



LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES DEL DISTRITO CAPITAL

Pedro Gómez
Cristina Carulla
y profesores del Distrito Capital

Octubre de 1999



Contenido

Introducción	1
Motivación	2
Marco conceptual	4
Problema	11
Procedimientos	12
Resultados	17
Conclusiones	22
Referencias bibliográficas	24
Anexo 1. Producciones de los profesores. Ejemplos de mapas conceptuales	26
Anexo 2. Mapas conceptuales de la función cuadrática	27

Introducción

En este documento presentamos el trabajo realizado por los profesores participantes en el proyecto *El análisis de contenido matemático como herramienta para la construcción de modelos pedagógicos: El caso de la función cuadrática* (Gómez y Carulla, 1998) en su fase de análisis de instrucción. En esta fase del proyecto, los profesores, habiendo realizado el análisis de contenido de la función cuadrática con base en los sistemas de representación y los mapas conceptuales, se dieron a la tarea de analizar y codificar en esos mapas la manera como se enseña este contenido matemático en la secundaria. Para ello, entrevistaron a colegas, describieron su propia experiencia y analizaron documentos oficiales y libros de texto. Su trabajo quedó plasmado en una codificación en sus mapas conceptuales y en algunos textos que profundizaban sus hallazgos. Nosotros, los asesores, hicimos una nueva codificación y analizamos los resultados. Estos resultados muestran una situación en la que el trabajo se centra en la ecuación cuadrática y en los procedimientos para su resolución; el análisis simbólico se restringe casi que exclusivamente a la forma estándar; el análisis gráfico tiende a identificar algunos de los elementos de la gráfica, pero no establece conexiones funcionales con los otros sistemas de representación; el sistema de representación numérico sirve principalmente de puente entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico; y el sistema de representación de aplicaciones sirve, en algunos casos como motivación y, en la mayoría de los casos como finalización, aunque su utilización parece restringirse a fenómenos que se pueden modelar con la ecuación cuadrática.

En este documento comenzamos describiendo la manera como surgió este estudio, como parte de un programa más amplio, para después presentar las principales herramientas conceptuales utilizadas en él. Con base en estas ideas re-formulamos el problema y presentamos los procedimientos utilizados para recoger, codificar y analizar la información. En seguida presentamos y analizamos los resultados. Finalmente, sugerimos algunas conclusiones.

Motivación

El estudio que se reporta aquí surge como consecuencia natural del proyecto del que hace parte y que se mencionó en el apartado anterior. Ese proyecto se encuentra descrito en (Gómez y Carulla, 1998) y en el reporte de investigación sobre las concepciones de los profesores sobre la función cuadrática (Gómez y Carulla, 1999). A continuación lo describimos brevemente para efectos de delinear el contexto del estudio objeto de este reporte.

El proyecto marco surgió de varias experiencias que los autores tuvieron en programas de formación permanente de profesores de matemáticas. En estos programas hemos venido utilizando los mapas conceptuales, los sistemas de representación y el análisis didáctico como herramientas didácticas cuya utilización por parte de los profesores tiene como propósito hacerlos más conscientes de la complejidad del contenido matemático a enseñar, de la complejidad del proceso de aprendizaje de ese contenido matemático y de la complejidad del proceso de enseñanza. No obstante, aunque al finalizar los programas de formación teníamos la sensación de que éstos tenían éxito con respecto a los objetivos expuestos arriba, no podíamos asegurar la validez de esos resultados. Por esa razón, decidimos diseñar un proyecto de investigación en el que se explorara de manera sistemática el papel que pueden jugar estas herramientas didácticas en las concepciones de los profesores, en particular en su consciencia de la complejidad del contenido matemático a enseñar, de su aprendizaje y de su enseñanza.

Reunimos a un grupo de 30 profesores de matemáticas de secundaria de colegios oficiales del Distrito Capital. Algunos de estos profesores habían ya participado en uno o más de nuestros programas de formación permanente de profesores. Otros habían participado en otros programas de formación permanente ofrecidos por “una empresa docente” con esquemas diferentes de los mencionados arriba y otros trabajaban con nosotros por primera vez. Organizamos los 30 profesores en grupos de por lo menos dos y máximo seis profesores y desarrollamos un esquema de interacción estructurado en tres módulos: análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo. Cada módulo, que duró un mes, estaba compuesto de un seminario inicial, una interacción intermedia y un seminario final. En el seminario inicial nosotros presentábamos las ideas básicas del propósito del módulo y las tareas que esperábamos que ellos realizaran durante el mismo. En la segunda mitad de ese seminario los grupos de profesores realizaban un primer borrador de esa tarea. Dos semanas más tarde, cada uno de los grupos nos visitaba en nuestras oficinas y realizábamos una entrevista individual por grupo en la que el grupo nos presentaba el avance de su trabajo y nosotros reaccionábamos al mismo. Dos semanas más tarde nos reuníamos en el seminario final en el que cada grupo presentaba el resultado final de su trabajo a los compañeros. De esta forma, recogimos, para cada grupo tres producciones (seminario inicial, entrevista, seminario final) por módulo. En total, nueve producciones.

Estas producciones tuvieron a la función cuadrática como tema matemático. Las tareas de los profesores consistieron en producir el análisis de contenido (la descripción de la función cuadrática como contenido matemático a enseñar), el análisis de instrucción (la manera como este tema se ha enseñado) y el análisis cognitivo (la descripción de la manera como este tema se aprende). Estas descripciones debían hacerse utilizando una herramienta de análisis y organización, por un lado, y una herramienta de representación por el otro. La herramienta de análisis y organización eran los sistemas de representación: los grupos de profesores debían hacer sus descripciones teniendo a los sistemas de representación como elemento organizador. La herramienta de representación eran los mapas conceptuales: los grupos de profesores debían hacer sus descripciones utilizando mapas conceptuales. Los grupos de profesores podían además presentar ensayos que profundizaran en las ideas que proponían en sus mapas conceptuales y nosotros registramos la in-

formación que surgió de la interacción que tuvo lugar en las entrevistas y en los seminarios. Nuestra principal fuente de información fueron, en todo caso, los nueve mapas conceptuales (tres por cada módulo) que presentaron cada uno de los cinco grupos.

Como se aprecia en la descripción anterior, el análisis de instrucción era uno de los tres módulos que conformaron el esquema de interacción entre los profesores participantes y nosotros como investigadores. Con el propósito de motivar a los profesores participantes, dado que ellos no recibían ningún beneficio formal por su participación (e.g., créditos para el escalafón), y teniendo en cuenta que se buscaba hacer un análisis de la manera como se enseña el tema en la escuela, el proyecto preveía que el análisis de instrucción fuera realizado por los mismos profesores. Les propusimos entonces que, en este módulo, ellos serían los investigadores y nosotros seríamos pares que reaccionaríamos a su trabajo. Esta propuesta los motivó mucho y permitió que el módulo se realizara de acuerdo a lo previsto. Adicionalmente y para efectos del trabajo realizado con el análisis de contenido, el estudio y análisis de la manera como el tema se enseña en las matemáticas escolares, partiendo de diversas fuentes de información, les permitió a los profesores contrastar el trabajo previo que habían hecho en su mapa de contenido y complementarlo.

Para comprender la manera como los profesores realizaron su trabajo y la forma como nosotros codificamos y analizamos la información producida por ellos es necesario profundizar, al menos parcialmente, en los temas de mapas conceptuales, sistemas de representación y función cuadrática. Hacemos esta presentación en el siguiente apartado.

Marco conceptual¹

MAPAS CONCEPTUALES

Introducción

Los mapas conceptuales son una técnica para representar visualmente la estructura de la información. Es decir, los mapas conceptuales son un sistema de representación cuyas normas son relativamente sencillas (Lanzing, 1998): “los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos” (p. 2).

Aunque esta técnica de representación ha sido utilizada desde la Edad Media, se considera que Joseph D. Novak de la Universidad de Cornell fue el pionero en la utilización de los mapas conceptuales en la educación. El desarrolló esta técnica para determinar como ocurren los cambios en la comprensión conceptual de los estudiantes (Novak, 1990, p.937, citado en McGowen, 1998, p. 38).

Los mapas conceptuales se han utilizado de manera sistemática en la educación, particularmente como herramienta para describir el currículo y como herramienta de la instrucción.

Existe una técnica, relacionada a los mapas conceptuales, llamada “mapas mentales”. Esta técnica registrada por Buzan, requiere que los mapas conceptuales tengan una jerarquía: “un mapa mental consiste en una palabra o concepto central, alrededor del cual se dibujan de 5 a 10 ideas principales que se relacionan con esa palabra. Este proceso se puede después repetir para cada una de las palabras hijas, tantas veces como se quiera” (Buzan, 1995, citado por Lanzing, p. 4). Williams (1998) llama a estos mapas los “mapas araña”.

Como sistema de representación, los mapas conceptuales tienen dos ventajas importantes:

- Permite descripciones no lineales del objeto.
- Al tener un carácter gráfico, permite observar la estructura de la descripción.

Estas dos cualidades son muy importantes para la descripción de objetos matemáticos y su correspondiente discurso matemático. La estructura matemática no es lineal. Un mismo concepto (u objeto) está relacionado con muchos otros conceptos (u objetos). Y hay obviamente una noción de estructura que describe la manera como los conceptos se conectan unos con otros. Aunque estas son características bien conocidas de los objetos matemáticos y su correspondiente discurso, este último se hace, en general, dentro de un texto. Esto implica, por un lado, que la descripción tiene que ser lineal, y, por el otro, que no es posible ver “gráficamente” la estructura del discurso. Hay que deducirla de la lectura del texto. En consecuencia, en contraposición con la descripción textual, los mapas conceptuales resultan muy potentes para la descripción del discurso matemático y, como veremos más adelante, cuando se conjugan con la noción de sistema de representación, esta potencia se multiplica.

Mapas conceptuales como herramienta de investigación

En este estudio nos interesan los mapas conceptuales como herramienta de investigación. Esta no es una utilización innovadora de esta herramienta. De hecho los mapas concep-

¹. Presentamos aquí una versión parcial del marco conceptual propuesto en (Gómez y Carulla, 1999).

tuales se han utilizado frecuentemente de esta manera como medio para representar externamente las estructuras cognitivas de los individuos. Los reportes de McGowen (1998) y Williams (1998) enumeran una gran cantidad de estudios en matemáticas en los que se ha utilizado esta herramienta. Además, estas dos investigadoras arguyen, con base en los resultados de estos estudios, que ésta es una herramienta eficiente para estos propósitos.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Introducción

En esta sección presentamos algunas reflexiones sobre la noción de sistema de representación. Consideramos, en primera instancia, las diversas definiciones que existen sobre ella y asumimos nuestra posición para efectos de concretar el significado que le damos al término dentro del estudio. En seguida, analizamos la manera como pueden interactuar los sistemas de representación y los mapas conceptuales en la presentación del discurso matemático y de las actividades de las matemáticas escolares cuando se utilizan para describir un objeto matemático particular.

Significados de “sistema de representación”

El término “sistema de representación” tiene diferentes significados en la educación matemática. El grupo de trabajo sobre este tema en el PME ha producido cuatro posibles definiciones del término (Goldin y Janvier, 1998, pp. 1-2):

- una situación física externa estructurada, o un conjunto de situaciones estructuradas en un ambiente físico que pueden ser descritas matemáticamente o pueden interpretarse en el sentido de involucrar ideas matemáticas;
- un entorno lingüístico o un sistema de lenguaje, donde se formula un problema o se discute matemáticas, enfatizando las características sintácticas o semánticas;
- un constructo matemático formal, o un sistema de constructos, que pueden representar situaciones a través de símbolos o sistemas de símbolos y que generalmente satisfacen ciertos axiomas o se adaptan a definiciones precisas, incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos;
- una configuración cognitiva interna individual, o un sistema de tales configuraciones, que se deduce a partir de actuaciones o introspección, y que describen aspectos de los procesos de pensamiento matemático y de resolución de problemas.

La utilización que le daremos al término “sistema de representación” se acerca a las primeras tres definiciones². Buscamos utilizar los sistemas de representación para *representar* diferentes facetas de un objeto matemático y trabajamos con los sistemas de representación bajo el supuesto de que se ciñen a un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas en general y por el objeto matemático específico, en particular. Por estas razones, consideramos que la definición de Kaput (1992) sobre sistema de notación se adapta a nuestras necesidades. De acuerdo a esta definición, “un sistema de nota-

². Es evidente que estas tres primeras definiciones no son necesariamente coherentes entre sí. Es por esta razón que utilizamos, como eje central, la definición de Kaput (1992). No obstante, estas tres definiciones complementan la propuesta de Kaput. En particular, la primera definición permite introducir como sistema de representación al conjunto de fenómenos reales cuyo análisis puede requerir de un objeto matemático particular. Este no sería, en el sentido de Kaput, un sistema de representación, pero se acoge a la primera definición. Se podría llamar el sistema de representación de las aplicaciones. Nosotros lo hemos llamado (tal vez erróneamente) sistema de representación verbal. No nos referimos a la descripción verbal del objeto matemático, sino a la descripción de los fenómenos que involucran al objeto matemático en cuestión.

ción es un sistema de reglas para (i) identificar o crear caracteres, (ii) operar en ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523). Esta definición, que se acerca al segundo significado de Goldin y Janvier, le permite a Kaput describir las actividades matemáticas que tienen lugar en las matemáticas escolares, con base en la noción de sistemas de representación:

- transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un sistema particular, con o sin referencia a otros significados externos;
- traducciones entre sistemas de notación, incluyendo la coordinación de acciones a través de sistemas de notación;
- construcción y verificación de modelos matemáticos, lo que es equivalente a la traducción entre aspectos de una situación y conjuntos de notaciones; y
- la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o “entidades cognitivas” que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización.

DISCURSO MATEMÁTICO, MAPAS CONCEPTUALES Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Las matemáticas son un discurso acerca de las características de los objetos matemáticos y de sus relaciones. Este discurso se debe expresar en un lenguaje. Este lenguaje se basa en general en uno o más sistemas de representación. Esta es la razón por la cual la noción de sistema de representación es trascendental en la descripción de los objetos matemáticos y sus relaciones y por la cual esta noción puede constituirse en el eje organizador de los esfuerzos de descripción de estos objetos. El hecho de que la mayoría de las actividades matemáticas de la escuela pueda ser descrita en términos de sistemas de representación corrobora la potencia de esta noción.

En general, no es posible representar toda la complejidad de un objeto matemático en un único sistema de representación. La utilización de una variedad de sistemas de representación simultáneamente permite apreciar esta complejidad.

Introducimos entonces la noción de *elemento* dentro de un sistema de representación cuando se está describiendo un objeto matemático. Un *elemento* es

- una forma de representar un objeto matemático (e.g., una forma simbólica de la función cuadrática, un representante gráfico de la parábola, una descripción de una forma de construir geométricamente la parábola, una categoría de fenómenos que involucran la cuestión cuadrática) o
- una parte de esa forma de representar al objeto (el parámetro h en la forma canónica, el vértice en la representación gráfica).

Cuando el objeto matemático se representa en un mapa conceptual, un elemento puede estar identificado por una caja o un conjunto de cajas. En otras palabras, un elemento es un submapa que tiene significado matemático propio. En ese tipo de representación, los elementos están relacionados:

- con otros elementos dentro de la forma particular o dentro del sistema de representación en el que se encuentran;
- con otra representación de ese mismo elemento en otro sistema de representación;
- con un fenómeno que lo involucra; o
- tienen papás e hijos dentro de la estructura de relaciones.

La relación o conexión de elementos dentro de un mismo sistema de representación representa la transformación sintáctica de la primera actividad de Kaput. Estas transformaciones sintácticas permiten hacer la conexión entre dos o más elementos pertenecientes a un mismo sistema de representación. La relación entre un mismo elemento en dos sistemas de representación se refiere a las traducciones entre sistemas de representación a las que se refiere Kaput en su segunda actividad matemática. La relación de un elemento con un fenómeno tiene que ver con la tercera actividad matemática propuesta por Kaput. Finalmente, las actividades matemáticas a las que se refiere Kaput tienen que ver con estas relaciones o conexiones entre elementos. La relación de familia, insinúa la materialización que él menciona en su última actividad. Es la estructura la que muestra cómo un procedimiento (que transforma elementos) hace parte de una estructura más compleja. Desde la perspectiva de esta estructura más amplia, ese procedimiento se puede mirar como perteneciente a un concepto y ese concepto puede ser el objeto de otro procedimiento. En otras palabras, es posible considerar la problemática de la dualidad entre conceptos y procedimientos con base en los sistemas de representación y los mapas conceptuales.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Justificación

Debemos diferenciar el término “función cuadrática” del término “cuestión cuadrática”. El primero impone la visión funcional del objeto en cuestión, mientras que el segundo permite ampliar el objeto de estudio a aquello en lo se involucra el proceso de “elevar al cuadrado”. Desde esta perspectiva, la cuestión cuadrática aparece en múltiples ocasiones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. No obstante, este objeto matemático asume una presencia clara cuando se trata la ecuación cuadrática y la problemática de su resolución. Allí aparece uno de los temas clásicos de las matemáticas de la secundaria: la fórmula cuadrática. Otro lugar “clásico” en el que se trata la cuestión cuadrática es el teorema de Pitágoras, donde se hace necesario elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada. Hay otros momentos importantes en los que la cuestión cuadrática aparece en las matemáticas escolares. Por ejemplo, cuando se consideran las cónicas y sus gráficas. Finalmente, la función cuadrática tiene también un lugar preponderante, en segundo lugar únicamente con respecto a la función lineal. En resumen, la cuestión cuadrática es un tema que permea por una buena parte de las matemáticas de la educación media. ¿Cómo describir, en términos de Ruiz (1993), las invariantes esenciales de este objeto matemático desde la perspectiva de las matemáticas escolares?

Para describir un objeto matemático es necesario asumir una posición con respecto a la “ventana” que se quiere utilizar para hacerlo. En nuestro caso, hemos escogido dos dimensiones que determinan nuestra posición: los sistemas de representación y la aproximación funcional. En un apartado anterior ya justificamos la utilización de los sistemas de representación como eje organizador de la descripción de los objetos en las matemáticas escolares. Aquí podemos mencionar únicamente que esta dimensión permite introducir “orden” en la multiplicidad de elementos y relaciones que caracterizan un objeto matemático. Por el otro lado, utilizamos la visión funcional porque se ha reconocido a la noción de función como eje conductor de las matemáticas del último ciclo de secundaria (Leindhardt et al., 1990). La aproximación funcional no restringe el tipo de presentación que se puede hacer del objeto en cuestión. Sencillamente obliga a “ubicar” los elementos en una posición diferente de la que podrían tener si se utilizara otra aproximación (por ejemplo, las diversas manipulaciones simbólicas involucradas en la resolución de la ecuación cuadrática aparecen en diversos lugares de la descripción de la cuestión cuadrática, dependiendo de la visión que se asuma para hacer esta descripción).

Comenzamos entonces por identificar cinco sistemas de representación relevantes para la descripción de la función cuadrática: simbólico, gráfico, geométrico, numérico y verbal. En el sistema de representación simbólico encontramos cuatro formas simbólicas

(estándar, canónica, multiplicativa y de foco). Cada una de estas formas involucra una serie de parámetros que determinan características particulares de la función. Los parámetros se encuentran relacionados entre sí. La cuestión cuadrática, y en particular los conceptos y procedimientos relacionados con la ecuación cuadrática, aparecen en una de las formas simbólicas. Todas las características gráficas de la función cuadrática encuentran obviamente su expresión en el sistema de representación simbólico.

En el sistema de representación gráfico se hacen patentes otras características de la función cuadrática. Allí aparecen diversos elementos (puntos de corte con los ejes, eje de simetría, directriz, vértice, crecimiento, concavidad, etcétera) que permiten apreciar el papel de los parámetros mencionados en el párrafo anterior. Algunos de estos elementos de la representación gráfica adquieren aún más significado cuando se considera el sistema de representación geométrico. En este sistema de representación, es posible apreciar características de la función cuadrática desde la perspectiva de la construcción geométrica de la parábola. Esta construcción se puede hacer en el plano o en el espacio, siendo ésta última la construcción que da origen a todas las cónicas. En este sistema de representación se identifican otros elementos que aportan a la descripción del objeto.

Aunque la representación numérica es muy utilizada en las matemáticas escolares, su carácter discreto restringe la descripción de un objeto visto desde la dimensión funcional. En todo caso, en esta representación es posible apreciar algunas de las características y elementos identificados en las representaciones simbólicas, gráficas y geométricas. Por el otro lado, el sistema de representación verbal nos permite introducir el análisis fenomenológico de la función cuadrática³. Esto es, la diversidad de fenómenos en los que este concepto está involucrado. Allí se encuentran fenómenos propios de la física (como la caída de cuerpos y la optimización de áreas), de la ingeniería (como las antenas parabólicas, las lámparas y los lentes) y propias de lo numérico.

La descripción anterior muestra el alto nivel de complejidad de la función cuadrática como objeto de enseñanza en las matemáticas escolares. Su tratamiento simbólico involucra diversas formas; su tratamiento gráfico es rico en elementos y relaciones; su tratamiento geométrico presenta diversas aproximaciones a su construcción; y es un objeto que se encuentra involucrado en gran número de fenómenos de diversos tipos. Toda esta riqueza se multiplica cuando se tiene en cuenta que cada elemento de un sistema de representación se encuentra relacionado con otros elementos en otros sistemas de representación, y que existen múltiples conexiones dentro de cada uno de estos sistemas.

MAPA CONCEPTUAL DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

En este apartado introducimos el mapa conceptual que nosotros, como investigadores, realizamos de la función cuadrática. Iniciaremos con la descripción de la manera como los sistemas de representación ayudaron a caracterizar las categorías organizadoras del mapa conceptual y terminaremos con la presentación del mapa.

Sistemas de representación

Dada la función cuadrática tomamos en cuenta para su descripción aquellos conceptos que aparecen en el saber escolar colombiano. Por lo tanto, no tuvimos en cuenta conceptos como transformaciones geométricas en el plano, ni teoremas y resultados generales comunes a todas las funciones polinómicas (aunque muchas de las características de la función cuadrática están ligadas a ellas), ni tuvimos en cuenta el concepto de comparación entre funciones, por considerarlo de carácter general y no específico a la función

³. En una nota de pie de página anterior ya hicimos algunas aclaraciones sobre este sistema de representación. Lo presentamos como un sistema de representación de carácter diferente a los demás (dado que no es posible identificar las normas que lo rigen en el sentido de Kaput (1992)). Por otro lado, el nombre que le hemos dado a este sistema de representación es un poco desafortunado. Debimos llamarlo “aplicaciones” o algo similar. No hemos cambiado el nombre porque éste fue el que utilizamos en la interacción con los profesores y sus producciones lo denominan de esta manera.

cuadrática. Tampoco incluimos descripciones relacionadas con el cálculo diferencial e integral. Una vez identificados los conceptos que íbamos a tener en cuenta para el mapa, definimos cinco categorías para su descripción. Cada categoría posee un lenguaje propio con una sintaxis propia que provienen de unos campos matemáticos específicos. Estas categorías son los sistemas de representación y cada una de ellas será un submapa. A continuación presentaremos las características principales de la función cuadrática y definiremos cada uno de los cinco sistemas de representación.

Simbólico (S)

El lenguaje utilizado, en este sistema de representación, es el propio del campo algebraico y las reglas que lo sustentan son las de la estructura algebraica de los números reales. Este sistema de representación se organizó de acuerdo con las 4 formas simbólicas que representan la función cuadrática (estándar, canónica, multiplicativa y foco). Para cada una de ellas se analizó el significado de cada uno de los parámetros con el fin de describir las características de la función. Los parámetros nos permiten describir aspectos como crecimiento, decrecimiento, concavidad, puntos críticos, máximos, mínimos y raíces. Por otro lado se describió la relación de equivalencia entre las diferentes formas simbólicas explicitando los procesos algebraicos (traducciones sintácticas) que permiten transformar unas expresiones en otras. Por ejemplo, para pasar de la forma estándar a la canónica se utiliza la completación de cuadrados.

Gráfico (GR)

Cuando hablamos del sistema de representación gráfico, hacemos referencia a la representación en el plano cartesiano. Por consiguiente, el lenguaje y las reglas sintácticas son las del plano cartesiano. En el mapa se encontrarán gráficas y frases que hacen referencia a lo gráfico. Aquí no se incluyen representaciones como la recta numérica o balanzas o muñecos que para otros temas matemáticos pueden jugar un rol importante y habría que especificarlos. Este sistema cuenta con dos submapas, uno que describe los elementos gráficos de la función cuadrática y sus características como foco, directriz, segmento focal, parábola y gráfica. El otro que, a partir de la noción de familia, describe el rol de los parámetros con respecto a la gráfica de la función en donde se hace una conexión implícita entre los parámetros de las formas simbólicas y sus efectos en las gráficas.

Geométrico (G)

El lenguaje que se utiliza en este sistema de representación es el de la geometría. Los conceptos aquí descritos son geométricos. Aunque en este sistema de representación también se pueden hacer gráficos, se diferencia con el anterior porque no estamos dotando al plano del sistema de referencia cartesiano. Como se puede ver en el mapa, tanto en el sistema gráfico como en el geométrico se encuentran descritas características geométricas pero en lenguajes diferentes. Esta representación tiene dos submapas, uno que describe la construcción de la parábola en el plano de tal manera que se puede ver el rol del vértice y la directriz en la construcción de la parábola y el otro que describe la construcción en el espacio presentando la parábola como una cónica.

Numérico (N)

En este sistema de representación hablamos de los valores numéricos de la función. Se pueden representar los valores de diferentes formas. Por un lado, valores específicos para un x determinado; y, por el otro, agrupaciones en tablas para diferentes valores de la función. Al dar valores a la función estamos en una representación discreta. Nuestro mapa se divide en dos submapas. Uno en el que se describe, en términos generales, lo que es una tabla de valores para la función cuadrática, y otro en que se destacan los valores especiales de la función cuadrática. Estos valores especiales son, por ejemplo, aquellos donde se anula la función, la imagen de cero o la imagen de h .

Verbal (V)

El significado que dimos a este sistema tiene que ver con la manera como, a partir del lenguaje común, podemos representar situaciones tanto del mundo real como del mundo de las matemáticas, para las cuales el modelo que las describe es la función cuadrática o conceptos ligados a ella. Estas situaciones pueden ser modeladas en cualquiera de los otros sistemas de representación.

El mapa

La construcción del mapa tuvo diferentes etapas. En la primera se identificaron los sistemas de representación y se determinó lo que los caracterizaba junto con los elementos que deberían ir en ellos. En la segunda etapa se fue describiendo la función cuadrática y discutiendo sobre la mejor manera de organizar la información. El trabajo con los maestros y sus mapas fueron de gran ayuda para este proceso. Aunque en algunas versiones intermedias figuran elementos de los mapas de los maestros, que en su momento nos parecieron importantes, la versión final presenta esa información pero organizada de manera diferente. Es el caso por ejemplo de una tabla de relación entre parámetros que hizo uno de los grupos y que en un principio incluimos en nuestro mapa pero que después terminó siendo el submapa de las relaciones entre las diferentes formas simbólicas.

El mapa quedó organizado por los cinco sistemas de representación anteriormente descritos. Por otro lado, nuestro mapa presenta diferentes tipos de conexiones. Dado que el mapa completo no lo podemos poner en una sola hoja, se codificaron las uniones del mapa mediante una caja marcada con la inicial del sistema de representación y el número de la unión. Las conexiones implícitas se ven cuando, por ejemplo, en el sistema de representación numérico o en el gráfico utilizamos los parámetros de las formas simbólicas. Las conexiones entre diferentes sistemas de representación se presentan en cajas de forma no rectangular con flechas. La caja lleva el nombre de la inicial del sistema de representación de donde sale la conexión y la inicial de Otros para indicar la conexión con otros sistemas de representación (SO, GO, GRO, VO o NO). Cuando la conexión es interna, ésta se codifica con la doble inicial del sistema de representación de donde ella sale y entra (SS, GG, GRGR, VV o NN).

Los mapas de referencia mencionados en este apartado se encuentran en el anexo 2 de este documento.

Problema

El problema al que enfrentamos a los profesores consistía en describir la manera como se enseña el tema de la función cuadrática en las matemáticas escolares. Ellos debían hacer este trabajo basándose en una serie de herramientas didácticas que venían utilizando dentro del proyecto. En particular, se esperaba que ellos utilizaran sus mapas conceptuales como herramienta de codificación de la información. Recordemos, por otro lado, que estos mapas conceptuales del contenido matemático estaban organizados con base en los sistemas de representación. Los profesores tenían la posibilidad de complementar esta codificación con textos adicionales.

Acordamos con los profesores reducir a un mínimo la complejidad de esta codificación y descripción. Por esa razón, les sugerimos que se centraran en la identificación de la secuencia con la que los elementos de su mapa (o del mapa complementado) eran vistos por cada una de las fuentes de información y en la manera como esa fuente manejaba los sistemas de representación.

Por nuestra parte, nuestro problema, como asesores de este proceso, consistía en recoger la información producida por los profesores, codificarla y analizarla, con el propósito de caracterizar la enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares.

A continuación describimos el procedimiento utilizado por los profesores y por nosotros, como asesores, para llegar a los resultados que se presentan más tarde.

Procedimientos

TRABAJO DE LOS PROFESORES

Como describimos en un apartado anterior, el módulo de instrucción era el segundo módulo de los tres que conformaron el esquema de interacción con los profesores. Describimos a continuación la organización general de este proceso⁴.

Esquema de interacción y trabajo con los profesores

Dado que este no era un programa formal de desarrollo profesional, la inscripción de los profesores en el proyecto no siguió el esquema tradicional que utilizamos para estos efectos. Contactamos a los profesores que han participado recientemente en nuestros programas de formación permanente de profesores de matemáticas y los invitamos a una reunión. En esta reunión les describimos los propósitos y el esquema de trabajo que pensábamos desarrollar. En esta descripción se insistió en que el proyecto no era de desarrollo profesional, sino de investigación y que ellos serían la principal fuente de información para el estudio. Por lo tanto, los profesores no recibirían beneficios formales (como créditos en el escalafón docente). El principal beneficio de su participación era la vivencia de la experiencia misma y lo que esto les podría aportar. Motivamos a los profesores indicándoles que éste sería un proyecto de investigación *conjunto* en el que, además de ser fuente de información, ellos también asumirían el papel de investigadores en una de las fases del estudio.

El compromiso que los profesores debían asumir era importante. Por un lado, se comprometían a asistir a los seis seminarios que duraban cuatro horas cada uno y a las tres entrevistas por grupo, de una hora cada una. Por el otro, se comprometían a trabajar durante los tres meses, reuniéndose en grupos y produciendo los documentos que se les pediría en cada ocasión. Se necesitaba además que los directivos de su institución escolar estuvieran de acuerdo con su participación en el proyecto. Logramos conformar un grupo de 30 profesores que estaban interesados en ser parte del proyecto.

Esquema de trabajo

Dados los propósitos del estudio, nosotros buscamos que el esquema de trabajo con los profesores “simulara” los principales aspectos de nuestros programas de formación permanente de profesores. Estos aspectos se refieren a dos dimensiones: el contenido y la interacción. La dimensión de contenido se debía caracterizar por centrarse en un tema matemático específico (en este caso, la función cuadrática); por tratar ese contenido matemático con la aproximación del análisis didáctico (análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo); por tomar los sistemas de representación como eje organizador del tratamiento del contenido matemático; y por utilizar los mapas conceptuales como herramienta descriptiva. La dimensión de interacción se debía caracterizar por buscar que los profesores produjeran su trabajo en grupo; por crear espacios de socialización de las producciones de los profesores; y por crear espacios de interacción individual entre los grupos de profesores y nosotros, como investigadores. Con base en estos principios, el esquema de trabajo se realizó como se tenía previsto en el diseño original. Lo describimos brevemente a continuación.

Los profesores se organizaron en grupos de acuerdo a sus afinidades y a la facilidad con que ellos podrían reunirse periódicamente para realizar el trabajo. Algunos grupos tenían varios profesores de una misma institución. Cada uno de los grupos tuvo que realizar

⁴ Esta es la misma descripción que se presenta en (Gómez y Carulla, 1999)

una serie de actividades relacionadas con el análisis didáctico de la función cuadrática. Estas actividades buscaban crear un espacio de trabajo en el que se produjera una serie de documentos y se realizara una serie de reuniones y de entrevistas. Las actividades estuvieron compuestas por “módulos”. Cada módulo tuvo la misma estructura y correspondió a un tema diferente. Los temas fueron: análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo.

La estructura de cada módulo estuvo compuesta de un seminario inicial, una entrevista de cada grupo con los investigadores y un seminario final. En el seminario inicial de cada módulo se hizo una presentación del propósito del módulo y se le pidió a los grupos de profesores que hicieran una primera aproximación al trabajo correspondiente. Por ejemplo, en el caso del módulo sobre análisis de contenido, al inicio de la reunión se introdujo el propósito del mismo, se presentó la función cuadrática como tema matemático, y se recordaron las principales características de los mapas conceptuales y de los sistemas de representación. En seguida, se pidió a cada grupo de profesores que produjeran un primer mapa conceptual del análisis de contenido para la función cuadrática. Esto produjo un documento (mapa conceptual) que fue utilizado como fuente inicial de información para este aspecto del proyecto. En seguida, se pidió a los grupos de profesores que, durante las siguientes dos semanas, se reunieran por su cuenta, y que trabajaran en la producción de una mejora de ese mapa conceptual. Esto produjo un segundo documento que ellos trajeron a una entrevista en la que el grupo presentó a los investigadores el fruto de su trabajo y justificaron su contenido. Este segundo documento y el registro de los comentarios de los profesores durante esta segunda entrevista fueron dos fuentes de información intermedias. Los investigadores reaccionamos a este trabajo y le pedimos a cada grupo de profesores que mejoraran su trabajo para ser presentado en el seminario final del módulo. Allí cada grupo entregó una versión final de su trabajo y se hizo una puesta en común del trabajo de todos los grupos. Este documento final y la discusión producto de la puesta en común fueron las fuentes finales de información para el módulo correspondiente.

El proceso anterior se realizó para cada uno de los tres módulos: análisis de contenido, análisis de instrucción y análisis cognitivo. El módulo de análisis de instrucción se trabajó de una manera particular, pues en él, los profesores asumieron el papel de investigadores, explorando, con base en el trabajo previo del módulo de análisis de contenido, la forma como se enseña el tema en cuestión. Se hizo una reunión final con los profesores después de la finalización del tercer módulo.

Módulo de análisis de instrucción

Cuando se inició este módulo, los grupos de profesores ya habían producido tres versiones diferentes de su mapa de contenido. El propósito de este módulo era el de describir, a partir de diversas fuentes de información, la manera como se enseña el tema en el ámbito de las matemáticas escolares.

En el primer seminario, los asesores describieron el problema y motivaron una discusión acerca del problema de describir la instrucción de tema matemático particular. Se describió la problemática general del concepto de currículo y, en particular del diseño y el desarrollo curricular a nivel micro.

Recolección y codificación de la información

Se sugirió que había diferentes fuentes posibles de información. Entre ellas:

- libros de texto,
- documentos oficiales,
- experiencia de colegas y
- la propia experiencia.

Los profesores quedaron en la libertad de escoger sus fuentes de información, aunque se esperaba que cada grupo produjera información de por lo menos tres fuentes diferentes.

Dado que la mayoría de las fuentes de información no tendrían la “forma” de un diseño curricular, se decidió escoger, de los diferentes aspectos del currículo, aquellos que pudieran representarlo de mejor manera, teniendo en cuenta la información disponible. Por esa razón, se decidió tener en cuenta los objetivos y la secuencia de temas con la que la fuente presenta el tema (ya sea en el libro de texto, o, por ejemplo, en la descripción de un colega acerca de la manera como trata el tema). Puesto que este grupo de profesores venía trabajando con los sistemas de representación, se sugirió que ellos sirvieran como eje organizador de la codificación de la información.

Para la codificación misma, los grupos de profesores utilizaron los mapas conceptuales de contenido que habían producido en el módulo anterior. Esto les permitió tener un esquema común para recoger y codificar la información. Este instrumento permitió tener un mapa conceptual para cada fuente de información. En este mapa, el grupo de profesores marcaba cada uno de los elementos abordados por la fuente de información y lo identificaba dentro de la secuencia.

En algunos casos, los profesores utilizaron un mismo mapa para varias fuentes de información (por ejemplo, los libros de texto) e hicieron sus marcas con diferentes colores. Esto permitió identificar los elementos comunes a las diversas fuentes y aquellos elementos que eran propios de una sola fuente. Adicionalmente, cada grupo de profesores produjo un texto en el que registró información adicional que no podía ser codificada en los mapas y presentó opiniones sobre cada una de las fuentes.

En el anexo 1 presentamos un ejemplo de un conjunto de mapas producido por uno de los grupos de profesores. Con el reporte (Gómez y Carulla, 1999) se adjuntaron todos los mapas de los profesores.

TRABAJO DE LOS ASESORES

Los asesores nos encontramos entonces con un grupo de diez mapas conceptuales (dos por grupo) codificados de acuerdo al procedimiento descrito en la sección anterior. Adicionalmente teníamos un grupo de documentos que complementaban la información codificada en los mapas.

Dado que nuestro propósito central era el de analizar el trabajo producido por los profesores, para efectos de caracterizar la instrucción de la función cuadrática en las matemáticas escolares, y dado que teníamos una gran cantidad de información, nuestro trabajo consistió en diseñar un instrumento que nos permitiera describir de manera resumida y organizada la información que teníamos disponible.

Para ello, decidimos hacer un primer análisis de la información con el propósito de tener una idea general de su contenido. Muy rápidamente vimos que las descripciones provenientes de las diferentes fuentes eran muy similares e involucraban un número bastante reducido de los elementos descritos en los mapas conceptuales. Esto nos permitió identificar estos elementos para efectos de organizar la información. A continuación los describimos brevemente, organizándolos por sistemas de representación. Estos elementos se encuentran identificados en los mapas de referencia de la función cuadrática que se presentan en el anexo 2.

Categorías de análisis

Sistema de representación simbólico	
<i>Forma canónica</i>	La forma canónica de representar la función cuadrática, $f(x) = a(x-h)^2 + k$
<i>Forma estándar</i>	La forma estándar de representar la función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$. En algunas ocasiones se consideran casos particulares y se mira como suma de una función de área, una función lineal y una función constante (ver abajo)
<i>Suma de funciones</i>	El hecho de mirar la forma canónica como una suma de funciones (punto anterior). Se analiza el caso básico (x^2), para después agregar los otros elementos
<i>Polinomio 2ª grado</i>	Se mira la función cuadrática desde la perspectiva del estudio de polinomios
<i>Casos particulares</i>	Se estudian casos particulares de la función cuadrática (en algunos casos este punto se relaciona con el procedimiento de la suma de funciones descrito arriba)
<i>Forma x^2</i>	Ya se mencionó arriba. En algunas ocasiones se parte de esta forma para estudiar las traslaciones
<i>Formas incompletas</i>	Relacionado con los anteriores. Por ejemplo, el análisis de funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$
<i>Dilatación</i>	Análisis del parámetro a en las formas estándar y canónica
<i>Ecuación cuadrática</i>	Trabajo con la ecuación cuadrática y su resolución por medio de la fórmula cuadrática
<i>Factorización</i>	Procedimiento para hallar ceros de la función
<i>Completación cuadrados</i>	Procedimiento para pasar de la forma estándar a la forma canónica
<i>Discriminante</i>	Elemento del procedimiento de la fórmula cuadrática para caracterizar las soluciones de la ecuación cuadrática
Sistema de representación gráfico	
<i>Proviene de tabulación</i>	El trabajo de las gráficas se hace con base en la tabulación
<i>Producción por traslaciones</i>	El trabajo de las gráficas se hace con base en traslaciones y dilataciones
<i>Raíces</i>	Identificación y/o análisis de las raíces de la gráfica
<i>Concavidad</i>	Identificación y/o análisis de la concavidad de la gráfica
<i>Eje de simetría</i>	Identificación y/o análisis de la gráfica
<i>Vértice</i>	Identificación y/o análisis del vértice de la gráfica
<i>Traslaciones</i>	Trabajo con traslaciones y dilataciones de la gráfica
<i>Máximos y mínimos</i>	Identificación y/o análisis de máximos y mínimos de la gráfica
<i>Crecimiento</i>	Análisis del crecimiento de la gráfica
Sistema de representación numérico	
<i>Viene de simbólico</i>	El trabajo en lo numérico parte de la representación simbólica
<i>Pasa a gráfico</i>	El trabajo en lo numérico sirve de base para la producción de la gráfica

Aplicaciones	
<i>Area</i>	Problemas de área
<i>Movimiento parabólico</i>	Problemas de movimiento parabólico
<i>Proporción áurea</i>	Un grupo mencionó este tema

Procedimiento de codificación

Con base en las categorías anteriores y a partir de los documentos (mapas y texto) presentados por los profesores, produjimos una tabla (que se presenta en el apartado siguiente) cuyas columnas contienen las categorías y las filas cada una de las fuentes de información. Para cada una de las fuentes de información identificamos aquellas casillas en las que la fuente trataba el tema correspondiente y codificamos con un número la secuencia de tratamiento de las mismas. En los casos en los que dos o más casillas tienen el mismo número, esto significa que los temas se presentan conectados y se tratan con algún grado de simultaneidad.

Resultados

La tabla 1 presenta los resultados del proceso de codificación descrito en el apartado anterior.

		Simbólico												Gráfico							Num.	Aplicación					
		Forma canónica	Forma estándar	Suma de funciones	Polinomio 2º grado	Casos particulares	Forma x^2	Formas incompletas	Dilatación	Ecuación cuadrática	Factorización	Completación de cuadrados	Discriminante	Proviene de tabulación	Producción por traslaciones	Rasgos	Concavidad	Eje de simetría	Vertice	Traslaciones	Máximos y mínimos	Crecimiento	Viene de simbólico	Pasa a gráfico	Área	Movimiento parabólico	Proporción a área
Grupo 1																											
	Oficial 1	4	3	3						5									1	2						1	
	Colega 1		1		3					4			5			4	2										
	Colega 2		1							4			5							3			2				
	Texto 1	6	5			7				8					9			3	4					2		1	
	Texto 2	6	7			6				8					5	8		3			4			2	1	9	
Grupo 2																											
	Colegas		1							4	5	5											2	3			
	Texto 3		1							3	5									2						6	6
	Texto 4	2	1				1									1	1						1	1	2	2	2
Grupo 3																											
	Texto 5	3	1						3						6		3	4	5					2	3		
	Texto 6	3	1	1						5							4	4	4							2	
Grupo 4																											
	Texto 7	6	2					4	3	9	9	9					5			7	8						1
	Texto 8		2		1		7		3			10				12	3	8	6	11	9			4	5	11	11
	Experiencia	1	1							4			4	3		4							2		5	5	
Grupo 5																											
	Texto 9		1	1	3	3				5						2	5	2		4						6	6
	Texto 10		1							4			5	3									2				
	Texto 11		6							1	2	3	4								7					5	5
	Oficial 2		1	1						4				3									2		5	5	
	Oficial 3		2	4						4			5	3									2		1	1	

Tabla N° 1. Resultados de la codificación

ANÁLISIS

El análisis de la tabla anterior nos permite identificar algunas características básicas de la instrucción de la función cuadrática en las matemáticas escolares. Hacemos este análisis considerando primero factores generales y estudiando después características particulares dentro de cada uno de los sistemas de representación.

CARACTERIZACIÓN GENERAL

El primer factor que hay que destacar es el número reducido de elementos que se tienen en cuenta cuando se enseña la función cuadrática en la escuela. Basta comparar la segunda fila de la tabla (y la tabla 1 presentada en el apartado anterior) con los mapas de referencia (anexo 2) para identificar una gran brecha entre la riqueza potencial del tema dentro de las matemáticas escolares y lo que realmente se considera en su instrucción.

Aunque hay diferencias entre las diferentes fuentes de información⁵, encontramos una gran cantidad de puntos de encuentro en la manera como las diferentes fuentes de información se aproximan al tema. Las diferencias tienden a aparecer en el nivel de detalle con que se tratan algunos aspectos, pero estas diferencias no parecen provenir de aproximaciones diferentes a la enseñanza y el aprendizaje del concepto matemático. Esta aproximación se puede caracterizar con base en varios factores:

- el trabajo se centra en la ecuación cuadrática y en los procedimientos para su resolución;
- el análisis simbólico se restringe casi que exclusivamente a la forma estándar;
- el análisis gráfico tiende a identificar algunos de los elementos de la gráfica, pero no establece conexiones funcionales con los otros sistemas de representación;
- el sistema de representación numérico sirve principalmente de puente entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico; y
- el sistema de representación de aplicaciones sirve, en algunos casos, como motivación y, en la mayoría de los casos, como finalización, aunque su utilización parece restringirse a fenómenos que se pueden modelar con la ecuación cuadrática.

Es posible intuir una secuencia más o menos generalizada en el tratamiento del tema. Esta secuencia parte de la forma estándar (cuando se comienza por las aplicaciones, esto se hace por razones de motivación), pasa a lo numérico como puente para producir la gráfica, se analizan algunos elementos de la gráfica y se regresa a lo simbólico para, en algunos casos considerar la forma canónica y, en todos los casos, considerar en detalle la problemática de la resolución de la ecuación cuadrática. En algunos casos se regresa a la gráfica para interpretar los resultados de estos procedimientos. Se termina en el estudio de fenó-

⁵. Y, de hecho, hay diferencias en las codificaciones de diferentes grupos para una misma fuente de información. No consideramos que estas diferencias (aunque implican deficiencias del proceso de codificación) fueran relevantes para el análisis final. Adicionalmente, esta circunstancia era un factor condicionante del trabajo que nosotros, como asesores, podíamos realizar. Debíamos trabajar sobre la información entregada por los profesores y no era posible reformular el instrumento y pedirles que repitieran el procedimiento.

menos que se pueden modelar con la ecuación cuadrática. Una simplificación de esta secuencia se presenta en la figura 1.

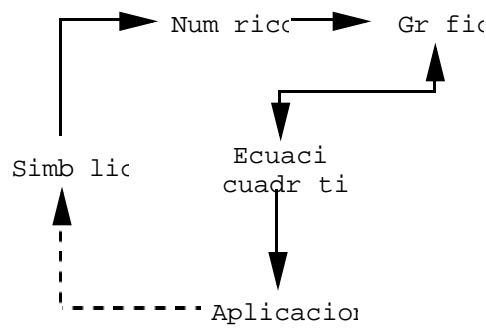


Figura N° 1. Secuencia de instrucción

Este tipo de secuencia parece centrar la aproximación a la función cuadrática en los aspectos simbólicos y procedimentales. Este es un punto importante que se corrobora con lo que nosotros encontramos en la exploración de las concepciones de los profesores (Gómez y Carulla, 1999). Allí percibimos que, para la mayoría de los grupos de profesores, la “cuestión cuadrática” estaba directa y principalmente relacionada con la problemática de la ecuación cuadrática. Inversamente, esta situación se explica ahora cuando encontramos que los libros de textos y algunos documentos oficiales se aproximan al tema de esta manera.

Otra característica importante de la instrucción es la existencia de un número muy reducido de conexiones entre los sistemas de representación (aspecto que también se corroboró en el estudio que se acaba de mencionar). Las conexiones tienden a girar alrededor de la ecuación cuadrática y entre los sistemas de representación simbólico, gráfico y numérico. Por un lado, la poca atención que se da a la forma canónica y la inexistencia de las formas multiplicativa y de foco (ver mapas, anexo 2) es una evidencia de este punto. No parece haber ningún tipo de análisis interconectado de los parámetros de las diversas formas simbólicas. Por el otro, tampoco puede haber un análisis de la relación entre los parámetros y, menos aún, dado que no aparece, de los significados de la parábola como construcción geométrica. Esta falta de conexión entre los sistemas de representación es clave para la comprensión (Hiebert y Carpenter, 1992; Kaput, 1992). Este y otros de los aspectos mencionados hasta ahora son confirmados por los profesores en sus textos:

Lo propuesto en los textos, no es suficiente para garantizar la obtención de los logros que se plantean. Del tema se trabajó muy poco, tanto en los textos, como en las clases, por parte del profesor. Se dictan los conceptos desligados. Se hace mayor énfasis en una de las representaciones simbólicas (general) y otras se ignoran. De las expresiones simbólicas que se estudian, no se profundiza en ellas, ni se relaciona con las otras expresiones y representaciones.

La mayoría de los docentes empiezan con la función cuadrática con la representación simbólica $y=ax^2$; pasan a la tabular y gráfica. En la representación gráfica se hace un análisis donde se observan las características y elementos de la parábola y se repite el ciclo para $y=ax^2+bx+c$. Para $y=ax^2$ el vértice se da y observa claramente y en $y=ax^2+bx+c$, se resalta el vértice gráficamente, pero no se completa el cuadrado, o si se completa no se adquiere destreza en esa parte algebraica.

En ninguno estudian las cinco representaciones. Hay mayor énfasis en la parte simbólica. Trabajan máximo dos clases de parametrización. Hay bastante énfasis en la deducción y la aplicación de la fórmula general para hallar las raíces de la ecuación de segundo grado.

Toda esta situación parece tener una explicación, cuando se analiza la manera como los documentos oficiales sugieren la enseñanza de la función cuadrática. Uno de los grupos de profesores presentó los objetivos para la función cuadrática en un documento oficial de la siguiente manera:

“reconocer las funciones cuadráticas; reconocer que toda función cuadrática puede expresarse como la adición de una función de área, una función lineal y una función constante; representar gráficamente funciones cuadráticas; resolver ecuaciones cuadráticas; hallar aproximaciones por exceso y por defecto de raíces cuadradas; plantear situaciones en las que los cambios se descubran apropiadamente con una función cuadrática; resolver y formular problemas relacionados con funciones cuadráticas”.

ANÁLISIS POR SISTEMA DE REPRESENTACIÓN

Sistema de representación simbólico

El área de la tabla en la que se codifica la información relacionada con el sistema de representación simbólico presenta algunos puntos que son importantes de resaltar. Como ya se mencionó, el tratamiento simbólico se encuentra centrado en la forma estándar y en el manejo procedimental de la solución de la ecuación cuadrática. La mayoría de las secuencias comienzan por la forma estándar (las que no lo hacen toman una aplicación como tema de motivación para hacerlo). Esta importancia relativa que se le da a la ecuación cuadrática se expresa en las concepciones de los profesores, como se mencionó en la sección anterior.

Sorprende particularmente la frecuencia con la que se encuentra, en diversas fuentes de información, el tratamiento de la función cuadrática como suma de una función de área, una función lineal y una función constante. Aunque esta aproximación tiene algo de sentido desde la perspectiva matemática, es difícil encontrar una justificación cognitiva para ello. En particular, el significado del término lineal es bien difícil de describir y requiere de una conexión explícita con el sistema de representación gráfico (Craine, 1996). Sin embargo, esto se explica con las sugerencias de los documentos oficiales (ver cita en la sección anterior).

Muy pocas aproximaciones⁶ parten de la forma básica ($f(x)=x^2$) para estudiar traslaciones y dilataciones con base en la forma canónica. Esta aproximación permite construir una forma alternativa de producir la gráfica y genera una relación explícita entre los parámetros de esta forma y su significado gráfico (Gómez et al., 1996). En este sentido, el análisis del parámetro a no parece estar relacionado con el análisis de crecimiento que algunas fuentes hacen dentro del sistema de representación gráfico.

Sistema de representación gráfico

En general se llega a lo gráfico a través del sistema de representación numérico. Es decir, la gráfica se produce a partir de un conjunto de parejas, producto de reemplazar valores de x en alguna de las formas simbólicas. En este sistema se identifican algunos de sus elementos y características (vértice, eje de simetría, concavidad, raíces y crecimiento), pero sorprende que no hay ninguna referencia al foco. Esto puede ser consecuencia de la inexistencia del sistema de representación geométrico (ver mapas, anexo 2) y, por consiguiente, de la inexistencia de una referencia a las construcciones geométricas de la parábola (en el plano y en el espacio –cónicas–).

Como ya se mencionó, se hace muy poco trabajo con transformaciones (dilataciones y traslaciones verticales y horizontales) razón por la cual no es posible establecer la relación de los elementos gráficos con los parámetros del sistema de representación simbólico.

⁶. De hecho, con la información que se tiene, parece que ninguna.

Sistema de representación numérico

El papel de este sistema de representación es sencillo: sirve de puente entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico dentro de la tradición de producir las gráficas de las funciones por medio del procedimiento de tabulación. Esta parece ser una característica de la instrucción en las matemáticas escolares y podría ser el punto de quiebre para una conexión más intensa entre los sistemas de representación. El trabajo por transformaciones que se describió en la sección anterior puede convertirse en un catalizador de la relación entre sistemas de representación.

Aplicaciones

Las aplicaciones tienen dos propósitos. Por un lado, servir, en algunos casos, de motivación para la introducción de tema. Y, por el otro, ser el punto final del proceso para la “aplicación” de las herramientas matemáticas tratadas. En este sentido, sorprende que la mayoría de las aplicaciones mencionadas se refieran exclusivamente a resoluciones de la ecuación cuadrática y consideren solamente parcialmente problemas de optimización o fenómenos que requieran modelaje involucrando al foco.

Conclusiones

Este proyecto tenía como propósito caracterizar la enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del Distrito Capital con base en el trabajo de un grupo de profesores que participó en un proceso de análisis didáctico, utilizando las herramientas de los mapas conceptuales como medio de representación y los sistemas de representación como eje organizador. Los profesores analizaron diversas fuentes de información entre las que se encontraban libros de texto, documentos oficiales, entrevistas con colegas y la propia experiencia. Los profesores entregaron dos tipos de documentos con sus hallazgos: un conjunto de mapas conceptuales en los que, para cada fuente de información analizada, codificaron los elementos tratados por ella y la secuencia en la que se hacían; y un conjunto de documentos en los que complementaban la información anterior. Nosotros, como asesores, analizamos esta información, identificamos un conjunto reducido de elementos de los mapas de referencia que describían la información y la codificamos en una tabla en la que es posible comparar las diversas fuentes de información. El análisis de esta tabla nos mostró que existe gran similitud entre las diferentes fuentes de información. Por esa razón, es posible caracterizar la enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares como una que está basada en una visión principalmente simbólica y procedimental; que gira alrededor de las técnicas para la resolución de la ecuación cuadrática; que contempla esencialmente la forma estándar; que utiliza el sistema de representación numérico como puente entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico; que identifica algunos de los elementos de la gráfica, pero no estudia la parábola como construcción geométrica; que se restringe a unos pocos fenómenos que pueden ser modelados con la ecuación cuadrática; y que, por las razones anteriores, no establece conexiones entre los diferentes sistemas de representación.

Somos conscientes de que el proceso de recolección, codificación y análisis de la información deja que desear, puesto que habría sido posible utilizar instrumentos de codificación y análisis más sofisticados que permitieran un mayor detalle y una mejor calidad de los análisis. Desafortunadamente, el diseño del proceso permitía una única fase de codificación y análisis, dado que ésta era la segunda de una sucesión de tres fases del trabajo de los profesores. Nosotros, como asesores, nos vimos, por consiguiente, obligados a trabajar con la información disponible. Como consecuencia de lo anterior, no es posible justificar plenamente la validez de los resultados encontrados desde el punto de vista metodológico. No obstante, la uniformidad de los resultados encontrados por diferentes grupos de profesores y en diferentes fuentes de información y el número reducido de elementos que fue necesario utilizar para caracterizar la información nos induce a pensar que los resultados presentados aquí son un reflejo suficientemente válido de la realidad.

La descripción que hicimos al comienzo de esta sección sobre la manera como se enseña la función cuadrática en las matemáticas escolares abre todo un espacio para la reflexión. Por un lado, existe una relación natural entre la manera como se sugiere que se debe enseñar el tema en los libros de texto y los documentos oficiales, por un lado, y las concepciones de los profesores sobre el tema. Por el otro lado, aunque no tenemos información para sustentarlo (diferente de los resultados del análisis cognitivo hecho por los profesores en este mismo proyecto), es de esperarse que las concepciones de los estudiantes sigan esta misma línea. Si esto es así, entonces los estudiantes están construyendo un conocimiento parcial de la función cuadrática.

Consideramos que esta situación podría cambiar si se siguen las propuestas actuales sobre el currículo, al mirar los objetos matemáticos desde la perspectiva funcional, resaltar la importancia de los sistemas de representación, establecer las diversas conexiones entre los elementos en cada uno de los sistemas de representación, identificar los modelos

matemáticos, integrar la tecnología al currículo, y trabajar en resolución de problemas desde una perspectiva amplia. Este tipo de aproximación ha sido ya utilizada y probada en algunas circunstancias (e.g., Gómez et al., 1996; Demana y Waits, 1992; Driscoll y Olwell, 1998; Janson, 1993).

Referencias bibliográficas

- Craine, T. V. (1996). A Graphical Approach to the Quadratic Formula. *The Mathematics Teacher*. 89 (1), pp. 34-36.
- Demana, F., Waits, B.K. (1992). *Precalculus mathematics: A graphing approach. Textbook*. Reading, MA: Addison Wesley.
- Driscoll, P. J., Olwell, D. H. (1998). *Precalculus. A modeling approach*. New York: McGraw-Hill.
- Goldin, G. A., Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*. 17 (1), pp. 1-4.
- Gómez, P., Carulla, C. (1998). El análisis de contenido matemático como herramienta para la construcción de modelos pedagógicos. El caso de la función cuadrática. *Documento no publicado*. Bogotá: Una Empresa Docente.
- Gómez, P., Carulla, C. (1999). Mapas conceptuales, sistemas de representación y concepciones de los profesores sobre la función cuadrática [On-line]. <http://ued.unian-des.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/ConcProfFunCuad.html>.
- Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., Valero, P. (Eds.) (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 65-97.
- Janson, P. (1993). *Contemporary Precalculus through applications. Assessment package*. Dedham: Janson.
- Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 515-556.
- Lanzing, J. W. A. (1998). Everything you always wanted to know about... Concept Mapping. <http://utto212.to.utwente.nl/lanzing/EVERYT~1.HTM>. Holanda, pp. 1-29.
- Leindhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*. 60 (1), pp. 1-64.
- McGowen, M. (1998). Cognitive units, concept images, and cognitive collages: An examination of the processes of knowledge construction. *Documento no publicado*. Warwick: University of Warwick.
- Novak, J.D. (1990). Concept mapping: A useful tool for science education. *Journal of Research in Science Teaching*. 27 (10), pp. 937-949.

Ruiz, L. (1993). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico. *Documento no publicado*. Granada: Universidad de Granada.

Williams, C. G. (1998). Using concept maps to assess conceptual knowledge of function. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (4), pp. 414-421.

ANEXO 1.

PRODUCCIONES DE LOS PROFESORES. EJEMPLOS DE MAPAS CONCEPTUALES

(No está disponible en formato digital)

ANEXO 2.

MAPAS CONCEPTUALES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

