La integración de la calculadora en el proceso de motivación del estudiante

Ramón Sebastián Salat Figols[1]

Resumen

En este trabajo se presenta un ejemplo en el cual el uso de la calculadora gráfica en el marco de la solución de un problema, permite crear un ambiente de aprendizaje rico en posibilidades de exploración por parte del alumno y de contenido matemático. Incluso motiva el estudio de temas tan fundamentales en Matemáticas como lo es el continuo de los números reales.

Abstract

In this work, I present an example in which the use of graphic calculator in the frame of problem solving, allow create an environment rich in posibilities of exploring by student and of mathematical concepts. Even motivate to study fundamental concepts of Mathematics which as the continuum of real numbers.

Introducción

El uso de la calculadora permite al estudiante la realización ágil de experiencias que lo dirigen hacia el planteamiento de cuestiones de la mayor importancia en su formación teórica. En esta perspectiva el uso de la calculadora como una herramienta puede ocupar un papel fundamental en la formación matemática del estudiante. Y los procesos de solución de problemas son un contexto natural para la exploración de los objetos matemáticos y sus relaciones.

En este trabajo, se presenta un ejemplo del planteamiento de un problema, que partiendo del estudio de un conjunto de datos, permite llegar hasta la cuestión de la definición de la función exponencial.

Los datos y el problema

La temperatura de una taza de café varía con el tiempo de acuerdo a la tabla 1. El tiempo se mide en minutos y la temperatura en grados centígrados.

[1] Becario de la Comisión de Operación y Fomento de las Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional

Tiempo	Temperatura
5	50.33
10	38.39
15	31.16
20	26.77
25	24.10
30	22.49
35	21.51
40	20.96
45	20.55
50	20.34

Tabla 1

a) ¿Cuál era la temperatura cuando el tiempo era de 0 minutos?

b) ¿Cuál será la temperatura al cabo de 1 hora?

c) ¿Cuál será la temperatura para $t = 22.5$ minutos?

d) Encontrar una fórmula para calcular la temperatura después de transcurridos minutos.

Suponga que el proceso de enfriamiento de una taza es tal que en una unidad de tiempo la temperatura pasa de a $aT_0 + b$, dividamos el intervalo de tiempo unitario en n intervalos iguales de tiempo y supongamos que en cada uno de estos intervalos la temperatura pasa de a $T_{k+1} = AT_k + B$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Expresar los valores de A y de en términos de los de y de .

e) ¿Cómo puede calcularse en forma aproximada el valor de la temperatura para un valor irracional del tiempo?

f) Investigue en textos de Cálculo y pregunte a su profesor cómo puede fundamentarse el procedimiento propuesto en el inciso anterior.

Se propone que el problema sea planteado a los estudiantes y que se realicen discusiones entre ellos y el profesor, con el fin de estimular la exploración por parte de los alumnos y el enriquecimiento del pensamiento personal a través del pensamiento colectivo.

Análisis de los datos

Una gráfica de los datos da una idea acerca del comportamiento de los mismos (figura 1).

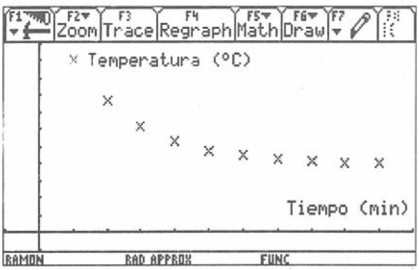

Figura 1

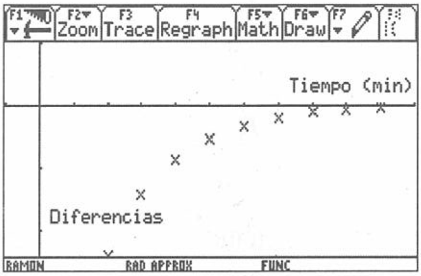

Figura 2

En ésta se observa que la temperatura va disminuyendo, pero que a intervalos iguales de tiempo, la disminución de la temperatura no es igual; al principio, la temperatura disminuye más rápidamente que después. Con el fin de tratar de encontrar alguna regularidad útil, por ejemplo, para fines predictivos, se puede tratar de encontrar alguna relación sencilla entre las diferencias de temperatura y el tiempo o entre las diferencias de temperatura y los valores de la misma.. En la figura 2, se muestra la gráfica de las diferencias de temperatura frente al tiempo; no se encuentra una regularidad más sencilla que en la figura 1. Pero si representamos las diferencias frente a la temperatura, se observa una relación lineal (figura 3) . Con el comando *trace* podemos considerar dos puntos de esta gráfica, digamos $(38.39,-7.24)$ y $(21.51,-0.59)$ y encontrar la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos.

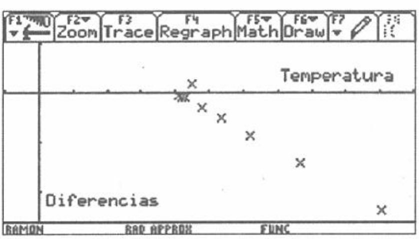

Figura 3

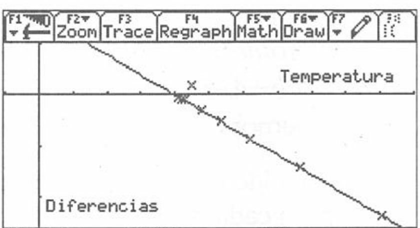

Figura 4

Se supone que el incremento I está relacionado con la temperatura T mediante $I = aT + b$. Usando *solve(38.39*a+b=-7.24 and 21.51*a+b=-0.59,{a,b})*, se obtiene . $a = -0.394$ *y* $b = 7.884$ En la figura 4 aparece la gráfica de la ecuación I=aT+b. Por lo tanto, si T_0, T_1, T_2,... representan las temperaturas en el tiempo inicial, al cabo de cinco minutos, después de diez minutos, ..., entonces:

$$T_1 - T_0 = -0.394T_0 + 7.884 \quad ; \quad T_1 = 0.606T_0 + 7.884$$

$$T_2 - T_1 = -0.394T_1 + 7.884 \quad ; \quad T_2 = 0.606T_1 + 7.884$$

$$T_3 - T_2 = -0.394T_2 + 7.884 \quad ; \quad T_3 = 0.606T_2 + 7.884$$

...

Puesto que cuando $t = 50$ min la temperatura es $20.34°C$, a los 55 min la temperatura será $0.606 \times 20.34 + 7.884 = 20.21°C$ y a 60 min los será $0.606 \times 20.21 + 7.884 = 20.13°C$

Algunos cálculos preliminares

Usando *solve* se puede calcular T_0 a partir de T_1. Se obtiene $T_0 = 70.04°\,C$.

Para calcular la temperatura en 22.5 min, se puede considerar el intervalo de tiempo que va de 20 min a 25 min como dos intervalos sucesivos, que van de 20 min a 22.5 min y el que va de 22.5 a 25 min. En estos intervalos se tiene $T(25) = aT(22.5) + b$ y T(22.5)=aT(20)+b. Haciendo una sustitución $T(25) = a^2\, T(20) + (a+1)\, b$.
Pero ya sabemos que T(25)=0.606T(20)+7.884. Luego, tenemos que:

$$a^2 = 0.606$$

$$(a+1)b = 7.884$$

usando *solve(a²=0.606 and (a+1)*b=7.884,{a,b})*, se obtiene $a=0.778$ y $b=4.43$. Por lo tanto, $T(22.5) = 0.778T(20) + 4.43 = 25.27°C$. Ahora sabemos como cambia la temperatura en intervalos de 2.5 min.

Esta misma idea nos permite encontrar una fórmula para conocer la temperatura en cada minuto, en lugar de cada cinco minutos. Dividimos el intervalo de cinco minutos en cinco intervalos de un minuto y denótense por $T_0, T_1, T_2, ..., T_5$, a las temperaturas al inicio, al minuto,..., a los cinco minutos. Entonces:

$$T_1 = AT_0 + B$$
$$T_2 = AT_1 + B = A^2T_0 + AB + B$$
$$T_3 = AT_2 + B = A^3T_0 + A^2B + AB + B$$
$$\ldots$$
$$T_5 = A^5T_0 + (A^4 + A^3 + \ldots + 1)B = A^5T_0 + \frac{1-A^5}{1-A}B$$

Como la temperatura cambia de T_0 a T_5 en cinco minutos, $T_5 = 0.606T_0 + 7.884$.
Por lo tanto:
$$A^5 = 0.606$$
$$\frac{1-A^5}{1-A}B = 7.884$$

Resolviendo, usando *solve*, se obtiene:
$$A = 0.904679$$
$$B = 1.90739$$

Conociendo la temperatura inicial T_0 y como cambia en un intervalo de un minuto podemos calcularla al cabo de dos minutos, al cabo de tres minutos y así sucesivamente hasta n minutos:
$$T_1 = AT_0 + B$$
$$T_2 = AT_1 + B = A^2T_0 + AB + B$$
$$T_3 = AT_2 + B = A^3T_0 + A^2B + AB + B$$
$$\ldots$$
$$T_n = A^nT_0 + (A^{n-1} + A^{n-2} + \ldots + 1)B = A^nT_0 + \frac{1-A^n}{1-A}B$$

Simplificando:
$$T_n = \left(T_0 - \frac{B}{1-A}\right)A^n + \frac{B}{1-A}$$

Substituyendo los valores de T_0, A y de B, se obtiene:
$$T_n = 50.03 \times (0.904679)^n + 20.0102$$

En esta fórmula aparece la función exponencial de manera natural en el contexto del problema de predecir el valor de la temperatura al cabo de n minutos. Ahora se tratará de predecir la temperatura en cualquier tiempo, lo cual, lleva a la extensión de esta función al conjunto de los número racionales y al conjunto de los números reales.

Cálculo de la temperatura en cualquier tiempo.

Generalizando el procedimiento seguido en la última parte de la sección anterior, si sabemos como cambia la temperatura en un intervalo unitario de tiempo, podemos calcular como cambia en una $n-ésima$ parte de esta unidad de tiempo. En un minuto la temperatura cambia de T a $aT+b$. Si dividimos el intervalo de un minuto en intervalos iguales, entonces si en cada uno de estos intervalos la temperatura cambia de T a $AT+B$, $A^n T_0 + \frac{1-A^n}{1-A} B = aT_0 + b$. De donde $A^n = a$ y $\frac{1-A^n}{1-A} B = b$. Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con *solve*:

$$A = \sqrt[n]{a}$$

$$B = \frac{1-\sqrt[n]{a}}{1-a} b$$

Para calcular el valor de la temperatura en cualquier tiempo t, la idea es encontrar un racional $\frac{m}{n}$ cercano a t. Luego calcular la fórmula para calcular el cambio en cada intervalo de tiempo que sea una *n-ésima* parte del intervalo unitario y aplicar m veces esta fórmula. Así se obtiene:

$$T(t) \approx T_m = A^m T_0 + \frac{1-A^m}{1-A} B = a^{\frac{m}{n}} T_0 + \frac{1-a^{\frac{m}{n}}}{1-\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{1-\sqrt[n]{a}}{1-a} b = \left(T_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^{\frac{m}{n}} + \frac{b}{1-a}$$

Si $\{r_n\}$ es una sucesión de números racionales que converge a un número irracional x, entonces la sucesión $\{a^{r_n}\}$ también converge y al número al cual converge nos sirve para definir a^x con $a > 0$. La fundamentación de este hecho lleva a una aplicación de teoremas importantes de la teoría de sucesiones y lo que es aún de mayor importancia, es posible utilizar este contexto para discutir el asunto de la continuidad de los números reales.

Por ejemplo, al calcular la temperatura en un valor de tiempo que sea racional, puede resultar un número irracional. Se puede promover la investigación bibliográfica por parte de los estudiantes y la discusión entre ellos y el profesor de este importante tema. Pero antes de proceder a la investigación bibliográfica, seguramente es deseable proveer al estudiante de experiencias exploratorias que lo motiven hacia el tema y que favorezcan que se plantee preguntas. Un ejemplo de un contexto posible para esta actividad se encuentra en Puerta (2001).

Y así se llega a que:

$$T(t)=\left(T_0-\frac{b}{1-a}\right)a^t+\frac{b}{1-a}$$

para cualquier tiempo t.

Conclusiones

El uso de la calculadora en el contexto de solución de problemas constituye un recurso importante para diseñar entornos de aprendizaje que promuevan la formación matemática integral del alumno, incluso la investigación de temas teóricos profundos. En el ejemplo que se ha presentado han aparecido los conceptos de progresión geométrica, sistemas de ecuaciones no lineales, convergencia de sucesiones y algunos de sus teoremas importantes, la definición de la función exponencial y aún puede servir como punto de partida para una discusión acerca de la completen de los números reales. Todo ello partiendo del estudio de datos reales.

Bibliografía.

Ellington,A.(2003): "A Meta-Analysis of the Effects of Calculators in Students'Achievement and Attitud Levels in Precollege Mathematics Classes". *Journal for Research in Mathematics Education.* Volumen 14, num 5, p. 433-463.

Freudenthal, H.(1972): *Mathematics as an Educational Task.* Reidel Publishing Company.

Giordano, F.; Weir, M.; Fox, W.(2002): *A First Course in Mathematical Modeling.* Brooks Cole.

Lynch, S. A. (1997): "Computer based technical calculus". En G. Goodell (editor), *Proceedings of the Ninth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, p. 320-323. Reading, MA: Addison-Wesley.

Puerta, F.(2001): "Sacando decimales". *Números. Revista de didáctica de las Matemáticas.* Volumen 14, p. 55-61.

Ramón Sebastián Salat Figols. Instituto Politécnico Nacional, México D.F.
Correo electrónico: rsalat@esfm.ipn.mx