

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS)

Ramón Antonio Depool Rivero

Resumen

El presente trabajo constituye un resumen de la Tesis Doctoral, «La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS)»¹. La cual se inscribe dentro de las líneas de investigación del área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna (España). En la investigación nos propusimos tres objetivos fundamentales, primero, de tipo actitudinal, estudiar las actitudes de los estudiantes al participar en un curso que involucra el uso de la Tecnología de la Información y la Comunicación; segundo, diseñar implementar y evaluar un Módulo Instruccional que contiene Prácticas de Laboratorio, estructuradas utilizando el Programa de Cálculo Simbólico *DERIVE*; y tercero, estudiar el nivel de competencia que puede lograr el estudiante en cuanto a la comprensión del concepto de Integral Definida. Los estudiantes fueron seleccionados de los cursantes de la asignatura Cálculo I de un primer curso de ingeniería de una Universidad de Venezuela. Los estudiantes participaron en actividades que combinaban clases normales de tiza y pizarra con Prácticas de Laboratorio, siguiendo un Módulo Instruccional (M.I) basado en *DERIVE*. Se concluye que el M.I. resulta ser un instrumento útil en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo I; los estudiantes lograron una comprensión aceptable del concepto de Integral Definida. En relación a las actitudes se tiene que, el uso de los ordenadores inspira confianza y seguridad, resulta motivante y compromete al estudiante en la realización de actividades matemáticas usando *DERIVE*.

Abstract

The present study constitutes a summary of the Doctoral Thesis, Teaching and learning of Integral Calculus in a computational environment. Students' attitudes towards the use of a Computer Algebra System (CAS). The present study it has been developed as a research program of the Mathematical Analysis Department at the University of La Laguna (Spain). The main goals of the study involves: To document students' attitudes when participating in a course that involves the use of the Technology of the Information and the Communication; to design, implement and evaluate an Instructional Module that includes Laboratory Practice, that use structured using the Computer Algebra System *DERIVE*; and to investigate the level of competence exhibited by students while understanding the Definite Integral concept. As a result of implementation of the learning activities, the students achieved an acceptable understanding of fundamental concepts of Definite Integral. In addition, students' attitudes showed that the use of the computers inspired trust and confidence. That is, they were motivated to work on mathematical activities using *DERIVE*.

¹ Defendida el 23 de abril de 2004 en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna y realizada bajo la dirección del doctor Matías Camacho Machín.

Introducción

El uso de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y en particular, el uso de los ordenadores, se empieza a vislumbrar en esta década como un medio de enseñanza que puede crear entornos de aprendizaje útiles para la enseñanza de las Matemáticas, sobre todo en los niveles de Enseñanza Secundaria y Universitaria. En general, las primeras investigaciones, basadas en secuencias de aprendizaje desarrolladas con ordenadores, no toman en cuenta que los aspectos afectivos podrían tener una relación con aquéllos que están exclusivamente implicados en la adquisición de los conocimientos matemáticos, que se imparten con determinados programas informáticos. No obstante, en los últimos años se han realizado distintas investigaciones en las que algunas de las componentes afectivas, tales como las actitudes, creencias o concepciones hacia las Matemáticas, han pasado a ser consideradas como elementos de análisis importantes de distintos conceptos matemáticos enseñados mediante diferentes medios tecnológicos, que influyen en el éxito o fracaso en términos de aprendizaje. Investigaciones desarrolladas por Artigue (1997), Mayes (1998) y Galbraith, et al (1998), entre otras, destacan tanto la importancia de los aspectos del dominio afectivo de los estudiantes hacia las matemáticas como la relación existente con el uso de nuevas tecnologías, para el aprendizaje de algunos conceptos determinados de la Matemática escolar.

Es sabido que la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de Cálculo Infinitesimal poseen una problemática que surge paralelamente con su aparición en los programas de la enseñanza media y primeros cursos universitarios. El Cálculo siempre ha sido considerado un tema complejo difícil de enseñar.

El trabajo que se presenta constituye una investigación que se realizó conjuntamente entre la Universidad de La Laguna (España) y la Universidad Politécnica UNEXPO (Venezuela), mediante la cual se pretende, de una parte, analizar las potencialidades y dificultades que surgen con la introducción del software *DERIVE* en los cursos de Cálculo para los estudiantes de Ingeniería, y de otra, analizar las actitudes de los estudiantes de ingeniería hacia el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación para el aprendizaje del Cálculo. Se ha elegido como tópico concreto el concepto de Integral Definida, elaborándose a tal efecto un Programa de Utilidades (PU) sustancialmente diferente al que viene incorporado en *DERIVE*, con el objetivo de introducir el concepto de Integral Definida partiendo del problema clásico de las cuadraturas y mostrando cómo aproximar el área limitada por una curva. Se pretende con ello, de una parte, que el estudiante asimile tanto la perspectiva gráfica como numérica del concepto de Inte-

gral Definida y de otra, que el cálculo de la Integral Definida de una función (continua o no) no sea visto exclusivamente como la diferencia de una primitiva evaluada en los extremos del intervalo de integración

$\left(\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F(x) \text{ primitiva} \right)$, tal y como se muestra en algunas investigaciones (Orton 1983; Eisenberg y Dreyfus, 1991).

Resultan frecuentes las incoherencias que surgen en los estudiantes al tener que resolver la Integral Definida cuya primitiva no puede ser expresada por una función elemental. Recientemente se han propuesto modificaciones al curriculum, por ejemplo, Azcárate (1996) sugiere introducir el concepto de Integral Definida a partir de la integración numérica, independientemente de la derivada.

En esta línea, en nuestra investigación, se pretende, con la utilización de Prácticas de Laboratorio basadas en el PU elaborado, que el estudiante comprenda el significado de la integración aproximada como un medio para encontrar respuestas a situaciones que modelizan la realidad (Weigand y Weller, 1998), las cuales son susceptibles de ser resueltas mediante el cálculo de integrales definidas.

Desde la inclusión de las materias de Cálculo en las carreras de Ingeniería ha habido diferentes enfoques de los métodos para enseñarlo, aunque existe una predisposición al uso casi exclusivo de procedimientos algorítmicos para la resolución de los diferentes problemas que se plantean. Una gran cantidad de libros de texto favorecen esa concepción de la enseñanza dado que en general dedican, tal y como señala Tall (Tall 1997), a la resolución de ejercicios rutinarios una parte importante, entre un 30 y un 50%.

En la década de los noventa, el uso de los PCS² (Programas de Cálculo Simbólico) o CAS (Computer Algebra System), tales como Maple, Mathematica, MatLab, MathCad, *DERIVE*, etc.), con capacidades tanto simbólicas como gráficas, se ha ido extendiendo, aunque en ningún caso el manejo de éstos puede considerarse como generalizado. Los libros de texto empiezan en estos últimos años a incluir problemas específicos, que para su resolución sugieren el uso de algunos de estos PCS, unos de estos textos en de Stewart (1999). Ahora bien, el uso de estos PCS queda reducido, en general, a desarrollar cálculos directos de las primitivas de funciones, de desarrollos de Taylor, de representaciones de funciones, y no sue-

² En la literatura anglosajona existe el acuerdo de denominar a estos programas CAS. Sin embargo, en la comunidad de habla hispana, se utilizan varios términos, algunos de estos son: SCA (Sistema de Cálculo Algebraico), SCF (Sistemas de Cálculo Formal) o PAS (Programas de Álgebra Simbólica). Nosotros a lo largo de este resumen hablaremos de PCS.

len ser utilizados como herramientas de enseñanza y aprendizaje, que permitan construir a los estudiantes los conceptos básicos del Cálculo.

La incorporación del *DERIVE* como apoyo para la enseñanza de las Matemáticas en los últimos cursos de Secundaria y primeros cursos de Universidad, comienza a ser una realidad. Se han desarrollado diferentes proyectos de investigación subvencionados por las instituciones académicas responsables que han tratado de extender el uso de tal software (Artigue et al, 1995; Drijvers et al, 1997; Heugl 1997), aportando resultados bastante alentadores. A pesar del temprano optimismo despertado por el uso de PCS existe un amplio abanico de cuestiones sin responder. Por ejemplo, ¿cuál es la relación entre lápiz-papel y el trabajo en un entorno informático? ¿Cómo afecta el uso de PCS al curriculum? ¿Cómo afectan los PCS a la comprensión de los conceptos? ¿Qué conocimientos previos se requieren para usar un PCS de forma productiva?

El Documento de Discusión del 12 ICMI Study titulado «*The Future of the Teaching and Learning of Algebra*» señaló las siguientes interrogantes como cuestiones básicas que necesitan de respuestas más o menos inmediatas

- ¿Para qué estudiantes y cuándo es apropiado introducir el uso de un PCS?
- ¿Cuándo las ventajas de usarlo sobrepasan el esfuerzo que hay que poner en aprender a utilizarlo? ¿Hay actividades en los que pueden ser realizados con provecho por estudiantes más jóvenes?
- ¿Qué intuiciones algebraicas y «sentido simbólico» necesita el usuario de un PCS y a qué intuiciones conlleva el uso de éste?
- Una de las potencialidades de los PCS es que favorecen múltiples representaciones de conceptos matemáticos. ¿Cómo se puede utilizar esto correctamente? ¿Pueden ser «sobreutilizados»?
- ¿Cuáles son las relaciones e interacciones entre distintas aproximaciones y filosofías de la enseñanza de las Matemáticas con el uso de PCS?
- Los estudiantes que utilizan distintas herramientas informáticas resuelven los problemas y piensan en los conceptos de forma distinta. Los profesores tienen más opciones para cómo enseñar. ¿Qué impacto tiene esto en la enseñanza y el aprendizaje? ¿Qué tipos de sistemas favorecen qué tipos de aprendizaje? ¿Pueden ser caracterizadas teóricamente estas diferencias?
- ¿Cómo debería ser un curriculum de Álgebra en un país donde los PCS están disponibles libremente? ¿Qué habilidades manipulativas deberían retenerse? (Chick et al, 2001)

Es claro que la integración de los Programas de Cálculo Simbólico en la educación matemática hace emerger muchas cuestiones que aún están por responder; y en nuestra investigación trataremos de aportar algunas respuestas parciales a las mismas.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores nos planteamos los siguientes objetivos generales:

Objetivo 1

Diseñar, implementar y evaluar un módulo instruccional, basado en un conjunto de Prácticas de Laboratorio, utilizando el Programa de Cálculo Simbólico *DERIVE* para la enseñanza del concepto de Integral Definida, para estudiantes de un primer curso de ingeniería.

Objetivo 2

Analizar la influencia que posee el uso de un Programa de Utilidades específico, en el que se enfatizan los aspectos de aproximación desde la perspectiva gráfica y numérica, en la comprensión de la Integral Definida.

Objetivo 3

Analizar las actitudes hacia las matemáticas, el uso de los ordenadores y el aprendizaje con *DERIVE* de los estudiantes, cuando son inmersos en un plan de enseñanza que utiliza herramientas tecnológicas como elemento básico para su aprendizaje.

Marco conceptual

Para establecer los aspectos teóricos tanto en el ámbito afectivo como cognitivo-curricular que dan lugar al marco teórico de nuestra investigación, consideramos para el ámbito afectivo lo expuesto por Mandler (1989), McLeod (1992), Mayes (1998) en cuanto a las emociones, actitudes y creencias y se establece lo que entenderemos por actitudes. En cuanto al ámbito cognitivo, se exponen las propuestas teóricas de Duval (1993) sobre los sistemas de representación semiótica, y las dificultades, obstáculos y errores (Socas 1997). Además, se describe las componentes teóricas relacionadas con el uso de las TIC. Para, finalmente, definir un modelo de competencia cognitivo, basado en los trabajos de Socas (2001), que nos permitió estudiar la comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de la Integral Definida.

Mencionamos a continuación algunos aspectos de nuestro marco teórico.

El **dominio afectivo** ha sido tomado en cuenta, como una parte importante de la cognición dentro de la Educación Matemática. Uno de los pioneros en

estas investigaciones es Mandler (1989) quien en sus trabajos trata de clarificar a qué debemos referirnos cuando hablamos del dominio afectivo de nuestros estudiantes. McLeod (1992) resume la teoría de Mandler de la siguiente manera:

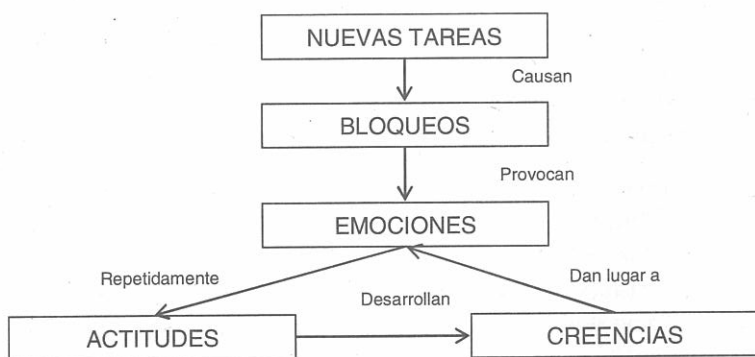
Primero, los estudiantes poseen ciertas creencias sobre las Matemáticas y sobre sí mismos que juegan un papel importante en el desarrollo de sus respuestas afectivas a situaciones matemáticas. Segundo, a partir de interrupciones y bloqueos que son una parte inevitable del aprendizaje de las Matemáticas, los estudiantes experimentarán emociones positivas y negativas cuando aprenden Matemáticas, estas emociones se notan más probablemente cuando las tareas a realizar son nuevas. Tercero, los estudiantes desarrollarán actitudes positivas o negativas hacia las Matemáticas cuando encuentran repetidamente situaciones matemáticas iguales o semejantes.

Al igual que McLeod admitiremos que las creencias son de naturaleza principalmente cognitiva y se desarrollan durante largos periodos de tiempo. Por otra parte, las emociones se consideran con un menor valor cognitivo y pueden aparecer y desaparecer bastante rápidamente, al igual que lo hace, por ejemplo, ese sentido de frustración cuando no podemos resolver un problema que se convierte rápidamente en la alegría de haberlo resuelto al cabo de poco tiempo.

Es difícil, atendiendo a la literatura revisada, separar las investigaciones sobre actitudes de las investigaciones sobre creencias, dado que existe una conexión importante, al menos desde nuestra perspectiva, entre estos constructos, y que de acuerdo con Mayes (1998) y Mandler (1989) se relacionan entre sí cuando se desarrollan nuevas tareas matemáticas. De manera que una repetición de las emociones que surgen al experimentar con nuevas tareas, da lugar a actitudes que contribuyen a configurar las creencias sobre las Matemáticas, que a su vez inciden, de una manera o de otra, en lo que se consideran emociones.

Como señala Mayes (1998), su visión sobre el dominio afectivo, planteada desde la psicología del desarrollo, es análoga a la visión constructivista sobre el dominio cognitivo.

Los estudiantes experimentan emociones, que se desarrollan en actitudes, las cuales son usadas para construir sus propias creencias. En el siguiente esquema se sintetiza la idea de Mandler:



Nos basaremos entonces, desde una perspectiva teórica, en este modelo propuesto por Mandler-Hart, considerando como dimensiones del dominio afectivo las creencias, las actitudes y las emociones. De esta manera: *La creencia* refleja un juicio sobre cierto conjunto de conceptos; *la actitud* representa una reacción emocional sobre un objeto, sobre una creencia sobre un objeto o sobre un comportamiento hacia el objeto; *la emoción* significa una reacción intensa creada por algún estímulo.

McLeod sintetiza las dimensiones de creencias, actitudes y emociones como representando una implicación afectiva creciente, una implicación cognitiva decreciente, intensidad creciente y estabilidad decreciente; esto es, si comparamos las actitudes con las creencias, las actitudes tienen una implicación afectiva mayor una implicación cognitiva menor, más intensidad y menos estabilidad, que las creencias.

Si comparamos las actitudes con las emociones, las primeras tienen una implicación afectiva menor, una implicación cognitiva mayor, menor intensidad y mayor estabilidad (de ahí la definición de actitud). De esta forma, consideramos las ACTITUDES como ***el resultado de reacciones emocionales que han sido internalizadas y automatizadas para generar sentimientos de intensidad moderada y estabilidad razonable.***

Nosotros no hacemos una separación taxativa entre los distintos constructos que son considerados desde la perspectiva teórica, sino que nos moveremos entre los aspectos de creencias-actitudes de la clasificación anterior, sin considerar las emociones.

Dentro de estas consideraciones teóricas que hemos realizado, la presencia de las TIC en las aulas, en general, y de los ordenadores en particular, pueden ayudar a mejorar el aprendizaje en los términos en que pueden influir en el ámbito afectivo. De este modo, algunos investigadores han considerado relevante los estudios que relacionan las actitudes hacia la tecnología conjuntamente con las actitudes hacia las Matemáticas.

Galbraith, et al (1998) estudian las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y sus efectos en el rendimiento escolar y justifican la importancia del estudio de las actitudes hacia la tecnología, por la relevancia de su uso en las actividades relacionadas con la modelización matemática.

En este mismo sentido, y teniendo en cuenta los resultados de Galbraith et al (1998) y Galbraith (2002), que les permiten afirmar que las actitudes hacia el ordenador son más influyentes que las actitudes hacia las matemáticas en facilitar un compromiso activo en las actividades con el ordenador en el aprendizaje de las Matemáticas, es por lo que optamos por incluir en nuestro trabajo las escalas de actitudes utilizadas por estos investigadores y que han sido validadas por sus investigaciones.

En cuanto al aspecto **cognitivo curricular**, nos propusimos estudiar cómo entienden los estudiantes el concepto de integral definida, para lo que elaboramos un modelo de competencia que se basa principalmente en el utilizado por Socas (2001), quien aborda en su estudio el papel de los Sistemas Matemáticos de Signos en la comprensión de los objetos matemáticos relativos al pensamiento numérico y algebraico, vía la elaboración de modelos de competencia.

Para el análisis de una situación problemática, este modelo de competencia se utiliza como marco de referencia que al comparar con las actuaciones de un estudiante nos ayuda a determinar el grado de comprensión del concepto por parte del estudiante.

Tomamos en consideración, que el modelo de competencia se refiere

... al aspecto formal del campo conceptual tanto a sus aspectos conceptuales y fenomenológicos como a sus aspectos cognitivos, es decir, simularía los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual analizado (Socas, 2001).

En nuestro estudio establecemos un **Modelo de Competencia Cognitivo** como elemento organizador que facilita el análisis de la comprensión del concepto de Integral Definida por parte de los estudiantes. Consideramos, del mismo modo que Socas (2001), tres componentes fundamentales:

- Los estadios de desarrollo cognitivo para los sistemas de representación involucrados en el concepto de Integral Definida.
- La teoría de Duval (1993) sobre los registros de representación semiótica y el funcionamiento cognitivo del pensamiento.
- Las dificultades, obstáculos y errores que surgen en el aprendizaje del concepto de Integral Definida.

Con respecto al primer componente, que se basa en el desarrollo cognitivo de los sistemas de representación, se distinguen tres estadios: Consideramos que un estudiante se encuentra en el **estadio semiótico**: En la categoría 1A, si tiene ideas imprecisas sobre la Integral Definida y mezcla de forma incoherente diferentes representaciones semióticas. En la categoría 1B, si reconoce los elementos de un registro de representación semiótico en relación con la Integral Definida.

Un estudiante se encuentra en el **estadio estructural**: En la categoría 2A, si reconoce un registro de representación semiótico y realiza transformaciones (tratamientos) en su interior. En la categoría 2B, si realiza correctamente actividades de conversión de un registro de representación semiótico a otro; en estas actividades de conversión hay un registro que el estudiante controla y facilita la conversión al otro.

Un estudiante se encuentra en el **estadio autónomo**: En la categoría 3A, si articula dos registros de representación semióticos. Puede tomar cualquiera de ellos para significar correctamente la Integral Definida independientemente del otro. En la categoría 3B, si articula coherentemente diferentes registros de representación semióticos y ejerce un control de las representaciones semióticas que utiliza. Tiene conocimientos de la Integral Definida como estructura y puede controlar aspectos coherentes e incoherentes de ella.

El segundo componente está relacionado con la propuesta teórica de Duval sobre los registros de representación semióticos y el funcionamiento cognitivo del pensamiento. Para Duval (1993):

...toda representación es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa.

La comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.

Para una coordinación de los registros de representación semióticos, es fundamental el reconocimiento de los registros, las transformaciones dentro del registro (tratamientos) y la conversión entre diferentes registros. Estas acciones se deben realizar de una manera coordinada, libre de contradicciones. En nuestra investigación hemos considerado tres registros: El gráfico (G), en el que el estudiante elabora gráficos, tanto los referidos a un sistema de ejes cartesianos como los ilustrativos (idiosincrásicos). El algebraico (A), en el que el estudiante plantea y resuelve integrales definidas. Y, finalmente, el numérico (N), en el que el estudiante calcula de forma

aproximada, utilizando fórmulas de Geometría elemental, el valor numérico aproximado que corresponde al área de una región.

El tercer componente se refiere a las dificultades obstáculos y errores (Socas, 1997) en el aprendizaje del concepto de Integral Definida. El análisis de los errores nos ayuda delimitar cognitivamente los estadios y niveles en los que se mueven los estudiantes y, además, indagar sobre las posibles causas que producen que los estudiantes cometan diferentes tipos de errores.

El modelo de competencia incluye un esquema de análisis, que consiste en una serie de preguntas con objetivos específicos, que detallan las posibles actuaciones del estudiante al resolver las tareas propuestas.

El modelo antes descrito es comparado con el modelo de actuación, que se refiere a cómo ejecuta el usuario real, en nuestro caso el estudiante entrevistado, las acciones propias de los procesos de enseñanza/aprendizaje del objeto matemático «Integral Definida».

El análisis de estos dos aspectos nos permitió, por una parte, establecer el estadio de desarrollo cognitivo alcanzado por el estudiante y su categoría, y por otra, establecer su perfil de actuación (para más detalles ver Camacho y Depool, 2003a).

Metodología

La investigación se llevó a cabo en tres fases o estudios. Un estudio exploratorio y dos experimentales; el primero nos permitió validar las estrategias a seguir y los instrumentos a aplicar, en los siguientes estudios. En el primer estudio experimental, la investigación se centró en torno a dos ámbitos: el afectivo, en el que se analizaron las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, el uso de los ordenadores y el aprendizaje con *DERIVE*, y, el curricular- cognitivo, en el que se determinó la comprensión del concepto de Integral Definida, por parte de los estudiantes. El segundo estudio experimental, consistió en el análisis de las competencias adquiridas por los estudiantes en la construcción del objeto matemático «Integral Definida», cuando siguen el diseño instruccional elaborado. Los estudiantes participantes en los estudios se seleccionaron de los inscritos en un primer semestre de ingeniería, en la asignatura Cálculo I de la Universidad Politécnica UNEXPO (Venezuela), los cuales participaron en actividades que combinaban clases habituales de tiza y pizarra con Prácticas de Laboratorio (PL) siguiendo el Módulo Instruccional diseñado.

Para el estudio sobre las actitudes se aplicaron escalas tipo Likert (en el anexo I se muestra una de las escalas utilizadas) y entrevistas clínicas. Para

el estudio de la comprensión y competencias de los estudiantes del concepto de Integral Definida, se diseñaron un conjunto de tareas (problemas no rutinarios) que conjuntamente con una entrevista semiestructurada aplicada a seis estudiantes seleccionados, permitieron ubicar a cada estudiante en un estadio de desarrollo cognitivo (semiótico, estructural o autónomo), de los definidos por el modelo de competencia.

En la siguiente tabla se resumen las etapas de nuestra investigación, indicando detalladamente las distintas acciones realizadas en cada etapa, los objetivos propuestos y el tipo de análisis que se desarrolló.

ETAPAS	FOCO DE ESTUDIOS	ACCIONES	OBJETIVOS	TIPOS DE ANÁLISIS
1 ^a Elaboración del proyecto de investigación 1999		<ul style="list-style-type: none"> - Revisión de la literatura - Intuición del problema. - Elaboración del marco teórico conceptual. - Elaboración del plan metodológico general. 		
2 ^a Exploratoria 1999/2000 Validación de instrumentos	Actitudes hacia las Matemáticas y al uso de los ordenadores	<ul style="list-style-type: none"> - Elaboración de la Escala de Actitudes, EA-1 - Aplicación de la Escala de Actitudes (junio 1999). - Procesamiento de los datos, análisis e interpretación. 	Determinación de las actitudes de los estudiantes. Establecimiento del tipo de respuesta	Cualitativo
	Módulo Instruccional I	<ul style="list-style-type: none"> - Elaboración del Módulo Instruccional I. - Implementación del Módulo Instruccional I (febrero 2000). 		
	Actitudes hacia el aprendizaje con <i>DERIVE</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Elaboración de la Escala de Actitudes, EA-2. - Aplicación de la Escala de Actitudes (febrero 2000). - Procesamiento de los datos, análisis e interpretación. 	Determinación de las actitudes de los estudiantes. Establecimiento del tipo de respuesta	Cuantitativa/ Cualitativo
	El concepto de la Integral Definida	<ul style="list-style-type: none"> - Elaboración del Cuestionario de Conocimientos. - Aplicación de Cuestionario de Conocimientos (febrero 2000). - Procesamiento de los datos, análisis e interpretación. 	Determinación de dificultades, obstáculos y errores. Establecimiento del tipo de respuesta.	Cualitativo

ETAPAS	FOCO DE ESTUDIOS	ACCIONES	OBJETIVOS	TIPOS DE ANÁLISIS
3 ^a Experimental Fase 1 2000 Pretest / Postest		Elaboración de la metodología.		
	Actitudes hacia las Matemáticas, el uso de los ordenadores y hacia el aprendizaje con <i>DERIVE</i>	<ul style="list-style-type: none"> - Implementación del Módulo Instruccional I (abril-julio 2000). - Modificaciones de las Escalas de Actitudes. - Aplicación de la Escala de Actitudes Pretest (EA-3) (abril 2000) - Aplicación de la Escala de Actitudes Postest (EA-4) (julio 2000). - Entrevistas clínicas (agosto 2000). - Procesamiento de los datos, análisis e interpretación. 	Determinación de las actitudes de los estudiantes. Establecimiento del tipo de respuesta	Cuantitativo/ Cualitativo
		El concepto de la Integral Definida	<ul style="list-style-type: none"> - Elaboración de Pretest de Conocimientos. CC-1. - Aplicación del Cuestionario de Conocimientos Pretest (junio 2000). - Modificaciones del Cuestionario de Conocimientos validado en la 1^a etapa (Postest) (CC-2). - Aplicación del Cuestionario de Conocimientos Postest (julio 2000). - Entrevistas clínicas (agosto 2000). - Procesamiento de los datos, análisis e interpretación. 	Determinación de las actitudes de los estudiantes. Establecimiento del tipo de respuesta
4 ^a Experimental Fase 2 2001/2002	El concepto de la Integral Definida	Elaboración de la metodología.		
<ul style="list-style-type: none"> - Elaboración Módulo Instruccional II, modificado del Módulo I. - Implementación del Módulo Instruccional II (octubre 2001-marzo 2002). - Modificaciones del Cuestionario de Conocimientos validado en la Fase 1 (Postest) (CC-3). - Aplicación del Cuestionario de Conocimientos (marzo 2002). - Entrevistas clínicas (abril 2002). - Procesamiento de los datos, análisis e interpretación. 		Determinación de dificultades, obstáculos y errores. Establecimiento del tipo de respuesta. Determinación del nivel de comprensión del concepto de Integral Definida	Cualitativo	

Elaboración de la Memoria Doctoral, 2003/2004

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS)

Sin restarle importancia a los estudios exploratorios y el estudio experimental (primera fase), nos centramos en el estudio experimental (segunda fase).

Para este estudio se seleccionaron 31 estudiantes de nuevo ingreso de un curso regular de Cálculo I, entre octubre de 2001 y marzo de 2002. Se impartió el Programa Oficial de la asignatura Cálculo I, con la variante de que, además de las clases habituales de aula, los estudiantes realizaron Prácticas de Laboratorio (PL) con ordenadores, siguiendo el Módulo Instruccional diseñado por nosotros, para trabajar con *DERIVE*. Las unidades temáticas fueron: Funciones, Límite de Funciones, Derivadas, e Integrales. Se realizaron ocho PL; la primera, sobre conocimientos generales de uso del software y, las cuatro siguientes, para el estudio de Funciones, Límites y Derivadas, respectivamente. En dichas prácticas utilizaron sencillos programas de utilidades (PU) similares a los expuestos en algunos libros de Cálculo (Stewart, 1999) así como los comandos de cálculo directo que se incluyen en los diferentes menús del *DERIVE*. El resto de las prácticas fueron elaboradas para el estudio de la Integral Definida, y se basaron principalmente en el uso de un Programa de Utilidades diseñado por nosotros (ver Camacho y Depool, 2003b, Depool 2004) mediante el que se pretende que los estudiantes puedan seguir paso a paso el desarrollo del concepto de Integral Definida partiendo del cálculo aproximado del área de la región limitada por una curva y utilizando aproximaciones con rectángulos, trapecios y trapecios parabólicos (Simpson).

La instrucción se realizó en tres fases:

Fase 1: El profesor hace una presentación del tema usando los métodos y medios habituales de enseñanza, es decir, se emplea el libro de texto oficial (Stewart, 1999), tomando como soporte para las explicaciones el retroproyector, la tiza y la pizarra.

Fase 2: Los estudiantes realizan por parejas, en un laboratorio de ordenadores, las Prácticas de Laboratorio que conforman el Módulo Instruccional. Las parejas de estudiantes llevan a cabo las prácticas correspondientes y presentan un informe en soporte informático del trabajo realizado. Se utiliza un cañón de proyección para hacer la presentación de la práctica y para aclarar dudas en desarrollo de la misma.

Fase 3: Se discute lo realizado en las Prácticas de Laboratorio con todos los estudiantes, tomando como referencia el trabajo desarrollado por ellos en los informes de las prácticas que presentaron.

Con la finalidad de seleccionar un grupo de seis estudiantes para determinar y aplicar nuestro modelo de competencia, se le aplicó a todo el grupo, un cuestionario de conocimientos. Una vez hecho esto y seleccionados los seis estudiantes, se realizó la entrevista clínica que estuvo basada principalmente en el cuestionario que habían trabajado con anterioridad los estudiantes.

El cuestionario y la entrevista. Organizamos los problemas utilizados en el cuestionario de conocimientos y en la entrevista, en tres grupos importantes, de acuerdo con las características y las formas potenciales de solución: Preguntas en las que el registro gráfico constituye el elemento básico de la información que se suministra para la resolución del problema. Preguntas en las que la información suministrada viene dada en el registro algebraico. Cuestiones más generales en las que los estudiantes tienen que poner en juego un alto nivel de comprensión del concepto de Integral Definida para usar los diferentes registros de representación semiótica considerados durante la instrucción (numérico, gráfico y algebraico)

El cuestionario fue cumplimentado por los estudiantes en tres escenarios diferentes:

Escenario 1: en el que los estudiantes trabajan en los problemas del cuestionario empleando solamente lápiz y papel e informan por escrito sobre sus planteamientos o soluciones a los problemas.

Escenario 2: que corresponde al trabajo que presentan los estudiantes al resolver el cuestionario con el empleo del software *DERIVE*; aquí los estudiantes entregan una copia del disquete que contiene sus soluciones y sus comentarios sobre el contenido de la práctica.

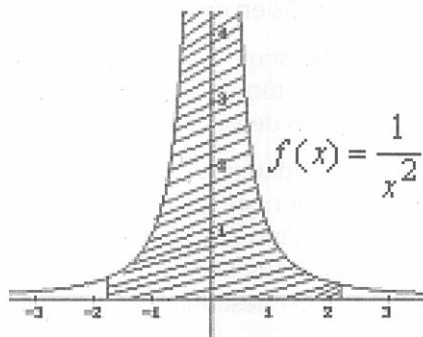
Escenario 3: en el que los estudiantes seleccionados (6) son entrevistados y se les cuestiona directamente sobre su manera de resolver los problemas planteados. Aquí ellos eligen libremente qué tipo de herramienta deben emplear durante sus explicaciones o soluciones al cuestionario. Los estudiantes se codificaron como E1, E2, E3, E4, E5, E6.

Conviene señalar que no todas las preguntas se propusieron en los tres escenarios, dado que un análisis previo de las respuestas dadas por el gran grupo (la clase) en los Escenarios 1 y 2 nos sugirió incluir o descartar algunas de las preguntas que quedaron para la entrevista semiestructurada (escenario 3) que se desarrolló con el grupo de estudiantes seleccionado.

Para ejemplificar los grupos de problemas se presentan algunos de éstos

Primer grupo de preguntas

Dada la gráfica de la siguiente función, si es posible, calcula el área de la región rayada; si no es posible, justifica tu respuesta.



Se pretende analizar lo que responden los estudiantes cuando la región dada tiene área infinita.

Las posibilidades de actuaciones del estudiante en este primer grupo de preguntas son:

- Reconocer los registros de representación gráfico y algebraico, y realizar tratamientos dentro de éstos.
- Elaborar registros algebraicos y/o numéricos, y realizar transformaciones (tratamientos) dentro de éstos.

Segundo grupo de preguntas

Calcular el área que forma con el eje OX, la gráfica de la función

$$f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 2x + 12$$

Se pretende que el estudiante:

- Use el software para obtener la gráfica de la función, o la obtenga mediante el uso exclusivo de lápiz y papel.
- Identifique las regiones donde debe integrar, mediante la obtención de los puntos de intersección de la gráfica de la función con el eje de abscisas.
- Plantee y calcule las integrales mediante la regla de Barrow. Es posible que el estudiante utilice el PU para obtener las distintas aproximaciones.

Se espera que el estudiante en este segundo grupo de preguntas:

- Elabore los registros de representación gráfico y/o numérico, y realice transformaciones (tratamientos) dentro de dichos registros.
- Reconozca el registro de representación algebraico, y transformaciones (tratamientos) dentro de dicho registro.

Tercer grupo de preguntas

Indica si es verdadera o falsa la proposición que sigue. Justifica tu respuesta.

Si $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$, entonces $f(x) \geq g(x)$ para todo x que pertenece a $[a, b]$

Se pretende determinar si el estudiante es capaz de entender los términos generales que se presentan y si establece relaciones entre el área y la integral definida. Además, si utiliza contraejemplos en su justificación.

En este último grupo de preguntas, se espera que el estudiante:

- Reconozca el registro de representación algebraico y realice una transformación dentro de dicho registro (tratamiento).
- Elabore registros de representación gráfico y/o numérico, y transformaciones dentro de dichos registros (tratamientos). Consideraremos que la elaboración del registro gráfico también implica su reconocimiento implícito.
- Realice, lo que hemos denominado, conversión coordinada entre los distintos registros de representación.

Conclusiones

En esta investigación, tal y como se ha indicado con anterioridad, nos planteamos tres objetivos generales, expondremos las conclusiones a partir de los mismos.

En relación con el primer objetivo establecimos conclusiones en cuanto al diseño, desarrollo y evaluación del módulo instruccional utilizado.

En cuanto al diseño del Módulo Instruccional, se puede concluir, en líneas generales, que responde a las necesidades formativas que nos habíamos propuesto.

La estructura de las actividades que conforman cada práctica a saber: *Introducción*, en la que se dan indicaciones generales que sirven, por una parte, de motivación, y, por otra, de información general sobre lo que se tratará en ella. *Objetivos*, relacionados con el tema tratado. *Desarrollo de la práctica*, correspondientes a las actividades que lo conducirán al logro de los objetivos. *Evaluación*, en la que se le pide al estudiante su opinión sobre el desarrollo de la práctica y se le propone problemas que debe resolver con lo aprendido en la misma; facilitan que el estudiante pueda seguir paso a paso el desarrollo de cada práctica y que el profesor pase a cumplir un papel de orientador, en el caso que se presente alguna dificultad en alguna actividad, contribuyendo así a que el estudiante sea generador de su propio aprendizaje, y, de alguna manera, un poco más independiente de la tutela del docente.

Consideramos que el diseño de instrucción organizado en torno al PCS *DERIVE* nos permitió, por una parte, observar cómo los estudiantes se enfrentaban al concepto de aproximación de una forma explícita, lo que resultaría más complicado sin el uso de una herramienta tecnológica. De otra parte, el uso del módulo instruccional utilizado ayudó a los alumnos a cons-