Del puzzle de la estrella a la incomensurabilidad y los radicales

Pablo Flores Martínez

Resumen

En este artículo se presenta el Puzzle de la Estrella, que consiste en un cuadrado dividido en *36* piezas de tres formas, cuadrados, triángulos rectángulos isósceles, y rombos de ángulos de *45º*. El juego tiene dos características principales de las que extraemos ventajas matemáticas. Como los puzzles de piezas con *45º* permiten fáciles duplicaciones de áreas, entre sus piezas aparecen longitudes y áreas irracionales, con un factor $\sqrt{2}$, por lo que las actividades, de construcción y estudio de figuras, supone un trabajo con irracionales cuadráticos del tipo $a+b\sqrt{2}$. El juego habitual con el puzzle consiste en introducir todas sus piezas en su caja cuadrada. Pero las dimensiones de la caja y de las piezas hacen que no valga cualquier posición. Esta cualidad facilita que el alumno experimente la inconmensurabilidad, que puede relacionar con la irracionalidad gracias a la apreciación anterior. En el artículo explotamos estas cualidades haciendo propuestas para el aula de matemáticas.

Abstract

In this article I will introduce the Puzzle of the Star, which is a square divided into 36 pieces that have three different shapes: squares, isosceles triangles and 45º rhombuses. This puzzle has two main characteristics from which we obtain mathematical advantages that are exploited by presenting a sequence of activities useful for teaching.

Since puzzles that have pieces of 45º allow us to do easy area duplications, we find among its pieces irrational areas and lengths, with a factor $\sqrt{2}$, so that the different activities: the construction and study of the figures, imply working with irrational quadratics like $a+b\sqrt{2}$. The usual game with this puzzle entails keeping all its pieces in its square box, but because of the special measures of the box and the pieces not all the positions are correct. This characteristic helps the students realize the incommensurability, which they can then relate to irrationality thanks to the previous appreciation.

Introducción

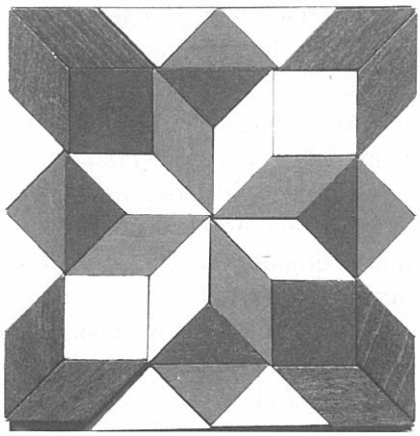
No sé si por disposición propia o por las costumbres familiares, el caso es que durante mi infancia dediqué muchas horas de juego a las tareas manuales (recortar papeles, completar puzzles y construcciones, etc.). En mi adolescencia se continuó esta disposición, acrecentada al incluir nuevos elementos más complicados (doblado de papel, puzzles de alambre, construcciones, mecano, etc.). Todas estas tareas tenían una intención meramente lúdica. Al cabo del tiempo he observado que estas experiencias lúdicas han influido en la forma en que me relaciono con el espacio geométrico, colaborando a que haya desarrollado ampliamente lo que se está definiendo como «sentido espacial» (Alsina y otros, 1997).

En un momento que no puedo precisar en el tiempo, aparece en mi casa el puzzle que traigo a colación en esta comunicación: El *puzzle de la estrella*. Apenas ha cambiado su aspecto desde entonces (los años 60). El puzzle es uno de los «juguetes de mi padre». Lo tenía en su mesa y se entretenía con él en combinar colores y formas. De tal manera lo disfrutaba y jaleaba que también se compró en las casas de otros familiares, en las que estaba al alcance de todos; es estético, de piezas fáciles de manejar, y aunque tiene alguna dificultad volver a meterlo en la caja, hasta los niños llegan a aprender a hacerlo.

Como tantos otros juguetes (especialmente los puzzles de alambre - ver Flores 2002a- pero también el puzzle de medios hexágonos regulares), al encontrarlo en las tiendas me sentí tentado y lo compré. Lo que no podía sospechar es que ese encuentro sería tan provechoso, ya que me ha llevado a estudiarlo y descubrir su interés didáctico para la enseñanza de las matemáticas, o al menos para favorecer de manera lúdica el desarrollo del sentido espacial. En este artículo presentaré el puzzle y posteriormente mostraré cómo puede colaborar en la enseñanza de un tópico que resulta difícil afrontar en situaciones manipulativas, los irracionales cuadráticos, que en este caso aparecen ligados a longitudes y áreas. El puzzle puede emplearse también para el estudio de regularidades, como las combinaciones de colores (con los correspondientes estudios de frontera, equivalencia de formas, ideas combinatorias, etc.), las simetrías, las teselaciones, los frisos, etc.., todo ello de una forma manipulativa, y encaminado a resolver un problema lúdico fácilmente comprensible: colocar adecuadamente las piezas en su caja.

El puzzle de la estrella

El puzzle de la estrella consiste en un cuadrado dividido en piezas de tres formas: cuadrados, triángulos rectángulos isósceles cuyos catetos son iguales al lado del cuadrado (medios cuadrados), y rombos de ángulos de 45º y lados iguales al cuadrado. En total hay 36 piezas: 16 rombos, 4 cuadrados y 16 triángulos (aunque podrían dividirse los cuadrados en triángulos sin que cambiase la estructura geométrica, pasando a tener 40 piezas). Lo he llamado el puzzle de la estrella ya que suele aparecer en el centro una estrella, formada por ocho rombos, a la que rodean las otras piezas, encajadas todas en una caja cuadrada, tal como aparece en la **figura 1**.



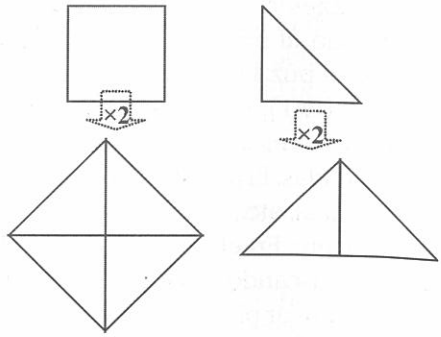


Figura 1 Figura 2

Los polígonos cuyos ángulos son de 45º y de 90º, pueden combinarse con cierta facilidad para *rellenar el plano*. Las piezas del TANGRAM tienen ángulos obtenidos por sumas de los ángulos de 90º y 45º, lo que permite una gran cantidad de formas. Además, tal como mostré con el puzzle de la pajarita (Flores, 2002b), éstos puzzles que combinan triángulos rectángulos isósceles y cuadrados permiten *duplicar áreas*, ya que introducen lados cuya longitud es $\sqrt{2}$ veces la longitud del otro. En la **figura 2** observamos cómo se pueden obtener el triángulo y el cuadrado de área doble.

Las piezas tienen lados con sólo dos *longitudes* distintas: [**u**] (lados del cuadrado, del rombo y catetos del triángulo) y [**v**]= $\sqrt{2}$ [**u**] (hipotenusa del triángulo rectángulo)**.** Los cuadrados tienen *superficie* doble que los triángulos. Sin embargo no es tan evidente la relación entre la superficie de éstos y los rombos.

Vamos a prescindir de los colores de las piezas ya que pueden cambiar, aunque suelen presentarse con cinco colores (**a, b, c, d** y **e**), distribuidos de la misma forma: 8 rombos de color **a,** 4 rombos y 4 triángulos de color **b,** 4 rombos de color **c,** 2 cuadrados y 8 triángulos de color **d y** 2 cuadrados y 4 triángulos de color **e**.

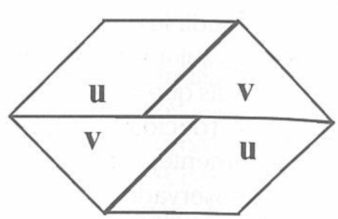


Figura 3

En la página web del magnífico The Puzzle Musseum (http://puzzlemuseum.com) se define un *puzzle* como un problema que tiene uno o más objetivos específicos, ideado con el propósito fundamental de ejercitar el ingenio y/o la paciencia. En concreto un *puzzle mecánico* es un objeto físico formado por una o varias partes que verifican la definición anterior. Al definir de manera tan general los puzzles conviene precisar el tipo de que se trata para que los interlocutores lo identifiquen. Los autores de esta página clasifican los puzzles atendiendo al problema que hay que resolver. Establecen 14 clases de puzzles, el puzzle de la estrella se puede identificar como un *Puzzles de patrones* (PAT), ya que se requiere situar o arreglar piezas separadas de naturaleza similar para completar superficies de acuerdo con unas reglas determinadas. El patrón puede requerir que se emparejen vértices, lados o aristas, caras, etc., de acuerdo con características como el color, la textura, la forma, etc. En el puzzle de la estrella se trata de emparejar lados, pero siempre buscando rellenar el cuadrado de la caja, por lo que a veces podemos emparejar piezas por lados de diferente longitud, tal como se observa en la figura 3.

Propuestas didácticas para emplear el puzzle de la estrella en la enseñanza

Para presentar el puzzle hemos descrito sus piezas. Es decir, hemos deshecho el puzzle. Vamos a partir del puzzle descompuesto en piezas para proponer actividades de enseñanza que permitan trabajar la forma, la relación entre medidas (de longitudes y superficies), la percepción de figuras en un entramado, la comparación de cantidades de las magnitudes señaladas, y, como consecuencia de todo ello, algunos irracionales cuadráticos.

Tal como indica Romero (1997), reconocer la incomensurabilidad en un contexto geométrico (donde adquiere plena significación), implica el paso de un estadio en el que la geometría se convierte en *«el arte de los razonamientos ciertos sobre figuras falsas»*, ya que es imposible constatar la incomensurabilidad sobre una figura, pues la experiencia práctica de medir se satisface en un número finito de pasos (Romero, 1997, p. 67). Cuando además, como en el caso del puzzle, se establece un razonamiento empírico para medir las longitudes de unas piezas con otras, aparece la dificultad de que los sujetos tengan disposición a relacionar la *finalidad práctica* (obtener piezas que ocupen el mismo espacio que otras) con el *razonamiento abstracto* (decidir si se pueden encontrar estas piezas sin comprobarlo empíricamente, o decidir si la aproximación que se ha buscado es exacta). Hemos observado que, incluso estudiantes avanzados tienen dificultades para hacer este paso que les permita responder a las dudas empíricas mediante razonamientos y medidas abstractas (Flores, 2003).

En las actividades que presentamos vamos a distinguir dos niveles de abstracción: el primero estará destinado a alumnos de la educación secundaria obligatoria, y se conformará con el trabajo ***empírico***, que puede llegar hasta la comparación y la determinación de medidas cuando sea posible;

en el segundo nivel proponemos que, después de hacer comprobaciones empíricas, se anime a los alumnos a trabajar con los modelos ***abstractos*** que están representados en el puzzle, lo que permitirá obtener medidas irracionales, y relacionarlas entre sí. El esquema del conjunto de actividades propuestas aparece en la **figura 4.** Se observa que el problema fundamental en el que se basa todo el conjunto de actividades es el que define el puzzle: *construir el cuadrado para rellenar la caja, y hacerlo de varias formas.*

ACTIVIDAD 1; (Principal): *Construir el cuadrado, introducirlo en la caja, buscar soluciones posibles*

Respetando la función para la que ha sido hecho el puzzle, la ***primera actividad*** consiste en ***jugar con el puzzle***, solucionarlo, es decir: ***formar el cuadrado.*** La intención de los autores del puzzle es que se disfrute construyendo mosaicos que completen el cuadrado, variando las formas y colores. El que disponemos, comprado en la actualidad, está comercializado por GOULA, llamado *MOSAICO DE COLOR.*

Con el juego libre comienzan los usuarios a familiarizarse con el puzzle, a sentir su objetivo, a percibir su dificultad, ya que no es posible rellenar la caja de cualquier manera. A partir del juego libre llegamos a obtener soluciones, a observar que sólo algunas son válidas, sin establecerlas en conjunto, pero percibiendo su variedad.

El puzzle está comercializado en madera, con piezas de tamaños [**u**] ≈ 3,5 cm (lo que supone que [**v**] ≈ 5 cm), y espesores variables. La caja en la que se incluye el puzzle completo tiene de lado 17,2 cm.

Proponemos que en la enseñanza se utilice el puzzle, no una representación del mismo en una cuadrícula, (que además no es posible), y que se centre la atención en la función del puzzle: rellenar la caja, de acuerdo con los tamaños, y haciendo uso de la creatividad del usuario, lo que permite percibir la riqueza de soluciones posibles.

Insistimos en que la intención de esta actividad es doble: familiarizar a los alumnos con el material, promoviendo la relación directa con sus piezas, y hacerles percibir que no se pueden colocar de cualquier forma en la caja. Según el curso a que nos dirijamos podemos conformarnos con que busquen soluciones válidas o que lleguen a establecer algunas condiciones que tienen que satisfacer estas soluciones, emitiendo conjeturas y estableciendo teoremas sobre ellas. Si bien esta actividad es el centro de atención de todo el trabajo, en esta ocasión proponemos que se realicen algunos ensayos, para satisfacer estas dos condiciones, y cuando se vea pertinente, se pase a las otras actividades, para volver sobre el problema al final de la misma.

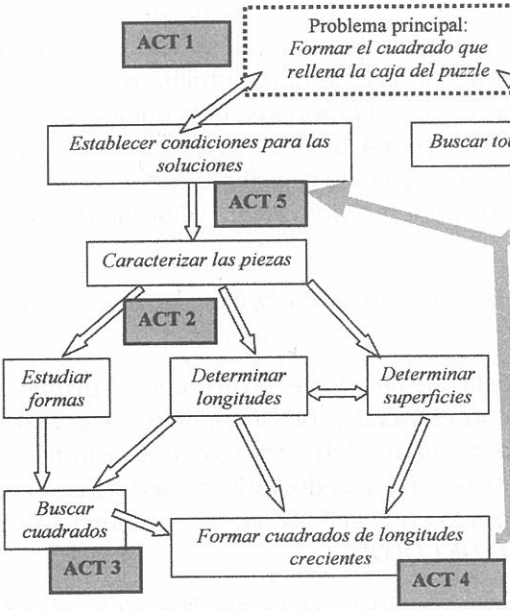


Figura 4: Esquema de las actividades

Con objeto de mostrar el interés de cada actividad, tras presentarla, vamos a realizar un breve análisis de la misma, atendiendo a las propiedades matemáticas que se emplean en su desarrollo, y a las cualidades didácticas de las instrucciones que se han dado.

Análisis de la primera actividad

Los alumnos pueden intentar rellenar uno de los lados con piezas, y luego continuar, rellenando el lado contiguo, perpendicular, pero ¿es siempre posible esto?

Aunque el jugador realiza sus ensayos de manera empírica, sin establecer medidas en centímetros, vamos a hacer un análisis con medidas para que se parezca más al estudio matemático clásico.

Vamos a buscar el primer lado. La suma de las longitudes de los lados de las piezas colocadas en un lado del cuadrado tiene que ser próximo y menor que 17,2 cm. Si sumamos las longitudes de las piezas obtenemos:

- $4[\mathbf{u}] \approx 14$ cm $< 17{,}2 < 5[\mathbf{u}] \approx 17{,}5$ cm
- $3[\mathbf{u}] + 1[\mathbf{v}] \approx 15{,}5$ cm $< 17{,}2 < 4[\mathbf{u}] + 1[\mathbf{v}] \approx 19$ cm
- $2[\mathbf{u}] + 2[\mathbf{v}] \approx 17$ cm $< 17{,}2 < 3[\mathbf{u}] + 2[\mathbf{v}] \approx 20{,}5$ cm
- $3[\mathbf{v}] \approx 15$ cm $< 17{,}2 < 1[\mathbf{u}] + 3[\mathbf{v}] \approx 18{,}5$ cm

Se observa que la solución más adecuada es colocar 2**u** + 2**v**, en cada uno de los lados del cuadrado. Debido a la holgura necesaria para que las piezas no queden encajadas completamente en la caja, parece haber otras soluciones, aunque al construirlas observamos que en ellas las piezas no están alineadas. El tamaño de la caja y de las piezas hace que se note que estas soluciones provienen de una colocación forzada, en las que se pierde la regularidad (no se forma un cuadrado, faltan o sobran piezas para rellenar la caja, etc.).

Con esta primera actividad hemos planteado un problema (rellenar la caja), mostrado que se pueden establecer algunas condiciones, y que hay varias soluciones posibles. Se abre entonces el estudio del puzzle: *¿Cuántas soluciones son posibles? ¿Qué condiciones tienen que tener las piezas para formar una solución? ¿Cómo podemos obtener nuevas soluciones? ¿Es posible encontrar soluciones empleando sólo cuadrados?*, etc. Para responder a estas cuestiones pasamos a afrontar la segunda actividad, en la que se analizan las piezas del puzzle.

ACTIVIDAD 2: *Estudiar las piezas: formas, tamaños, superficies*

Vamos a comenzar la actividad dirigida al análisis empírico de las piezas. Se trata de promover que los alumnos perciban la forma, el número de lados, las relaciones que existen entre las longitudes de ellos, y las amplitudes de los ángulos. Terminaremos asignándole el nombre a los polígonos de las piezas y determinando el número que hay de cada clase. Con esta actividad se pretende que los alumnos lleven a cabo una estrategia natural de resolución de un problema (Alsina y otros, 1997): estudiar los datos de los que se dispone (las piezas), empleando para caracterizarlos el conocimiento geométrico que poseen.

Análisis de la segunda actividad

Comencemos por la actividad dirigida al tratamiento empírico. Los alumnos deben emplear la percepción directa y la superposición de piezas, para *separar y caracterizar los diferentes polígonos*. Como todas las piezas representan figuras con algún eje de simetría, no aparecen problemas ligados a la orientación de las figuras (Flores, 2002b), con lo que su identificación es fácil.

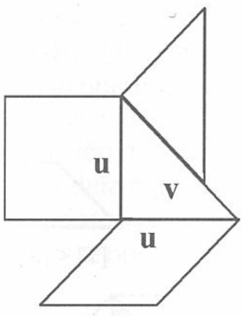


Figura 5

Tras esta primera clasificación pasaremos a *comparar las medidas de lados*, procediendo por comparación directa. En la **figura 5** se muestra la comparación de longitudes de los lados del cuadrado, rombo y catetos del triángulo (todos de longitud [**u**]), así como la hipotenusa del triángulo, único desigual ([**v**]).

No es fácil obtener empíricamente si hay algún número racional que multiplicado por **u** dé **v** (comensurabilidad de **v** con **u**). Como las piezas son rígidas, la estrategia para encontrarlo es poner varios triángulos juntos hasta que la suma de sus hipotenusas coincida con la suma de lados del cuadrado. La primera solución de la ecuación entera: $3{,}5 \times x = 5 \times y$, es x=5, y=7, tal como se observa en la **figura 6**. De ella deduciríamos que $5 \times v = 7 \times u$, lo que supone que $[v] = \frac{7}{5}[u]$ (supone una aproximación de $\sqrt{2}$ con 1,4). Sería más fácil de obtener esta relación si se emplea una regla para hacer la comparación, pero esto desvirtuaría el problema y habría que evitarlo. Sugerimos que durante el transcurso de la actividad se trabaje con las dos cantidades de longitud independientes, en la que, claro está, **[u]** < **[v]**. De esta forma estaremos introduciendo la incomensurabilidad como una cualidad implícita.

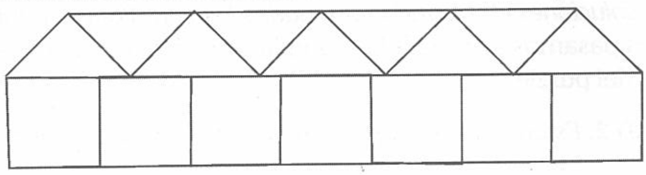


Figura 6: Comensurabilidad empírica de **u** y **v**

También podemos obtener *relaciones empíricas entre las superficies* de las figuras, por comparación directa. Ya hemos comentado que el triángulo tiene la mitad de superficie que el cuadrado. Para comparar ambas superficies con la del rombo hay que realizar descomposición de figuras, y estimación de la superficie que falta y sobra. En la primera parte de la **figura 7** se observa que la ordenación de superficies es fácilmente perceptible de manera empírica (Flores, 2002c, Castro y otros, 1997). Según este razonamiento, [T]<[R]<[C] = 2[T], es decir, el área del rombo es menor que la del cuadrado pero mayor que su mitad.

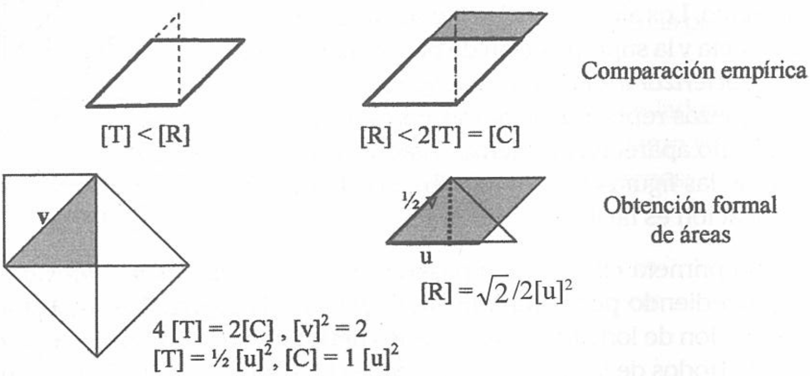


Figura 7

La *comparación abstracta* de longitudes y superficies nos llevará a encontrar los irracionales relacionados con $\sqrt{2}$. Para ello el razonamiento que menos fórmulas emplea comienza con el área del cuadrado, llega a ver que la hipotenusa del triángulo es la base de su cuadrado de superficie doble, y, empleando la fórmula del área del cuadrado, llegar a que la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ veces el lado del cuadrado.

Comparando el rombo con el cuadrado, tal como se muestra en la figura 7, se observa que su altura es la mitad de la hipotenusa del triángulo, mientras que su base es la del cuadrado, por lo que, aplicando la fórmula del área del paralelogramo, llegamos a que el rombo tiene de área $\frac{\sqrt{2}}{2}$ veces la del cuadrado. Ya podemos completar la ordenación anterior estableciendo igualdades:

$$[T]=\frac{1}{2}[u]^2,\ [R]=\frac{\sqrt{2}}{2}[u]^2,\ [C]=1[u]^2$$

Una vez se ha encontrado el valor del área de las figuras podemos obtener el área del puzzle total, y relacionarlo con la longitud del lado, lo que permite realizar una operación con irracionales, aplicando la fórmula del área del cuadrado.

Longitud del lado: [2**u** + 2**v**] = $2 + 2\sqrt{2}$ [u]

Área del cuadrado: 4[C] = 4 $[u]^2$, 16[T]=8 $[u]^2$, 16[R] = $16\sqrt{2}/2$ $[u]^2$

Resultado: $(2+2\sqrt{2})^2 = 12+16\frac{\sqrt{2}}{2} = 12+8\sqrt{2}$

A partir de estos razonamientos podemos identificar las áreas racionales con los cuadrados y los triángulos, y las irracionales con el rombo.

La dificultad de establecer relaciones numéricas empíricas entre **u** y **v** se repite cuando se quieren obtener áreas de rombos en función de la de los triángulos. Si empleamos las medidas de las figuras de madera del puzzle, tenemos: [**T**] = 6,125 cm^2, [**R**] = 8,75 cm^2; la ecuación $6{,}125\times x = 8{,}75\times y$ tiene como primera solución natural: x=10, y=7, tal como se observa empíricamente en la figura 8.

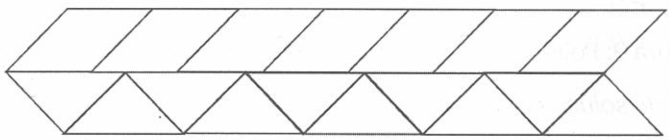


Figura 8

En la figura 6 observamos que para expresar **v** como una cantidad natural de **u** tenemos que salirnos del cuadrado de la caja del puzzle (necesitamos 5 hipotenusas del triángulo). Igualmente ocurre para igualar empíricamente las áreas de los rombos a una cantidad natural de áreas de triángulos. Ello nos lleva a reafirmarnos en la apreciación que ya hemos hecho de que necesitamos rombos para rellenar espacios de área $\sqrt{2}$ $[u]^2$, y necesitamos triángulos y cuadrados para rellenar regiones de áreas racionales de $[u]^2$.

ACTIVIDAD 3: *Identificar polígonos regulares que aparecen en las soluciones del puzzle.* Como consecuencia, *obtener todos los cuadrados que aparecen en el puzzle e identificar los que sean iguales* aunque ocupen *posiciones diferentes*.

Para obtener la solución del puzzle y para establecer condiciones de existencia de nuevas soluciones nos hemos fijado hasta ahora en las piezas, y en cómo podemos colorarlas para rellenar el cuadrado. Otra estrategia consiste en partir del problema resuelto, es decir, analizar soluciones, observando las figuras que lo forman. La intención de esta actividad es que los alumnos perciban formas poligonales en el puzzle, que están delimitadas por los lados de piezas contiguas o por vértices de piezas. Para ello tienen que hacer abstracción de las líneas que separan o juntan piezas y de la posición de los lados de los polígonos en relación a los lados de la caja. Además deben poner en marcha su imaginación para percibir polígonos a partir de sus vértices.

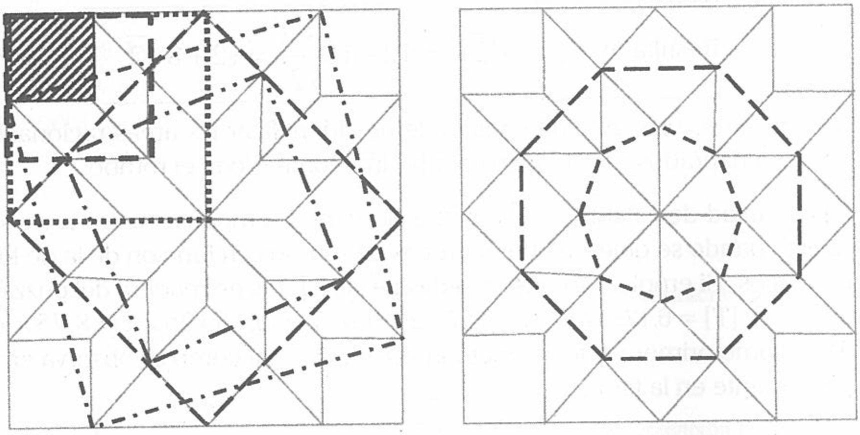


Figura 9: Polígonos regulares en el puzzle: Octógonos, cuadrados.

Análisis de soluciones de la actividad

En la **figura 9** podemos observar los únicos polígonos regulares que pueden aparecer en las soluciones, que son el cuadrado y el octógono. Naturalmente los únicos polígonos regulares que se pueden construir con las piezas del puzzle serán los que tengan ángulos que resultan de sumar los que disponemos: 45º, 90º y 135º, es decir, un número entero de veces 45º, sin llegar a 180º, y esto nos lleva a que sólo se pueden obtener el cuadrado y el octógono[1]. Queda por estudiar si los vértices de las piezas puede generar otros polígonos regulares, pero esto lo dejamos como ejercicio pendiente para el lector.

Utilizando lados de las piezas se puede formar un octógono cuyo lado es la hipotenusa del triángulo. Uniendo vértices se forma otro octógono regular cuyo lado es la diagonal pequeña del rombo.

Hay muchos cuadrados, comenzando por el de la caja (formado con todas las piezas) hasta la pieza cuadrada. No es trivial establecer cuáles son iguales, especialmente si aparecen girados respecto a los lados de la caja. Se intuyen cuadrados que no se sabe si se podrán formar con las piezas del puzzle. Para realizar una búsqueda sistemática pasamos a la actividad siguiente, en la que planteamos el proceso a la inversa, es decir, construir cuadrados con las piezas.

ACTIVIDAD 4: *Obtener todos los cuadrados de diferentes áreas que se pueden formar con las piezas del puzzle.*

Esta actividad completa el análisis emprendido en la actividad anterior, pero tiene la intención de que se lleguen a relacionar las longitudes y superficies de manera sistemática. También pretendemos que se ordenen cantidades obtenidas por combinación lineal de irracionales ligados a $\sqrt{2}$, y que los jugadores establezcan igualdades entre el cuadrado de estos números y el área de los cuadrados correspondientes.

Para satisfacer estas intenciones sugerimos que el proceso comience dejando libertad a los alumnos para que formen cuadrados con las piezas, comparen sus superficies y lados, y finalmente, formen ordenadamente lados de diferente longitud, de manera creciente, elaborando un cuadro con la longitud de los lados y las áreas (tabla 1).

Para los alumnos que trabajan con irracionales, esta última fase permite

[1] Si recordamos que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $180(n\text{-}2)$. En caso de polígonos regulares los ángulos interiores son iguales, por lo que serán las soluciones de las ecuaciones:

$$\frac{180\,(n-2)}{n} = 45;\ \frac{180\,(m-2)}{m} = 90;\ \frac{180\,(p-2)}{p} = 135$$

La primera no tiene solución entera, la segunda es $m=4$ (el cuadrado), y la tercera $p=8$ (el octógono).

identificar el cuadrado de las sumas de radicales (que hay que hacer para obtener el área de los cuadrados, aplicando la fórmula del área del cuadrado), con la suma de radicales que se hace para sumar las áreas de las piezas con las que se forma el cuadrado.

Tabla 1: Cuadrados que se pueden construir con piezas del puzzle

Orden	1	2	3	4	5
Longitud lado	1	$\sqrt{2}$	2	$1+\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$
Área cuadrado	1	2	4	$3+2\sqrt{2}$	8

Orden	6	7	8	9	10
Longitud lado	3	$2+\sqrt{2}$	$1+2\sqrt{2}$	4	$3\sqrt{2}$
Área cuadrado	9	$6+4\sqrt{2}$	$9+4\sqrt{2}$	16	18

Orden	11	12	13	14	15
Longitud lado	$3+\sqrt{2}$	$2+2\sqrt{2}$	5	$1+3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$
Área cuadrado	$11+6\sqrt{2}$	$12+8\sqrt{2}$	25	$19+6\sqrt{2}$	32

Análisis de las soluciones de la actividad 4.

En la **figura 9** veíamos algunos cuadrados que se podían intuir en el puzzle, y algunos de ellos no estaban completamente delimitados por lados de las piezas. La duda que surge es si es posible construirlos con piezas. Para responder a esta cuestión y para estudiar qué cuadrados de los obtenidos en la actividad 3 son iguales, vamos a proceder de manera inversa y ordenada, construyendo cuadrados de lados crecientes.

Los alumnos que trabajan en el nivel empírico pueden proceder a la construcción de segmentos crecientes, para tomarlos como lados de los cuadrados, que son:

u, v, 2u, u+v, 2v, 3u, 2u+v, u+2v, 3v, 4u, 3u+v, 2u+2v, u+3v (a partir del que empiezan a salirse de la caja, y, por tanto, no podemos formar el cuadrado correspondiente), 4v, 5u, 4u+v, 3u+2v, 2u+3v, u+4v, 5v, etc.

Si bien es evidente que $au+bv < (a-1)u+(b+1)v$, no lo es tanto la relación entre ku y u+(k-2)v. Para encontrarla hay que obtenerla por comparación

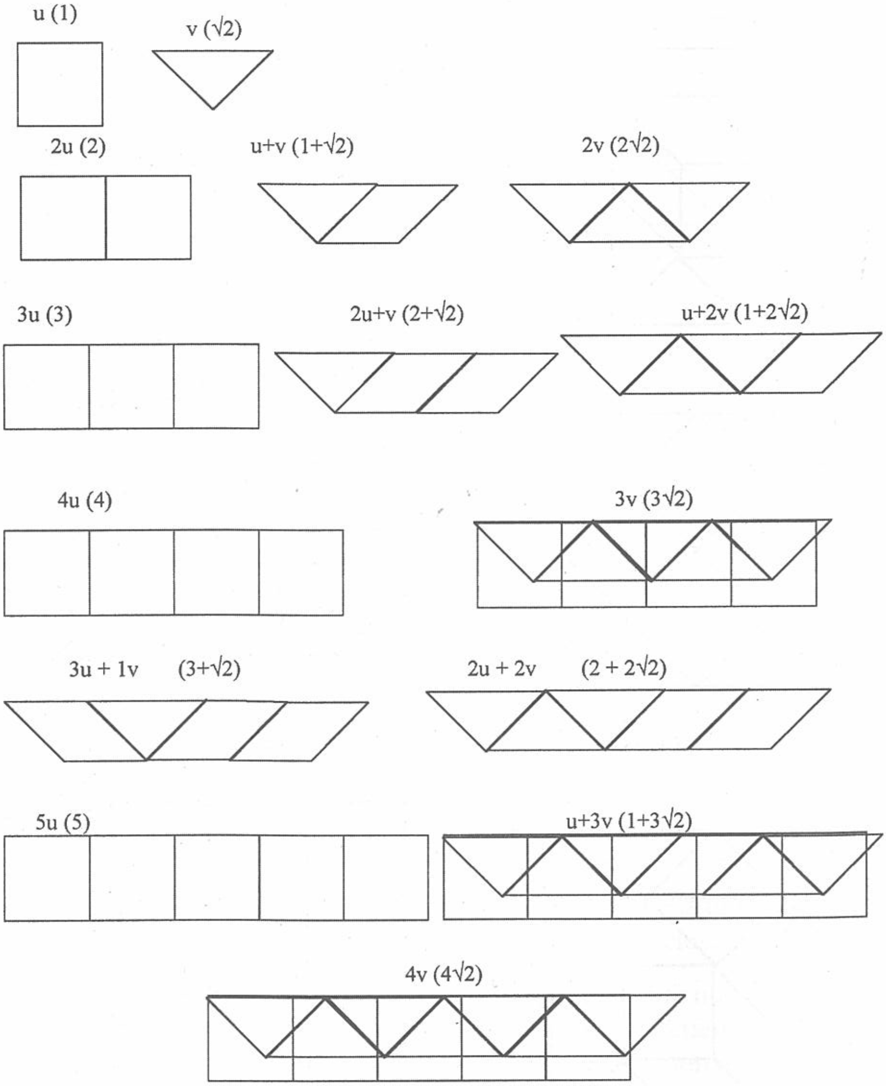

u (1)
v (√2)
2u (2)
u+v (1+√2)
2v (2√2)
3u (3)
2u+v (2+√2)
u+2v (1+2√2)
4u (4)
3v (3√2)
3u + 1v (3+√2)
2u + 2v (2 + 2√2)
5u (5)
u+3v (1+3√2)
4v (4√2)

Figura 10

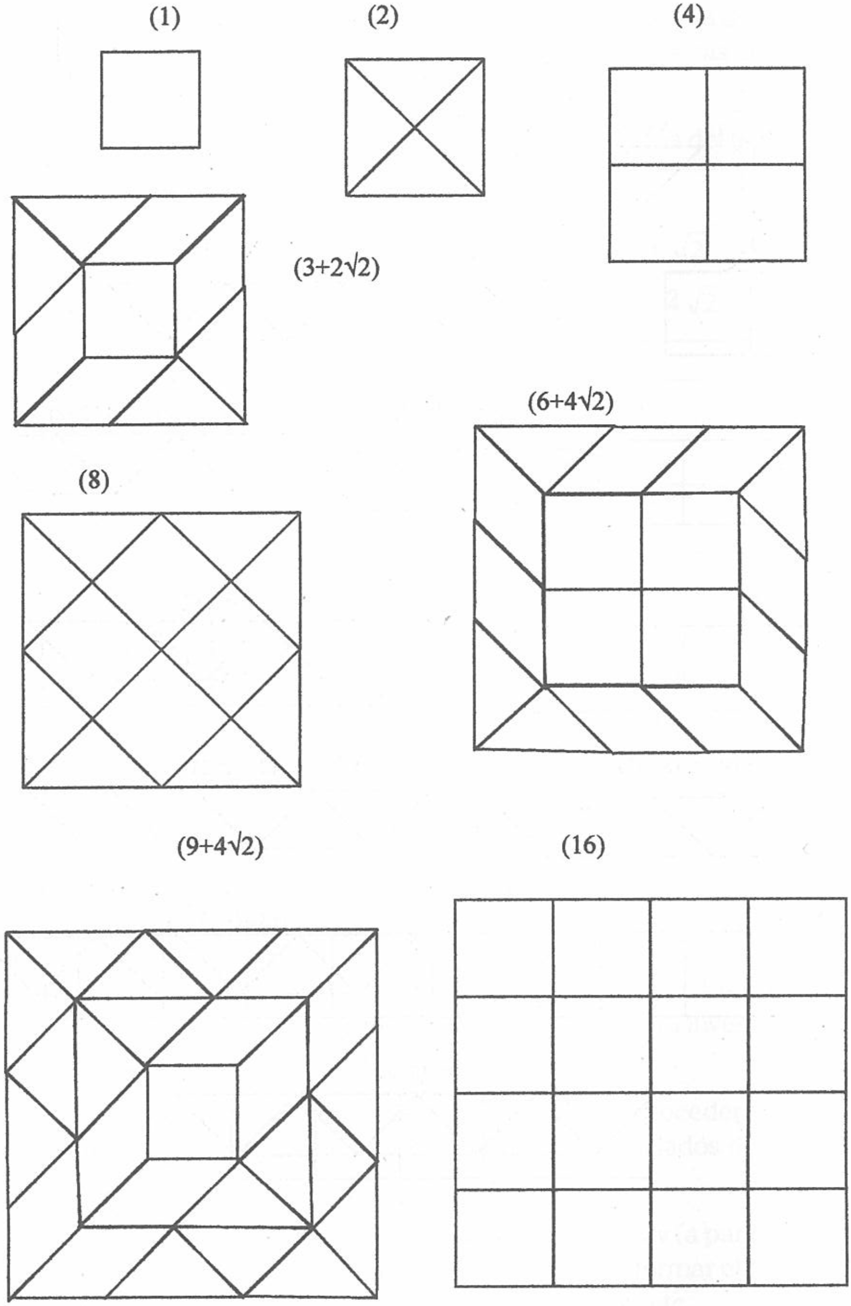
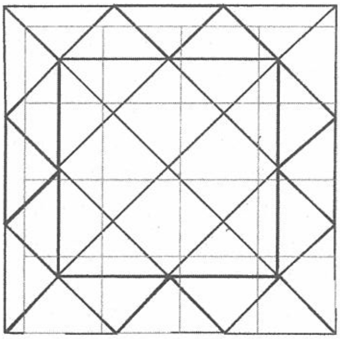
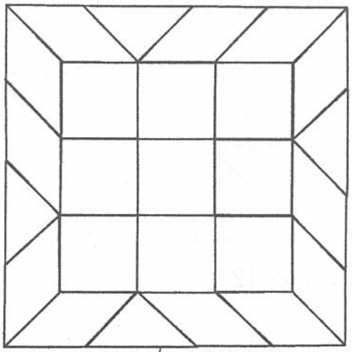


Figura 11



(18)



$(11+6\sqrt{2})$

$(12+8\sqrt{2})$

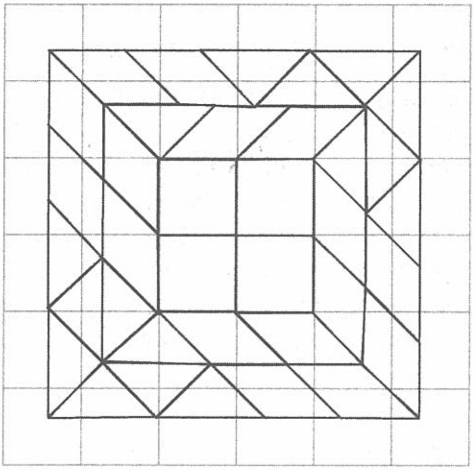


Figura 11 (continuación)

empírica entre figuras, tal como aparece, por ejemplo, en la **figura 10** para la longitud de los lados, y en la **figura 11** para las superficies.

Como observamos en la **figura 11**, una forma de construir nuevos cuadrados a partir de los primeros consiste en añadir a los primeros un marco exterior, de anchura variable. En los casos en que intervienen medidas de **u** y **v** el marco tiene una anchura que no se puede obtener a partir del lado del cuadrado interior.

De la observación anterior sacamos dos consecuencias: No podemos situar el puzzle en una cuadrícula (tal como se observa en la última composición de la **figura 11**), y podemos emplear esta característica de los cuadrados para estudiar cuántas soluciones son posibles.

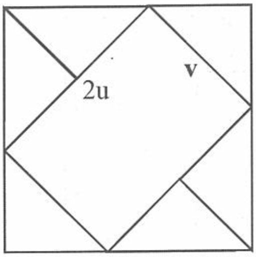


Figura 12

Cuando se construyen estos cuadrados volvemos a trabajar la incomensurabilidad, en este caso de superficies, tal como apuntamos en los comentarios de la actividad 2. En efecto, si tratamos de formar el cuadrado de lado [u]+[v], podemos intentar situar en su interior sólo triángulos, llegando a construir el recuadro de la figura 12, en cuyo interior queda un rectángulo de lados [v] y 2[u], es decir, cuya área sería $2\sqrt{2}$. Fracasará cualquier intento que hagamos de colocar en este rectángulo sólo piezas triangulares o cuadradas, ya que esta área que falta es incomensurable con [T]. Los alumnos que trabajan el razonamiento abstracto pueden reafirmarse en la necesidad de que se coloquen rombos, cuando el área que se quiere cubrir tenga alguna $\sqrt{2}$.

ACTIVIDAD 5: *Establecer condiciones de solución*

Una vez estudiadas las piezas, analizadas las figuras que aparecen en algunas soluciones del puzzle, y establecidas las cualidades de estas figuras, podemos proponer que los alumnos busquen condiciones que deben verificar las piezas que se colocan en los lados de la caja, y en el interior, que permiten resolver el puzzle. La intención de esta actividad es que los alumnos resuman propiedades que se han deducido durante la resolución de las actividades anteriores, que propongan conjeturas, que las verifiquen, y que continúen ampliando el catálogo de soluciones.

Análisis de la actividad 5.

Tal como hemos observado:

- En cada lado de la caja hay que colocar dos piezas de lado **u** y dos piezas de lado **v**.
- Las piezas no se pueden colocar en una cuadrícula.
- Si colocamos adyacente a un lado **u** un lado **v** tendremos que colocar más adelante en la misma recta, un lado **v** adyacente a un lado **u** (figura 3).
- Si el cuadrado que queremos construir tiene **u** y **v** sumados en los lados, en el interior habremos de colocar piezas de las dos clases: triangulares (cuya área total será un número racional de $[u]^2$), y rombos (cuya área total será un número racional de $\sqrt{2}\ [u]^2$).

Los alumnos pueden hacer apreciaciones sobre las características que tienen las soluciones encontradas (sobre las formas de las piezas contiguas, la longitud de los lados de estas piezas, las piezas que pueden ocupar los lados de la caja, el tipo de piezas que deben aparecer en la diagonal, etc.). El debate sobre la validez de estas apreciaciones permitirá comenzar a establecer algunas condiciones que tienen que verificar las soluciones, con la ventaja de que siempre pueden confrontarse de manera experimental.

A partir de las respuestas y del estudio anterior podemos plantear la última actividad, en la que tampoco esperamos alcanzar soluciones cerradas, sino comenzar a estudiar condiciones para poder avanzar en su estudio.

ACTIVIDAD 6: *Buscar todas las condiciones que deben verificar las posibles del puzzle.*

La intención de esta actividad es realzar el valor del juego, enfatizando la variedad de soluciones que admite. De manera más inmediata se pretende que se establezcan variables para poder llevar a cabo un análisis combinatorio del problema. Este análisis puede comenzar estudiando las piezas que hay que colocar en los lados de la caja: las **2u** se pueden obtener por medio de: dos catetos de triángulos, dos lados de rombos, dos lados de cuadrados y combinaciones de ellas, siempre que puedan completarse con el lado contiguo del cuadrado de la caja. Todas estas formas se tienen que combinar (por multiplicación) con las formas en que aparece **2v** (que siempre será en forma de hipotenusa del triángulo), y teniendo en cuenta las posiciones que pueden adoptar los segmentos: uuvv, uvuv, uvvu, vuuv, vuvu, vvuu ($P'_{2;2,2} = 4!/(2!2!) = 6$). Estas combinaciones se ven afectadas por la forma en que se pueden elegir las piezas. Aunque hay que tener en cuenta que al tener que combinarse con los otros lados del cuadrado, pueden producir situaciones iguales, que sólo se diferencian en un giro del puzzle completo.

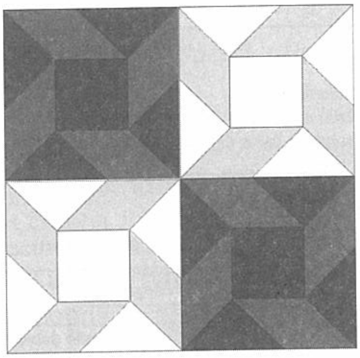
Otra línea de razonamiento para buscar soluciones se basa en analizar las posiciones que ocupan las formas: dónde colocar los cuadrados, de qué formas puedo completar la estrella del centro, que marcos son posibles construir para rodear los cuadrados más pequeños, etc. En los niveles que nos movemos nos conformamos con que se vayan creando modelos de soluciones, tales como aparecen en la **figura 13** (debida a la gentileza de José Martel).

Conclusiones

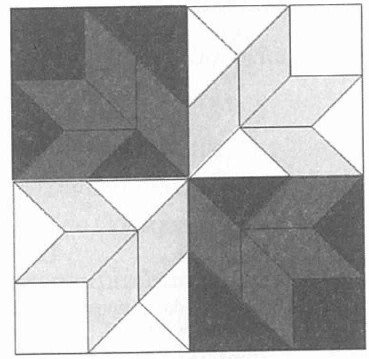
En este artículo hemos presentado un material lúdico, un puzzle, que podemos emplear en la enseñanza, diseñando actividades adecuadas. Hemos mostrado la utilidad de las actividades propuestas empleando el puzzle, para que los alumnos utilicen conceptos geométricos y los relacionen con los irracionales, ya que en el modelo teórico del puzzle de la estrella aparece la incomensurabilidad de manera más o menos explícita. Por ello podemos decir, siguiendo a Corvalán (1994), que este puzzle proporciona experiencias facilitadotas del concepto de incomensurabilidad en tres momentos: Como juego, cuando se utiliza en un momento *pre-instruccional*, ya que los niños al hacerlo comienzan a percibir una imposibilidad ligada a las formas y medidas. Durante la instrucción (*co-instruccional*), siguiendo una propuesta como la que aquí desarrollamos, los alumnos trabajan con áreas, buscan regularidades, llegan a percibir la imposibilidad de rellenar con piezas distintas, y, si pasan al razonamiento abstracto y emplean las medidas irracionales, pueden realizar operaciones e igualdades, con radicales. Por último, en períodos *post-instruccionales*, se pueden consolidar los irracionales y las fórmulas de cuadrado del binomio, estableciendo condiciones de solución, lo que permite extender el razonamiento hasta la combinación lineal de u y v, en una actividad que enlaza con el estudio de los espacios vectoriales. Y todo ello aprovechando su intención como juego, es decir, su estética y su cualidad lúdica (Corvalán, 1994).

Hemos puesto de manifiesto que jugando con el puzzle se desarrollan varios conceptos matemáticos: las formas, los polígonos y los criterios de igualdad de ellos, la incomensurabilidad entre longitudes, los números irracionales cuadráticos de raíz de dos, las áreas y longitudes y las regularidades como la simetría.

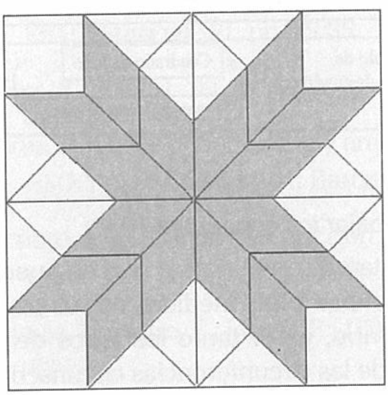
La ventaja de emplear este puzzle en la enseñanza es que nos permite afrontar de manera manipulativa una introducción al tratamiento de dos longitudes incomensurables, que se manejan de manera independiente, incluso en el trabajo empírico. El puzzle nos encamina hacia los irracionales cuadráticos de raíz de dos, dando sentido a las operaciones con estos irracionales, para ordenar las longitudes, las áreas, para buscar todas las soluciones y combinaciones posibles, y para estudiar las similitudes y diferencias de estas combinaciones, Y todo ello en un contenido, como la comensurabilidad y los irracionales, en el que es muy difícil encontrar materiales para su enseñanza, ya que se trata de un concepto abstracto, que exige que los alumnos trabajen con la medida abstracta, pues la medida empírica siempre será racional (Romero 1997).



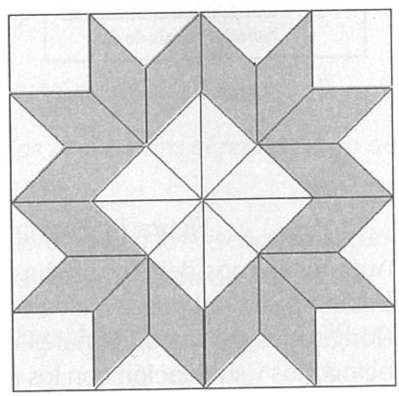
Cuatro cuadrados con molinillos



Cuatro cuadrados con trozos de estrella



Estrella en el centro y cuadrados en extremos



Cuadrado en el centro

Figura 13: Algunas soluciones

Hemos de destacar que en la actividad educativa que proponemos empleando el puzzle de la estrella hemos empleado varias formas de trabajar la incomensurabilidad y los irracionales, pues la relación que hemos establecido entre longitudes y áreas, no sólo es visible por las fórmulas, sino que permite la comparación directa, tal como aparece en el esquema de la figura 14. Con ello estamos realzando el papel del puzzle en la formación del concepto de superficie y área, y en establecimiento del significado de las fórmulas del área (Castro y otros, 1997, Segovia y otros, 1996).

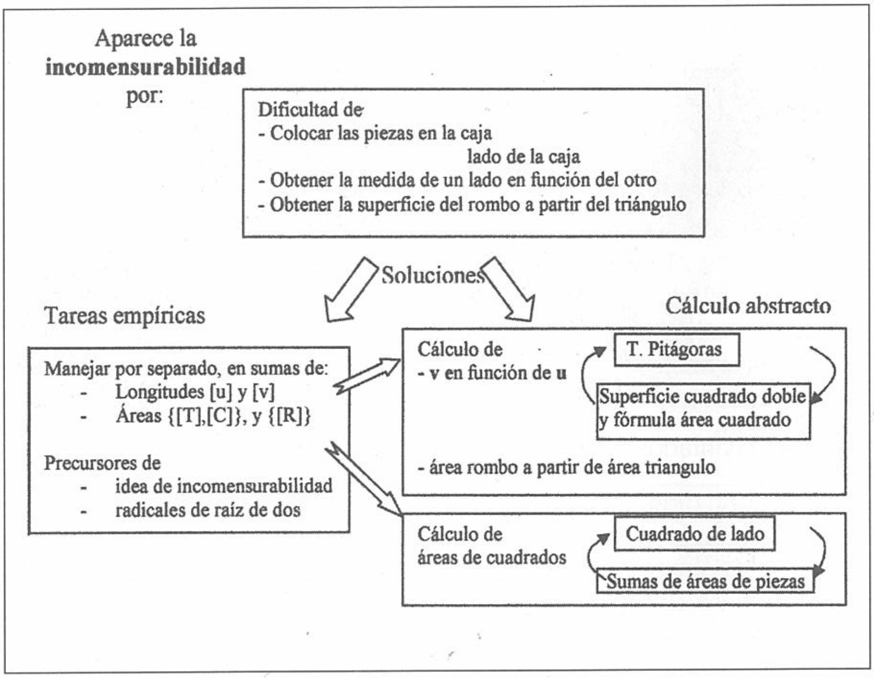


Figura 14: Forma de trabajar los conceptos

Aun nos hemos dejado muchas otras tareas en el tintero que se pueden tratar a partir del puzzle, tales como obtener otras medidas de sus piezas (longitudes de las diagonales del rombo, y por tanto los lados de los octógonos y su relación con los radios de las circunferencias circunscritas, lo que daría lugar a la «Proporción Cordobesa» - De la Hoz, 1998-; obtención de razones trigonométricas de ángulos relacionados con 45º, etc.). Hemos querido centrarnos en un aspecto que está relacionado de forma directa con la finalidad del puzzle, componer mosaicos cuadrados que encajan en la caja. Así no se nos puede acusar de emplear el puzzle como pretexto didáctico para destrozarlo como juguete.

Esperamos que este artículo anime a otros profesores a que busquen relaciones matemáticas en los juegos que nos rodean y que las exploten en la enseñanza. Esto justificaría la difusión y empleo lúdico del juego en la enseñanza de las Matemáticas, para facilitar que los alumnos se relacionen con los elementos del entorno, y busquen en ellos algunas relaciones que constituyen conceptos abstractos de las Matemáticas.

Bibliografía

Alsina, C.; Fortuna, J.M.; Pérez, R. (1997): *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid, Síntesis.

Castro, E.; Flores, P.; Segovia, I. (1997): "Relatividad de las fórmulas del cálculo de la superficie de figuras planas". *Suma 26*. pp. 23-32.

Corvalán, F. (1994): *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid, Síntesis.

De la Hoz, R. (1996): "La proporción cordobesa". En De la Fuente, M. y Torralba, M. (Eds.). *Actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*. Córdoba, S. Publicaciones de la Universidad de Córdoba. Pp. 67-84.

Flores, P. (2003): "Relación con el conocimiento profesional en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: Reflexión sobre cuestiones profesionales". *Ponencia en EIEM*, Évora, mayo 2002.

Flores, P. (2002a): "Laberintos con alambre (estructuras topológico-métricas)". *Suma nº 41*. pp. 29-35.

Flores, P. (2002b): "El puzzle de la pajarita". *Números Vol. 51*. pp. 3-18.

Flores, P. (2002c): "Superficie y área". *Guías Praxis para el profesorado de ESO*. Pp. 56/75 a 56/101. Barcelona, Praxis.

Romero, I. (1997): *La introducción al número real en la enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Granada, Comares.

Segovia, I.; Castro, E.; Flores, P. (1996): "El área del rectángulo". *UNO 10*, pp. 63-77.

The Puzzle Museum. http://puzzlemuseum.com. Colección de puzzles de Hordern – Dalgety.

Pablo Flores Martínez. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada
Correo electrónico: pflores@ugr.es


12 de mayo
Día Escolar de las Matemáticas
... tres mil trescientos cuartillos ...
El Quijote y las Matemáticas
Cortesía
Santillana