización de un número reducido de casos.
- La *experiencia crucial* es un procedimiento de validación en el que un individuo plantea explícitamente el problema de generalización, y lo resuelve mediante la realización de un caso que considera lo menos particular posible.
- El *ejemplo genérico* consiste en la explicación de las razones de validez de una proposición mediante la realización un caso que se considera representativo de una clase de individuos.
- La *experiencia mental*. No se lleva a cabo la experiencia, sino que simplemente se imagina su realización.

Van Ash (1993), que intenta responder a la cuestión de cómo se puede tratar de justificar un teorema. Este autor considera tres niveles de demostración:

- *Demostraciones formales:* Las demostraciones «rigurosas» que se incluyen en los textos de matemáticas universitarias.
- *Pruebas mediante dibujos o ejemplos:* Las pruebas sin palabras.
- *Demostraciones pre-formales:* Según van Ash *«By a pre-formal proof we understand a line of reasoning which can be formalized to a formal proof, but in which the essential idea is already present»*.

Para van Ash esta clase de pruebas se adapta mejor a la capacidad intelectual de los estudiantes y son argumentos matemáticos correctos. Sin embargo, advierte que no se trata de probar experimentalmente una proposición, que no deben estar basadas íntegramente en argumentos visuales y que no se trata de simples comprobaciones en casos particulares, aunque pueden incluir acciones concretas. Este autor recomienda la utilización de este tipo de pruebas en la docencia, como paso previo a las demostraciones formales o como sustitución de estas últimas.

Hay bastantes más autores que definen niveles de demostración, pero aquí sólo citaremos a Miyazaki (2000) que establece seis niveles entre las *pruebas inductivas* y las *demostraciones algebraicas*, en el ámbito de la *lower secondary school* en Japón (13-15 años). Miyazaki considera que las «pruebas» y «demostraciones» comparten actores, objetos y objetivos, pero difieren en los contenidos y en la representación. En el ámbito de contenidos considera diferencias fundamentales en el razonamiento lógico, en los procedimientos –inducción frente a deducción y analogía- y el punto de partida al considerar una casuística frente a otras proposiciones ya admitidas. En cuanto a la representación entiende que la demostración tiene un lenguaje funcional, mientras que las pruebas pueden utilizar dibujos y objetos manipulables. La combinación de contenidos y representaciones da lugar a seis categorías de «procesos de prueba», pero este autor sólo señala cuatro niveles básicos en los procesos de prueba en función de las diferencias. Son estas cuatro: diferencian las «demostraciones» de las «pruebas», los contenidos y las representaciones. En el eje de los contenidos define dos categorías: *razonamiento inductivo* y *lenguaje funcional*, *razonamiento deductivo* y *lenguaje funcional*, *razonamiento inductivo* y *lenguaje no funcional*, *razonamiento deductivo* y *lenguaje no funcional*.

Otra posibilidad de delimitar cómo son las demostraciones y a qué dan validez, y que en cierto modo enlaza con Mayazaki, consiste en hacer un estudio de tipo *descriptivo*. Para ello, basta con observar detenidamente los enunciados de los teoremas y las demostraciones que figuran en los textos de Matemáticas de bachillerato y universitarios y aislar las características que presentan. En este sentido, Ibañes y Ortega (1997) revisan las formas de demostración más usuales en la matemática elemental (bachillerato y primeros cursos de universidad) y proponen una clasificación de las *técnicas* de demostración relacionándolas con los enunciados de los teoremas y teniendo en cuenta distintos criterios a la vez. La clasificación de las demostraciones que proponen estos autores es la siguiente:

- La estructura lógica del enunciado del teorema da lugar a demostraciones de *los tipos*: de *condición necesaria*, de *condición suficiente*, de *condición necesaria y suficiente*.

- Cuando en la estructura lógica se hace alguna referencia a la *existencia* de algún objeto matemático la demostración puede ser: de *existencia simple*, de *existencia y unicidad*, o de *imposibilidad*.
- Si se atiende a los *procedimientos lógicos*, hay que considerar distintos *métodos* de demostración: por *silogismo*, *demostración por casos*, por *reducción al absurdo*, por *inducción completa*, por un *método constructivo*, y demostraciones por *analogía* y *dualidad*.
- Los procedimientos matemáticos que se utilizan en el establecimiento de la prueba se traducen en *los estilos* de la demostración: el *geométrico*, el *algebraico*, el de *coordenadas*, el del *análisis matemático*, etc.
- Los procedimientos de exposición dan lugar a los *modos* de demostración: el *sintético* o *directo* y el *analítico* o *indirecto*.

Ibañes y Ortega indican que los dos primeros casos presentan múltiples formas de enunciados equivalentes, y las diferentes formas dependen de como se construya la conexión entre la hipótesis y la tesis (*H* implica *T*, la condición necesaria para que se cumpla *H* es que se cumpla *T*, la condición suficiente para que se cumpla *T* es que se cumpla *H*, si se cumple *H* forzosamente se tiene que cumplir *T*, si *H* entonces *P*, etc.). Además, estos autores indican que todos los enunciados de los teoremas se pueden escribir en la forma *si* H *entonces* P, y esta forma, según Ibañes y Ortega (2002b), es la más adecuada para que los alumnos distingan la hipótesis de la tesis y, como consecuencia, sepan qué es lo que se tiene que demostrar.

La exposición que se acaba de realizar pone de manifiesto que la fundamentación de la demostración es muy variada, depende del campo de aplicación y de sus fines y da lugar a conceptualizaciones muy diferentes. Así, por ejemplo, las concepciones bourbakista y lógica utilizan representaciones muy distintas entre sí, y que no tienen nada en común con las que proceden del área de Didáctica de la Matemática.

Por otra parte, los métodos del conocimiento científico relativos a la demostración matemática también son muy diferentes y, de hecho, cada uno de los autores citados valora aspectos muy diferentes relativos a la forma, al propio discurso y a los aprendizajes de los alumnos.

Dimensión social

Tradicionalmente se ha considerado que el fin primordial de la demostración consistía en verificar la proposición objeto de estudio. Sin embargo, desde el campo de la Didáctica de la Matemática hay bastantes autores que contemplan otros fines. Bell (1976) advierte tres significados de la demostración matemática:

- *Verificación* o *justificación*, concerniente con la verdad de la proposición.
- *Iluminación*, de tal forma que se espera que una buena demostración proporcione ideas de *por qué* la proposición es cierta.
- *Sistematización*, esto es, la organización de los resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos principales y teoremas, así como los resultados derivados de éstos.

De Villiers (1993) desarrolla las ideas de Bell y critica duramente la posición tradicional. Comienza su análisis con testimonios personales de matemáticos ilustres que consideran la función de la demostración exclusivamente en términos de verificación, y presenta un modelo en el que distingue las siguientes funciones:

- *Verificación*, concerniente a la *verdad* de una afirmación. Para demostrar que el enunciado del teorema es verdad.
- *Explicación*, *profundizando en* por qué es verdad.
- *Sistematización*, la *organización* de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas.
- *Descubrimiento*, es decir, el descubrimiento o invención de nuevos resultados.
- *Comunicación*, la *transmisión* del conocimiento matemático.

A continuación, el autor pasa a comentar detalladamente cada una de estas funciones. Al referirse a la *verificación,* de Villiers sostiene que la demostración no es un requisito para la convicción, sino que, frecuentemente, sucede lo contrario: mediante el razonamiento inductivo se llega al convencimiento de que el resultado es verdad, lo que proporciona una motivación para demostrarlo. Además, afirma que la certeza absoluta en matemáticas es inalcanzable, resultando que la convicción personal depende de varios factores: intuición, verificación cuasi-empírica, o demostraciones no necesariamente rigurosas. No obstante, el autor añade que no se debe quitar importancia a la demostración como método de verificación, especialmente en el caso de resultados no intuitivos o dudosos. Cuando los resultados son evidentes o se ha llegado al convencimiento de que son ciertos empíricamente, está claro que falta una *explicación* satisfactoria de *por qué* es así y no de otra manera. En este punto, una demostración puede proporcionar la explicación requerida, aunque –como recuerda de Villiers- no todas las demostraciones contribuyen de la misma manera a este propósito.

Para la *sistematización* cita las siguientes posibles contribuciones: ayudar a identificar inconsistencias, razonamientos circulares y suposiciones implícitas; verificar y simplificar teorías matemáticas; proporcionar una perspectiva global de cada tema; ayudar a las aplicaciones; dar lugar a sistemas deductivos alternativos. También ataca la idea según la cual la actividad matemática se divide en dos fases: una inventiva y otra demostrativa; en opinión del autor, la historia de las matemáticas nos proporciona abundantes ejemplos en los que se *descubrieron* nuevos resultados basándose en demostraciones. Y, en lo que se refiere a la función de *comunicación*, resalta que la demostración es una forma de comunicar resultados matemáticos entre profesionales, entre profesores y alumnos, y entre éstos mismos.

Finalmente, de Villiers hace algunos comentarios sobre la enseñanza de la demostración, y en ellos insiste en que la convicción no se obtiene únicamente mediante la demostración, ni es la única función de éstas, y resalta el valor de la función de explicación en este terreno.

La reciente creación de programas de ordenador de geometría dinámica –como CABRI-, que permiten investigar fácil y rápidamente si una determinada conjetura es cierta o no, traslada aún más el interés de utilizar demostraciones en la enseñanza hacia otras funciones distintas de la simple verificación. En de Villiers (1995) se exponen tres ejemplos de proposiciones geométricas en las que un análisis cuidadoso de su demostración conduce al *descubrimiento* de nuevas propiedades. Más ejemplos se encuentran en Schumann y de Villiers (1993). En este mismo sentido se insiste en Ibañes (2001-b), que descubre ciertas propiedades sobre cuadriláteros. Que la convicción en la verdad de un teorema, previa a la demostración deductiva, se pone de manifiesto en de Villiers (1997), que también resalta otras funciones de la demostración; además, el autor presenta algunas contribuciones personales a la geometría dinámica. Finalmente, en Ortega (2004) se descubre como la demostración dada por Fischer (1983) sobre el teorema fundamental del cálculo integral también establece una generalización del teorema del valor medio del cálculo integral en el sentido de que en esa demostración también se prueba que «existen *n* nodos del intervalo *[a, b]*, a_1, a_2, ..., a_n (*n* arbitrario) para los que el método de los rectángulos, con paso constante Δx, tales que $\int_a^b f(x)dx = \sum_1^n f(\alpha_i)\Delta x$ »

Ente otros trabajos de investigación sobre las funciones de la demostración destacamos los siguientes: Hersh (1993) se preocupa de la actitud de los estudiantes en clase frente a las demostraciones matemáticas y sostiene que la principal misión de las demostraciones es clarificar por qué un teorema es verdad. Reid (1996) pretende conciliar los puntos de vista de los estudiantes y de los profesores sobre la demostración matemática y destaca que ambos estamentos coinciden en señalar que la demostración juega un papel social muy importante en la aceptación de resultados el papel social. Van Asch (1993), ya citado, contrasta las opiniones de los profesores y de los alumnos sobre si se deben hacer demostraciones o no y sostiene que la enseñanza de la demostración tiene unos objetivos muy generales sobre los aprendizajes de los estudiantes, destacando los siguientes:

- Los estudiantes aprenden a formular, encontrar, analizar argumentos.
- Los estudiantes aprenden a detectar y criticar formulaciones incorrectas.
- Los estudiantes desarrollan habilidades para expresarse correctamente.
- Los estudiantes aprenden cuál es el papel de las hipótesis, de las deducciones y de los contraejemplos.
- Los estudiantes aprenden a distinguir la demostración de otros procesos verificativos.
- Los estudiantes aprenden a aplicar generalizaciones, particularizaciones y analogías.

Hanna (1995) distingue entre las propias matemáticas y la educación matemática y, según que se centre en un campo o en otro, asigna distintas funciones a la demostración. En el primer campo, da mayor relevancia a la verificación, mientras que en el segundo destaca que la principal función es la explicación, razón por la que ensalza a las demostraciones que explican frente a otras que sólo prueban. Por otra parte, esta autora piensa que en la aceptación de un teorema es más importante el significado global de la demostración y la comprensión del resultado que el rigor de la misma, y enuncia una serie de factores, cuya aprehensión lleva consigo la aceptación de un nuevo teorema. Son éstos: comprensión, relevancia, compatibilidad, reputación y existencia de un argumento convincente.

En la investigación llevada a cabo por Ibañes y Ortega (2002a) sobre reconocimiento de procesos, se describe como los alumnos que se fijan en el tipo de razonamiento implícito en el procedimiento son los que tienen esquemas de prueba más avanzados, y son los que mejor reconocen a las demostraciones y las discriminan de otros procesos, identificando a las demostraciones tanto en casos afirmativos como en otros negativos.

Desde otro punto de vista, en la investigación que se ha desarrollado (trabajando con alumnos de 16-17 años) se ha constatado que el principal valor que éstos conceden a la demostración procede de su función de explicación. Los alumnos valoran muy positivamente las demostraciones que son explicativas frente a otras que no lo son, y para ellos es la función de explicación la que en múltiples casos les ayuda a distinguir las demostraciones de otros procesos y a identificarlas cuando están en presencia de alguna de ellas. Lo que guarda una estrecha relación con el estado de transición de los esquemas de prueba que tienen los alumnos, hechos que ya han sido dados a conocer en Ibañes (2001), Ibañes y Ortega (2001) e Ibañes y Ortega (2002). Estos mismos autores en relación con los textos argumentativos, Ibañes y Ortega (2001), consideran que la función explicativa es una componente importantísima, sin la cual las argumentaciones carecerían de una de sus características fundamentales, la persuasión.

En resumen, aunque tradicionalmente se ha considerado que la demostración matemática juega un papel social muy importante en la aceptación de resultados, teniendo en cuenta las investigaciones aquí relacionadas y otras más, se puede indicar que en Didáctica de la Matemática no se considera que la demostración matemática sea el procedimiento exclusivo de validación de un teorema. En muchos casos, ésta puede ser sustituida por otro tipo de pruebas y, sin duda, es más importante la comprensión global del proceso. Esto es particularmente importante en educación matemática donde la comprensión de una demostración por parte de los alumnos está íntimamente relacionada con los esquemas de prueba que posesan y con su estado de transición. Por otra parte, la demostración matemática tiene múltiples funciones, y numerosos investigadores coinciden en señalar que la principal es la explicación.

Dimensión cognitiva

Desde nuestra experiencia docente e investigadora, enriquecida con las valiosas aportaciones de otros investigadores, varios de los cuales ya han sido citados, y que ha dado lugar a numerosas publicaciones, nos permitimos señalar, algunas *fases* en la comprensión de las demostraciones:

1. Fase de interpretación, que incluye:

- Entender el problema y la clase de solución que requiere (*esquemas de prueba)*.
- Comprender los términos matemáticos empleados.
- Interpretar las proposiciones lógicas, las expresiones usuales, las palabras de enlace, la notación utilizada, etcétera.
- Identificar el proceso como una demostración.

2. *Fase de análisis*, en la que se puede distinguir:

– Recordar resultados anteriores y relacionarlos oportunamente con la proposición objeto de estudio.

– Revisar la corrección del razonamiento.

3. *Fase de síntesis*, que lleva consigo:

– Identificar las *líneas maestras* y las *ideas clave* de la demostración.

– Comprender globalmente el proceso.

4. *Fase de profundización*, en la que la atención se centra en:

– Estudiar la necesidad de las hipótesis.

– Reconocer el *significado* del teorema.

– Identificar el *tipo* de enunciado y los *métodos*, *estilos* y *modos* empleados.

– Valorar las *funciones* que cumple la demostración estudiada.

La investigación y desarrollo de todos estos aspectos resulta una inmensa tarea imposible de abordar en un solo trabajo de investigación, por lo que en Ibañes (2001) se ha partido de lo que nos parece más básico y constituye la raíz de toda la cuestión: los *esquemas de prueba* de los alumnos. El estudio de este aspecto nos condujo, de forma natural, a la consideración de otros dos: el reconocimiento de procesos y la interpretación de enunciados, pero es evidente que siguen quedando muchos otros como problemas abiertos para nuevas investigaciones.

Los autores que más han influido en nuestra investigación han sido Harel y Sowder (1998). Estos autores definen: *«A person's proof squeme consist of what constitutes ascertaining and persuading for that person»*, y clasifican estos *esquemas de prueba* en: esquemas de *convicción externa*, *empíricos* y *analíticos*. Y a cada uno de ellos lo subdividen en varias clases, las principales de las cuales se citan en la tabla 1.

Esquemas de prueba		
De convicción externa	Empíricos	Analíticos
Rituales *Autoritarios* *Simbólicos*	*Inductivos* *Perceptuales*	*Transformacionales* *Axiomáticos*

Tabla 1. Principales esquemas de prueba, según Harel y Sowder (1998).

Según estos autores, en los esquemas de convicción externa las dudas se despejan mediante el *ritual* de la presentación, la palabra de una *autoridad* (profesor, texto), o la forma *simbólica* de un argumento. En los esquemas empíricos las conjeturas se validan o se rechazan en virtud de hechos físicos o experiencias sensoriales. Si el estudiante comprueba o trata de convencer a otros de la validez de una conjetura mediante una evaluación cuantitativa en uno o más casos particulares, dicho estudiante posee un esquema de prueba *inductivo*. En opinión de los autores, las observaciones *perceptuales* se hacen por medio de imágenes mentales rudimentarias, imágenes que consisten en percepciones y coordinación de percepciones, pero que carecen de capacidad para transformar o para anticipar los resultados de una transformación. Un caso típico se da cuando un alumno obtiene conclusiones generales a partir de un dibujo concreto, en el que los distintos elementos guardan relaciones que, en general, no son ciertas. Llaman *analíticos* a los esquemas en los que la validación de las conjeturas se efectúa por medio de la deducción lógica. A su vez, los dividen en *transformacionales* y *axiomáticos*. Consideran que las relaciones observadas inductiva o perceptualmente son estáticas; y que, por el contrario, las observaciones *transformacionales* incluyen transformaciones de imágenes por medio de la deducción. Estas operaciones se realizan con una intención predeterminada de forma que pueden anticiparse y compensarse sus efectos. Cuando una persona entiende que una demostración matemática debe partir de términos no definidos y de axiomas, esa persona, según los autores, posee un esquema *axiomático*. Ahora bien, si los axiomas que utiliza responden únicamente a la propia intuición de la persona, entonces se trata de un esquema *intuitivo axiomático*. Definen un esquema *estructural* como un esquema de prueba axiomático en el que se piensa en las conjeturas y en los teoremas como representaciones de relaciones en diferentes modelos que comparten una *estructura* matemática común. Este esquema constituye un requisito cognitivo para el esquema *axiomatizante*, en el que la persona que lo posee es capaz de investigar las implicaciones de variar el conjunto de axiomas, o de axiomatizar una determinada teoría.

En Ibañes (2001) se pone de manifiesto que el concepto de esquema de prueba no debe presentarse exclusivamente en términos de *verificación* –como hacen Harel y Sowder-, sino que deben tenerse en cuenta otras *funciones* de la demostración (de Villiers). Además, se obtiene, en primer lugar, que los alumnos de primer curso de bachillerato se encuentran en un *estado de transición* entre los esquemas *inductivos* y los *intuitivo-axiomáticos*, estado de transición que se pone de manifiesto por la *dependencia* del esquema respecto de la tarea propuesta, por la *coexistencia* de varios esquemas en una misma persona y porque los alumnos se encuentran en un estado de *evolución* progresiva desde los esquemas inductivos a los intuitivos axiomáticos. En segundo lugar, la dependencia respecto de la tarea nos llevó a considerar y definir diversas *modalidades* de esquema de prueba que resultaron ser muy útiles a la hora de investigar el estado de los alumnos. Para ello se consideran los siguientes esquemas de prueba:

- **Declarado.** Es el esquema de prueba que creen haber utilizado y así lo indican.
- **Utilizado.** Es el esquema de prueba que utiliza un alumno en una secuencia didáctica.
- **Aceptado.** Es el esquema de prueba que acepta un alumno en una secuencia didáctica.
- **Adherido.** Es el esquema de prueba que acepta un alumno en una secuencia didáctica con rechazo de los anteriores.
- **Inicial.** Es el esquema de prueba que se estima que posee un alumno al iniciar una secuencia didáctica.
- **Final.** Es el esquema de prueba que posee un alumno al finalizar una secuencia didáctica.

Y, en tercer lugar, fue necesario introducir nuevas *categorías* de esquemas de prueba para explicar la transición de los alumnos de los esquemas experimentales a los intuitivo-axiomáticos, estableciéndose la clasificación que se muestra en la tabla 2.

<table>
<tr><td colspan="5">Esquemas de prueba</td></tr>
<tr><td rowspan="7">De convicción externa (E1)</td><td colspan="2">Empíricos</td><td colspan="2">Analíticos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Experimentales (E2)</td><td colspan="2">Transformacionales (E4)</td></tr>
<tr><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inductivos (E3)</td><td>Particulares</td><td>Generales</td></tr>
<tr><td>Falsos</td><td>Auténticos</td><td>Incompletos</td><td>Completos</td></tr>
<tr><td>De un caso (E3.1)</td><td>De varios casos (E3.2)</td><td colspan="2" rowspan="2">Intuitivo-Axiomáticos (E5)</td></tr>
<tr><td>No Sistemáticos</td><td>Sistemáticos (E3.3)</td></tr>
</table>

Tabla 2. Esquemas de prueba propuestos en Ibañes.

En resumen, las fases de la demostración que se han descrito resultan demasiado amplias para desarrollarlas en una investigación. En principio ésta se centra en el concepto de *esquema de prueba* acuñado por Harel y Sowdery y se descubre que estos esquemas se manifiestan en los alumnos de una forma mucho más dinámica, más versátil y más rica que como aparecía al comienzo de la investigación, que era el marco creado por los autores citados. En efecto, el estado de *transición* detectado lo ha convertido en un concepto dinámico, que va evolucionando en el transcurso de la investigación y que se va enriqueciendo con la ampliación de categorías de análisis y con la aportación de la teoría de las *funciones* de la demostración de de Villiers. La introducción de las distintas *modalidades* ha permitido descubrir el estado de cada alumno y cómo ha ido evolucionando el estado de transición, lo que implica que la idea de demostración dependa del sujeto receptor. El marco de Harel y Sowder ha ganado en versatilidad al enriquecerse con las modalidades consideradas, dando lugar a un marco que se puede aplicar con mayor rigor. El propio concepto de esquema de prueba se ha enriquecido porque el convencimiento y la persuasión han adquirido otro estatus con más matices.

Conclusiones

Después de a exposición que se acaba de hacer, los autores no pueden dar una respuesta cerrada a la pregunta: ¿qué es la demostración en matemáticas?, ya que desde la dimensión histórica se ve cómo la demostración ha sido algo cambiante con la época, con las personas, con el rigor, etc. Asimismo, desde la epistemología tampoco se puede, ya que la fundamentación y los métodos científicos también han ido evolucionando. La dimensión social aporta otra visión funcional diferente y, por otra parte, la dimensión cognitiva incluye una percepción subjetiva que obliga a hacer interpretaciones diferentes.

Desde la perspectiva histórica, la respuesta a la segunda pregunta, ¿para qué sirve?, tendría múltiples respuestas, ya que los modelos de demostración, el rigor y la adecuación de los modelos ha sido cambiante. Epistemológicamente también tendría respuestas múltiples, ya que, si bien es cierto que sirven para dar validez a los teoremas, no es menos cierto que dicha validez se consigue por múltiples procedimientos menos rigurosos que las pruebas formales. La dimensión social aporta el valor de las funciones de la demostración, sobre todo por la función explicativa y, finalmente, la dimensión cognitiva considera que el valor de la misma depende del esquema de prueba propio del usuario.

La respuesta más directa a la tercera pregunta, ¿dónde está su valor?, procede de la dimensión social. Aquí se destaca el valor de las funciones que le son propias, sobre todo el asociado a la explicación; el carácter formativo de la demostración, que está implícito en los objetivos que se han descrito; las características propias del razonamiento universal, que está implícito en los procesos demostrativos.

La cuarta pregunta, ¿cómo se aprende?, tiene su respuesta en la dimensión cognitiva, en la que se indica cómo los alumnos se encuentran en un estado de transición entre los esquemas experimentales y los intuitivo-axiomáticos y, como consecuencia de esta transición, la demostración, como tal, se aprende de forma progresiva, los alumnos van evolucionando a esquemas más ricos en razonamientos deductivos.

Referencias bibliográficas

van Asah, A.G. (1993): "To prove, why and how?". *International Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, 301-313.

Balacheff, N. (1987): "Processus de preuve et situations de validation". *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Bell, A. W. (1976): "A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations". *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

Bell, A. W. (1979): "The learning of process aspects of mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 10, 361-387.

Blum, W.; Kirsch, A. (1991): "Preformal proving: examples and reflections". *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183-203.

Bourbaki, N (1970): *Éléments de Mathématique (Théorie des ensembles)*. Hermann, París.

Bouvier, A.; George, M. (1984): Diccionario de Matemáticas, AKAL. Madrid

Boyer, C.B. (1987): *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos. Madrid.

Cavaillés, J. (1962): *Philosophie mathématique*. Hermann. París.

Davis, P.J.; Hersh, R. (1988): *Experiencia matemática*. Centro de Publicaciones del M.E.C. y Labor. Barcelona. (Original de 1982).

Dedekind, R. (1963): "Continuity and irrational numbers". En *Essays on the theory of numbers*. Dover. New York. (Original de 1872).

van Dormolen, J. (1977): "Learning to understand what giving a proof really means". *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.

Fischer, E. (1983): *Intermediate Análisis.* Springer Verlag. New York.

Gheverghese, G. (1996): *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Pirámide. Madrid.

Hanna, G. (1989): "More than Formal Proof". *For the Learning of Mathematics*, 9(1), 20-23.

Hanna, G. (1995): "Challenges to the Importance of Proof". *For the Learning of Mathematics*, **15**(3), 42-49.

Hanna, G. (1996): "The ougoing value of proof". En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 1-14. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

Hanna, G.; Jahnke, H.N. (1996): "Proof and proving». En Bishop, A.J. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 887-908).

Harel, G.; Sowder, L. (1998): "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283 . American Mathematical Society, Providence, USA.

Hersh, R. (1993): "Proving is convencing and explaining". *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.

Ibañes, M. (2001a): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Ibañes, M. (2001b): "Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento". *Suma*, 37, 95-98. Zaragoza ISSN: 1130-488X.

Ibañes, M.; Ortega, T. (1997): "La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria". *Educación Matemática*, 9, 2, 65-104.

Ibañes, M.; Ortega, T. (2001): "Un estudio sobre los *esquemas de prueba* en el alumnado de primer curso de bachillerato". *Uno*, 28, 39-59. Barcelona. ISSN: 1133-9853.

Ibañes, M.; Ortega, T. (2002a): "Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato". *Enseñanza de las Ciencias*. ISNN0212-4521, Nº 21 (1), pp. 49-63. Barcelona.

Ibañes, M.; Ootega, T. (2002b): "Interpretación de algunas expresiones usuales en los enunciados de los teoremas", *Quadrante,* Vol 10, Nº 2, pp. 97-123. ISNN 00872-3915. Lisboa.

Kleine, I. (1991): "Rigor and proof in Mathematics: a historical perspective". *The Mathematics Magazine*, 64-5, 291-314.

Kleine, M. (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad. Madrid.

Lakatos, I. (1978): *Pruebas y refutaciones*. Alianza Editorial. Madrid. (El original es de 1963-1964).

Lakatos, I. (1981): "¿Qué es lo que prueba una prueba matemática?". En *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Alianza Universidad. Madrid. (El artículo citado es original de 1959-1961).

de Lorenzo (1977): *La matemática y el problema de su historia*. Tecnos. Madrid.

Martínez Recio, A. (1999): *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y al aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Miyazaki, M. (2000): "Levels of proof in lower secondary school mathematics". *Educational Studies in Mathematics*, 41, 47-68.

Movshovitz-Hadar (1996): "On striking a balance between formal and informal proofs". En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 43-52. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

Ortega, T. (2004): "¿Qué pintan un motor y una botella en el Cálculo Integral?" Curso Corto de Didáctica.Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 17 RELME. Volumen 17, tomo II pp. 515-526. Santiago de Chile.

Renz, P. (1981): "Mathematical proof: what it is and what it ought to be". *TheTtwo- Year College Mathematics Yournal*, 12(2), 83-103.

Sainz, L. A. (2004): *Aproximación desde la Antigüedad a través de los Textos de Geometría al Cálculo Diferencial contenido en los Elementos de Matemática de Benito Bails.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Schumann, H.; de Villiers, M. (1993): "Continuous variation of geometric figures: interactive theorem finding and problems in proving". *Pythagoras*, 31, 9-20.

Semadeni, Z. (1984): "Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training". *For the Learning of Mathematicas*, 4(1), 32-34.

Thurston, W.P. (1995): "On proof and progress in matematics". *For the Learning of Mathematics*, 15(1), 29-37.

de Villiers, M. (1993): "El papel y la función de la demostración en matemáticas". *Épsilon*, 26, 15-30. Original de 1990.

de Villiers, M. (1995): "An alternative introduction to proof in dynamic geometry". *Micromath Spring*, 11(1), 14-19.

de Villiers, M. (1996): "Why proof in dynamic geometry". En M. de Villiers (Coord.): *Proofs and Proving: Why, when and how?* 23-42. The Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA), PO Box 12833, Centrahil 6006. South Africa.

de Villiers, M. (1997): "The role of proof in investigative, computer-based geometry: some personal reflections". En: King, J. y Schattschneider, D. (Eds.) *Geometry turned on! Dynamic software in learning, teaching and research*. MAA notes 41, 15-24.

Wilder, R.L. (1944): "The nature of mathematical proof". *American Mathematical Monthly*, 51, 309-323.

Marcelino J. Ibañes Jalón. Instituto «Vega del Prado». Valladolid.
Correo electrónico: marcel33@terra.es
Línea de trabajo: Demostración y pruebas en secundaria.

Tomás Ortega del Rincón. Facultad de Educación. Universidad de Valladolid.
Correo electrónico: ortega@am.uva.es
Líneas de trabajo: Desarrollo Curricular, Didáctica del Análisis y Pensamiento Numérico y Algebraico.