

Aportaciones de la investigación en Educación Matemática a la Instrucción¹

Manuel Santos Trigo

Resumen

En este trabajo se identifican aspectos de la investigación en educación matemática que inciden directamente en la instrucción. Se destaca que los marcos teóricos de una investigación pueden aportar información valiosa relacionada con el quehacer de la disciplina y lo que significa aprenderla. Los métodos de investigación, como las entrevistas clínicas estructuradas, también son un medio importante en la instrucción para que los estudiantes revelen sus ideas y además para promover la reflexión y el aprendizaje de contenidos y procesos de la disciplina. Además, se destaca que ejemplos de problemas que emplean en la investigación también pueden utilizarse en la instrucción para identificar trayectorias potenciales de aprendizaje y el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes.

Abstract

This paper deals with the relationship between research in mathematics education and the practice of instruction. It focuses on analyzing the extent to which research contributions in the discipline shape and structure practical decisions in mathematical classroom. There is recognition that theoretical frames used to support research provide useful information regarding the development of mathematics and about what it means to learn it. Research methods such as task-based interviews can also be used in mathematics instruction as a means to explore students' mathematical ideas and as a way for students to learn and reflect on contents and problem solving processes. In addition, many problems or task used in research can be utilized in mathematical instruction to identify potential students' learning trajectories and for developing their mathematical competences.

Introducción

¿Qué es lo que define o caracteriza a la investigación en educación matemática? ¿Cómo se identifican los temas o problemas a investigar en la disciplina? ¿Qué resultados relevantes y aspectos de la investigación en educa-

¹ Seminario presentado en el departamento de Análisis Matemático de la Universidad de la Laguna. Se agradece el apoyo del CIMAC.

ción matemática orientan las prácticas de instrucción? Este tipo de preguntas resultan importantes para evaluar la incidencia o relación de la investigación y la práctica o instrucción matemática. Silver (1990) argumenta que la creencia de un amplio sector de la sociedad de que algún día la investigación identificará los objetivos o metas importantes en la educación, conducirá la investigación dirigida a lograr tales metas, y propondrá respuestas inequívocas a las preguntas o remedios para nuestros problemas educacionales ha generado expectativas no realistas de lo que se espera de la investigación en la disciplina. Y propone cambiar esa creencia de la existencia de un cura mágica por el reconocimiento de una relación bi-direccional: la práctica educativa se debe orientar por las ideas y constructos que emergen de la investigación y viceversa, los marcos de investigación deben considerar aspectos relacionados con los escenarios de instrucción. Es decir, los resultados de investigación producen transformaciones en la práctica y la misma práctica influye y retroalimenta la agenda de investigación de la disciplina. De la misma manera, Hiebert (1999) reconoce que tener en cuenta los resultados de investigación ayuda a que se tenga información confiable para tomar mejores decisiones. Sin embargo, afirma que en cada campo la ciencia tiene sus límites. Para ilustrar las limitaciones de la investigación en educación plantea una analogía con la investigación sobre la salud:

Considere los requerimientos para una vida saludable. Profesionales en la materia proponen estándares para vivir de manera saludable – dieta, ejercicio, descanso, etc. Pero la investigación médica no prueba que estos estándares son los mejores...¿Qué es mejor, usar mantequilla o margarina? ¿Se deben consumir exactamente siete raciones de frutas y vegetales todos los días o seis es suficiente? Estas preguntas simples no tienen respuestas simples. Hay demasiados factores que influyen en los resultados: la cantidad de ejercicio que hacemos, cuanto pesamos, nuestra genética, nuestro metabolismo, etc. Sería imposible controlar todos estos factores para probar que una cierta dieta es la mejor» (p. 5).

Hiebert también indica que en ambientes complejos como el salón de clase, existe una relación especial entre la investigación y la elección y desarrollo de las actividades de aprendizaje. «Las decisiones se basan en estimaciones probabilísticas, y los datos de la investigación nos ayudan a estimar la probabilidad de éxito. Entre más claros sean los resultados, se tiene más confianza de que estamos tomando buenas decisiones» (p. 5).

En este contexto, se identifican los elementos fundamentales alrededor de una investigación y las contribuciones que pueden aportar a la práctica de la instrucción. Se inicia con una reflexión acerca de las formas de caracteri-

zar o identificar un problema de investigación, la importancia de seleccionar un conjunto de preguntas que orienten la investigación. Se sostiene que el proceso de definir un problema de investigación es similar a la actividad de planear escenarios de instrucción donde los estudiantes tengan oportunidad de construir o desarrollar sus ideas matemáticas. En ambas tareas resulta importante *problematizar* la actividad. Es decir, transformar las metas u objetivos en dilemas o preguntas que deben atenderse sistemáticamente. Posteriormente, se identifican posibles contribuciones que aparecen en la práctica de la instrucción considerando aspectos de la investigación relacionados con los marcos teóricos, algunos métodos de investigación incluyendo problemas que pueden ser útiles en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes.

El proceso de investigar y la Instrucción

La tarea de realizar una investigación en educación matemática implica la identificación de un conjunto de preguntas que servirán de guía durante el desarrollo del estudio. La selección de las preguntas de investigación se basan en un análisis detallado del tema, las metas y las condiciones de desarrollo de la investigación. De la misma manera, el planear un escenario de instrucción incluye reflexionar (plantear y discutir preguntas) acerca del tema en estudio. (¿Qué significa aprender el concepto de derivada? ¿Cuáles son los recursos y procesos fundamentales alrededor del concepto? ¿Qué tipo de problemas resultan importantes en la construcción del concepto?, etc.). Es decir, se examina el tema a estudiar y se identifican trayectorias potenciales de aprendizaje que los estudiantes pueden seguir durante el desarrollo de la instrucción. La visión que aporta la revisión de la literatura en el proceso de desarrollar una investigación, es similar a la forma de estructurar la instrucción a partir de incorporar los resultados de la investigación.

La influencia de los marcos teóricos en la instrucción

Un marco teórico se define alrededor de los principios que rigen la estructura y desarrollo de la investigación. En la resolución de problemas, por ejemplo, resulta importante analizar el proceso cognitivo, y no sólo los productos, que muestra el sujeto o estudiante durante sus experiencias de aprendizaje. Además, en esta perspectiva se han desarrollado constructos teóricos que ayudan a caracterizar las competencias de los estudiantes en términos de la visión o conceptualización de la disciplina (creencias), los recursos básicos que disponen y puedan acceder durante la comprensión de

las ideas matemáticas y la resolución de problemas, las estrategias cognitivas que resultan relevantes en el proceso de solución y las estrategias de monitoreo, evaluación y auto-regulación que guían la resolución de problemas. Estos aspectos han influido no solamente en la forma de estructurar los escenarios de instrucción, sino también en la selección e implementación de actividades de aprendizaje que permitan a los estudiantes revelar y atender el desarrollo de estos constructos. En particular, una instrucción basada en la resolución de problemas intenta crear un microcosmo del quehacer matemático en el salón de clases (Schoenfeld, 2000) que refleje los valores y principios del desarrollo de la disciplina. Términos como problemas no rutinarios, y comunidades de aprendizaje que promuevan los valores del quehacer de la disciplina resultan relevantes en una instrucción basada en la resolución de problemas.

De manera general, en la instrucción matemática es común que converjan principios e ideas asociadas con varios marcos teóricos y no solamente con un marco específico. La visión de la matemática que se sustenta en un marco teórico también ha influido notablemente las actividades de aprendizaje que se promueven en el salón de clases. En esta dirección, se resalta que aprender matemáticas va más allá de que el estudiante memorice un conjunto de fórmulas o procedimientos que le permitan resolver un determinado tipo de problemas; se reconoce que aprender matemáticas implica que los estudiantes desarrollen y aprecien los valores propios del quehacer de la disciplina. Éstos incluyen la tendencia a formular preguntas, representar relaciones, buscar conjeturas, plantear argumentos, resolver problemas, comunicar resultados y plantear problemas. Esta visión de las matemáticas se resalta en los estándares curriculares que propone el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (2000). «La propuesta refleja las sugerencias e influencia de muchas fuentes. La investigación en educación sirve como base para muchas de las propuestas y aseveraciones que aparecen en el documento acerca de qué es posible para los estudiantes aprender en ciertas áreas de contenido, en ciertos niveles y bajo ciertas condiciones pedagógicas» (NCTM, 2000, p xii).

La importancia de los métodos de investigación

Un resultado importante que emerge de la investigación en educación matemática es el reconocimiento de que los estudiantes participan activamente en la construcción de su propio conocimiento matemático. Además, de que la construcción se basa en los conocimientos y recursos que los estudiantes han aprendido en sus experiencias previas de aprendizaje. En este contexto, muchos de los métodos utilizados en la investigación para

promover la reflexión y fomentar el aprendizaje de los estudiantes incluyen que trabajen en grupos pequeños, participen en discusiones con toda la clase y en la resolución de problemas a través de entrevistas estructuradas. Estos métodos de investigación han sido exportados a la instrucción matemática y ahora es común que los estudiantes durante el desarrollo de una clase discutan problemas con sus compañeros, presenten sus ideas y en algunos casos participen en la resolución de problemas a nivel de entrevista con su profesor. En esta dirección, la participación de los estudiantes en grupos pequeños, en la clase y en las entrevistas no sólo resulta un medio para que revelen sus ideas y conozcan las de sus compañeros; sino también como una forma de refinar y extender sus propias ideas. Estas formas de estructurar las actividades de aprendizaje en el salón de clase ha aportado información valiosa relacionada con la evaluación del aprovechamiento o competencias matemáticas de los estudiantes.

Los escenarios de Instrucción

Un resultado de investigación importante de la educación matemática es el reconocimiento de que los estudiantes construyen activamente su propio conocimiento matemático. Además, en ese proceso de construcción resultan relevantes las ideas, recursos, estrategias, y formas de pensar que los estudiantes traen al salón de clases. En este contexto, es común que en la instrucción se consideren escenarios flexibles donde los estudiantes tengan oportunidad de revelar constantemente sus ideas y conocer las de sus compañeros. Además, los estudiantes participan en actividades de resolución de problemas en pequeños grupos, discuten sus ideas y plantean argumentos que le den sustento a sus conjeturas. El profesor organiza y orienta el desarrollo de las actividades y promueve una comunidad de aprendizaje donde se valore la formulación de preguntas, la búsqueda de conjeturas, el uso de distintas representaciones, y la comunicación de resultados. Por supuesto, no existe un formato único acerca de cómo estructurar las distintas actividades de aprendizaje. Cada profesor, de acuerdo a las condiciones propias de su institución, selecciona, organiza e implementa series de actividades que promuevan:

- (i) La participación de los estudiantes en la discusión de tareas o problemas en pequeños grupos.
- (ii) La presentación de los acercamientos de los estudiantes a los problemas a toda la clase o grupo.
- (iii) La retroalimentación y orientación por parte del profesor que permita identificar las estrategias y métodos de solución de los estudiantes y la necesidad de aprender nuevos contenidos.

- (iv) La reflexión individual que permita al estudiante incorporar y refinar los distintos acercamientos que aparecieron durante el desarrollo de las actividades.

Los problemas o tareas que se utilizan en la investigación

Las tareas o problemas que se utilizan para explorar las ideas matemáticas de los estudiantes o para promover la reflexión y el aprendizaje representan un aspecto importante en la investigación. Sierpínska (2004) reconoce que diferentes problemas son necesarios para diferentes propósitos de investigación. Las respuestas de los estudiantes pueden ser muy sensibles aún a pequeños cambios en la formulación de un problema, o en su contexto matemático, social, psicológico o didáctico (p. 10). Lo que resulta evidente es que el análisis que se realiza a los problemas que se proponen o utilizan en una investigación muestra el potencial que ofrecen en términos de los conceptos fundamentales, estrategias y recursos necesarios para su solución. Por ejemplo, es común que muchos de los problemas propuestos puedan resolverse a partir de distintos acercamientos o pueden ser representados en distintas formas. En esta perspectiva, muchos de los problemas utilizados en la investigación han sido usados como modelos para desarrollar o seleccionar problemas en la instrucción. Artigue (2005) reconoce que el uso de la tecnología ha influido notablemente en el desarrollo de la investigación y como consecuencia en la instrucción matemática. En este contexto, es importante caracterizar el potencial de los problemas, en términos de las cualidades matemáticas que se destacan al utilizar distintos artefactos. Trouche (2004) afirma que en el uso de artefactos como la calculadora simbólica existe un proceso en el cual los estudiantes transforman el artefacto en una herramienta de aprendizaje o de resolución de problemas. Así una tarea inicial es identificar el potencial que se puede explotar en los problemas con el empleo de algunas herramientas.

Para ilustrar el potencial y las formas de razonamiento que emergen en la resolución de problemas con el uso del software dinámico se presentan ejemplos donde se destacan preguntas que guían el proceso de solución. Los ejemplos que se exploran se pueden agrupar en términos de la naturaleza de su construcción y tratamiento de solución:

- (i) Aquellos que surgen a partir de la construcción de configuraciones dinámicas simples que involucran segmentos, rectas, ángulos, etc. que sirven de plataforma para formular preguntas que conducen al planteamiento de conjeturas o relaciones.

- (ii) Problemas o ejercicios que aparecen en algunos libros de texto se resuelven con el empleo de alguna herramienta (software dinámico, calculadora) y se identifican los conceptos, representaciones y recursos matemáticos que resultan relevantes durante el proceso de solución. En particular, se analizan las conexiones entre los distintos acercamientos y se muestran algunas extensiones de los problemas.

La importancia y facilidad de construir configuraciones

Una propiedad importante del software dinámico es que permite construir representaciones que pueden explorarse a partir de la búsqueda de conjeturas y relaciones. La idea es que el estudiante utilice las facilidades que ofrece la herramienta para identificar relaciones al mover y cuantificar elementos dentro de cierta configuración. En este contexto, no existe un problema bien definido por resolver inicialmente, sino que el uso de la herramienta resulta importante en el proceso de formular preguntas y problemas. Por ejemplo, un estudiante puede iniciar con la construcción de un segmento AB y una recta L y un punto P sobre L (figura 1).

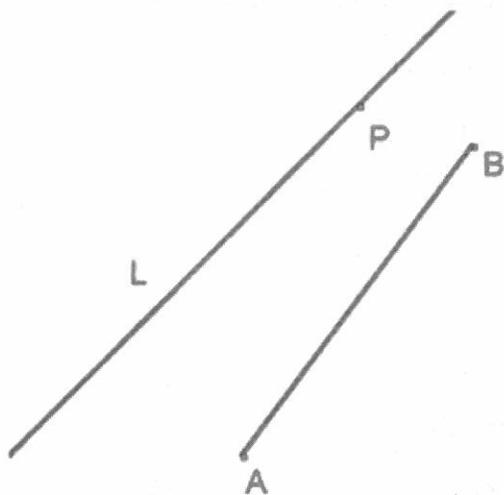


Figura 1: Construcción de un segmento AB , una recta L y un punto P sobre la recta.

Por los puntos A , B y P se puede dibujar el triángulo ABP y observar que al mover el punto P se genera una familia de triángulos (figura 2).

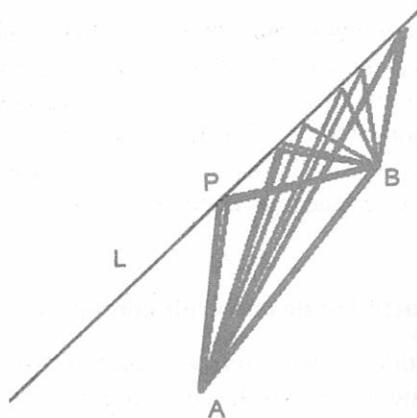


Figura 2: Familia de triángulos generados al mover el punto P sobre la recta L

¿Cómo se comporta el área y el perímetro de esta familia de triángulos? Ésta es una pregunta que fácilmente se puede explorar utilizando el software. El procedimiento incluye la construcción de una relación entre por ejemplo la longitud del lado AP y su correspondiente perímetro o área, que el software calcula directamente. Es decir, se tendrá dos relaciones una que asocia a cada valor de AP con su perímetro y la otra la magnitud de AP con su área (figura 3). ¿Cómo interpretar la gráficas que se generan al encontrar el lugar geométrico de los puntos R y S cuando el punto P se mueve a lo largo de la recta L?

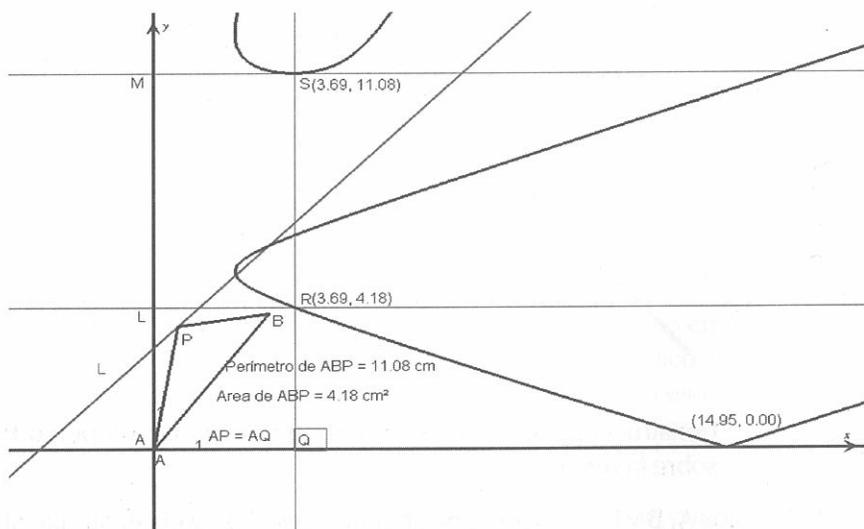


Figura 3: Representación gráfica de las relaciones que asocian la distancia AP con el área y perímetro correspondiente del triángulo ABP.

Visualmente se observa que la gráfica del perímetro que es la que genera el punto S cuando se mueve el punto P sobre la recta L alcanza un valor mínimo aproximadamente en el punto (3.69, 11.08); mientras que el área el valor mínimo se obtiene en el punto (14.95, 0). Se observa que la variación del área con respecto al lado AP describe una curva (al menos en una parte) que parece una hipérbola. Con el software se pueden tomar cinco puntos de ese lugar geométrico y trazar la cónica que pasa por esos puntos (figura 4).

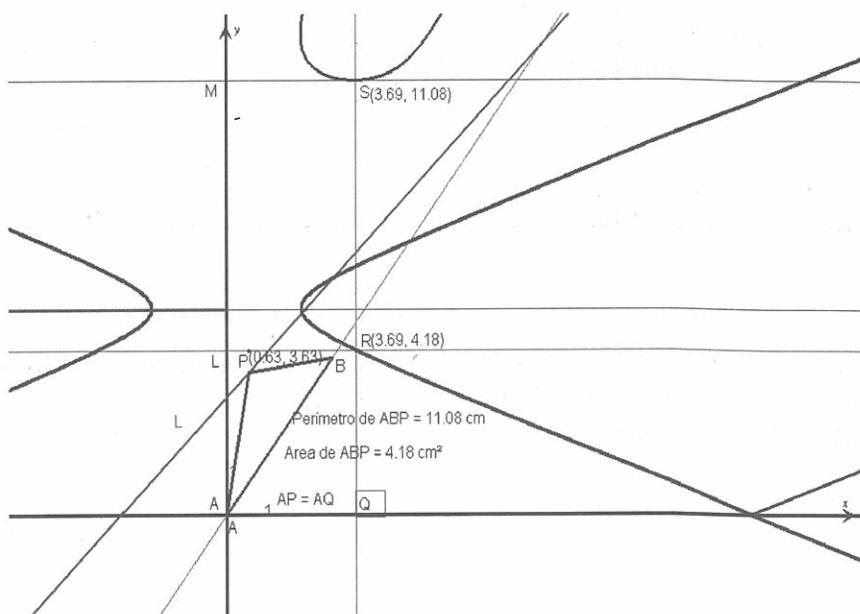


Figura 4: Asociando un hipérbola al lugar geométrico que describe el área del triángulo.

El uso del software también resulta una poderosa herramienta para ubicar los elementos importantes alrededor de la hipérbola. Por ejemplo, se puede conocer la ecuación de esta cónica y así identificar el centro y los focos correspondientes. Se verifica que para cualquier punto H sobre la hipérbola se cumple que $HF - HF'$ es siempre una constante (figura 5).

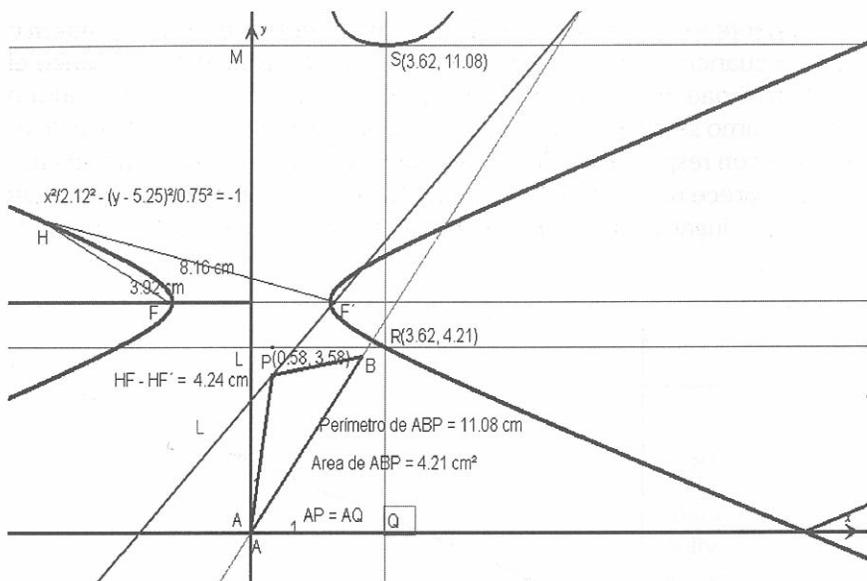


Figura 5. Verificando la definición de la hipérbola.

Se puede verificar que cuando la recta L y la recta que pasa por los puntos A, B del segmento son paralelas, entonces el área de los triángulos que se general al mover el punto P sobre L es siempre constante (figura 6).

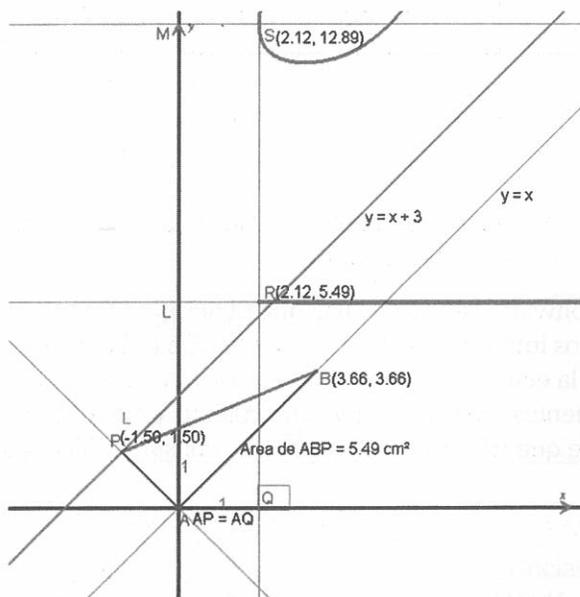


Figura 6: El área de la familia de triángulos es constante cuando la recta que pasa por los extremos del segmento dado es paralela a la recta L.

¿Qué ocurre si el punto P se mueve en una circunferencia en lugar de moverse sobre la recta L? Se observa que el área alcanza el valor máximo cuando el punto P se ubica sobre el círculo a una distancia de 4.52 cm. y le corresponde un valor de 5.73 cm² (figura, 7). En virtud de que el segmento del triángulo ABP es fijo, el área depende de la altura. En el caso donde el área obtiene el valor máximo, la altura es el segmento perpendicular que se traza del punto P al segmento AB y que pasa por el centro de la circunferencia.

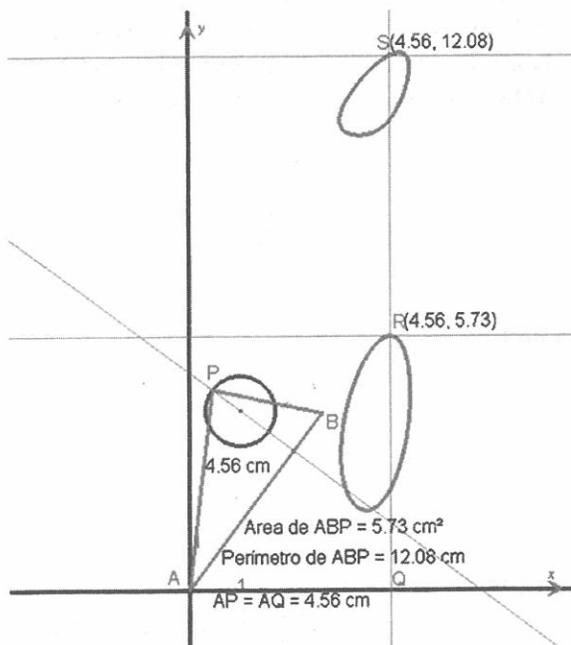


Figura 7: Comportamiento del área y perímetro de la familia de rectángulos que se genera al mover el punto P sobre una circunferencia y el lado AB fijo.

Se observa que con la ayuda del software se pueden construir configuraciones que se convierten en plataformas para formular y explorar relaciones matemáticas. En esta dirección, el estudiante se plantea la necesidad de observar e identificar relaciones matemáticas que emerjan durante la construcción y también buscar los argumentos y pruebas que le den sustento a los resultados matemáticos.

Un problema rutinario

Otro ejemplo representa el tipo de problemas que generalmente aparecen en los libros de texto de un primer curso de cálculo sobre aplicación de la derivada: «Determinar el rectángulo de área máxima con la base inferior

sobre el eje-x y los vértices superiores sobre la curva $y = 9 - x^2$ »(Thomas & Finney, 1984, p.212).

La idea es inicialmente trabajar el problema con el uso de un software dinámico. ¿Cómo construir una representación dinámica del problema? Una tarea inicial es representar gráficamente la curva donde se ubican los vértices superiores del rectángulo. Para esto se elige un punto cualquiera Q sobre el eje-x, el valor OQ se determina con el software y se evalúa en la expresión $f(x) = 9 - x^2$, este valor se transfiere al eje-y. El punto P en el plano tendrá de coordenadas $(x, f(x))$ y con la ayuda del software se determina el lugar geométrico de P cuando el punto Q se mueve a lo largo del eje-X (figura 8).

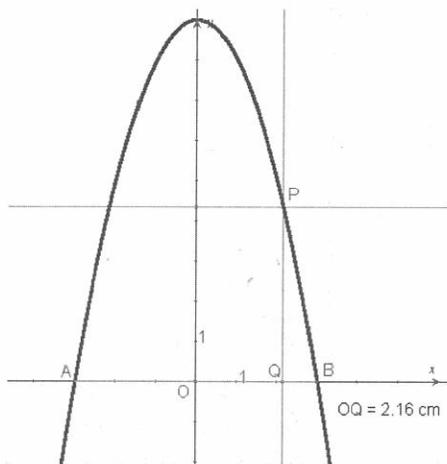


Figura 8: Representación gráfica de la expresión $y = 9 - x^2$

Se observa que la gráfica representa una parábola con vértice $(0, 9)$ y puntos de intersección con el eje-X: $(3, 0)$ y $(-3, 0)$.

¿Cómo construir una familia de rectángulos con un lado situado sobre el eje-x y dos de sus vértices sobre la gráfica de $y = 9 - x^2$?

Se observa que por la simetría de la figura es suficiente ubicar un punto M sobre el segmento OB y construir los rectángulos que tengan como base el segmento OM e identificar el punto N (la intersección de la perpendicular al eje-x que pasa por M con la parábola) y el punto R como la intersección con el eje-Y de la perpendicular de M al eje-Y (figura 9).

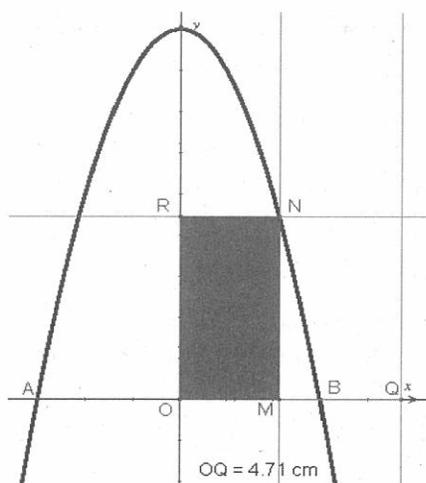


Figura 9: Construcción de un rectángulo con base sobre el eje- x y un vértice sobre la parábola.

Con esta representación dinámica del problema se tiene que para cada punto M sobre el segmento OB se genera un rectángulo $OMNR$ que satisfaga las condiciones del problema. ¿Cómo se comporta el área de esa familia de rectángulos? Con la ayuda del software se puede representar el comportamiento del área de los rectángulos que se generan al mover el punto M sobre el segmento OB (Figura 10).

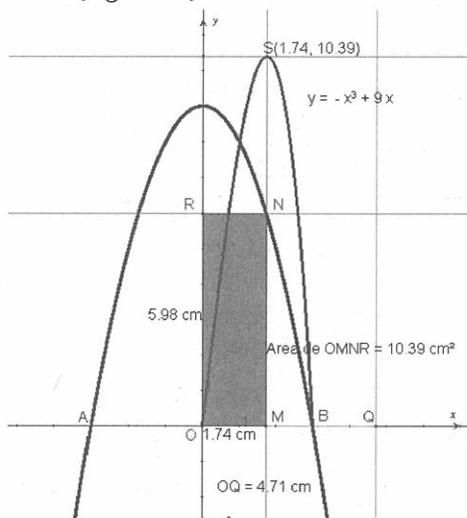


Figura 10: El rectángulo de área máxima se ubica cuando el lado de la base mide 3.48 cm, esto es $2(1.74)$.

Se observa que con la ayuda del software la solución al problema se reduce a determinar el punto en la gráfica del área que corresponde al valor máxi-

mo correspondiente. En este caso se ubica cuando la mitad de lado del rectángulo mide aproximadamente 3.48 cm.

Una generalización a este problema se puede plantear cuando en lugar del número 9 se considere un número P positivo. Es decir, el problema ahora sería: «Determinar el rectángulo de área máxima con la base inferior sobre el eje- x y los vértices superiores sobre la curva $y = P - x^2$ »

En este caso el área del rectángulo se puede expresar como $A(x) = x(P - x^2)$

Usando una calculadora simbólica, podemos calcular la derivada de $A(x)$ y encontrar el valor del lado del rectángulo cuando alcanza su área máxima (figura 11).

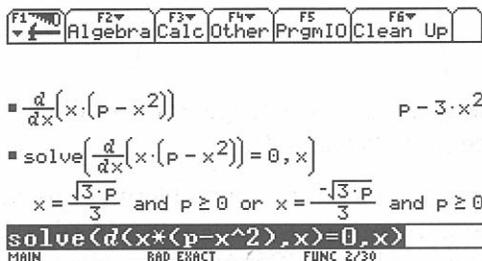


Figura 11. Cálculo de la derivada

Dado que x representa el lado del rectángulo, entonces x no puede tomar un valor negativo.

Para el caso particular cuando $P = 9$ se tiene que $A(x) = x(9 - x^2)$, con la calculadora se puede obtener la gráfica de esta expresión e identificar el punto máximo directamente (figura 11). El resultado coincide con el obtenido con el uso del software dinámico.

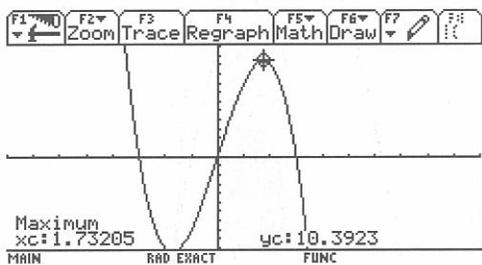


Figura 12: La gráfica de la función área y el punto máximo.

Se observa que en este ejemplo, el uso de distintas herramientas (software dinámico y calculadora simbólica) aparecen estrategias y recursos matemáticos complementarios. Con el uso del software dinámico interesa construir una representación dinámica del problema que permita identificar el comportamiento visual del problema, en el acercamiento algebraico se

destaca la identificación de un modelo que represente el fenómeno en estudio y ofrece posibilidades de trabajar el caso general. Así, los estudiantes pueden observar que algunas de las propiedades que aparecen implícitas en el modelo algebraico adquieren un significado geométrico y visual en el acercamiento dinámico. Al mismo tiempo se pueden dar cuenta que, en general, los resultados numéricos que se obtienen en con el uso del software dinámico son aproximados.

Reflexiones Finales

¿Cómo se relaciona quehacer de la investigación en educación matemática con la práctica de la instrucción? Esta es la pregunta central en el desarrollo del artículo. En la respuesta se reconoce que el proceso mismo de investigar es similar a la tarea de construir un escenario de instrucción ya que en ambas actividades resulta importante plantearse preguntas que dan información acerca de la estructura y desarrollo de la investigación o la instrucción. Además, elementos de la investigación como el marco teórico resultan relevantes al discutir aspectos relacionados con la visión de la disciplina y lo que significa aprender matemáticas en la instrucción. Otro aspecto de la investigación que aparece en las prácticas de instrucción es el uso de distintos métodos de investigación. En particular, el empleo de entrevistas con base en problemas ha resultado una herramienta valiosa no sólo para explorar las ideas de los estudiantes, sino como medios para promover el aprendizaje. Finalmente, los problemas que se han diseñado para la investigación, en muchos casos también son utilizados en la instrucción. En los ejemplos que aquí se presentan, se observa que el empleo de la tecnología resulta relevantes en la representaciones dinámicas y en el tratamiento algebraico y gráfico de los problemas. La idea, más que privilegiar el empleo de alguna herramienta, es que el estudiante tenga acceso a un conjunto de ellas que le permitan explorar el problema desde distintos ángulos o perspectivas. En esta dirección, el uso de distintas herramientas puede ayudar a que los estudiantes no sólo formulen y exploren distintas relaciones, sino también a que una misma relación o resultado se analice en forma visual, algebraica y geométrica.

Bibliografía

- Artigue, M. (2005): "The integration of symbolic calculators into secondary education: Some lessons from didactical engineering". En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trouch (Eds.). *The didactical challenge of symbolic calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument*, pp. 231-294. NY: Springer.

- Hiebert, J. (1999): "Relationship between research and the NCTM standards". *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(1), pp. 3-19.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000): *Principles and standards for school mathematics*. Reston VA: The Council.
- Schoenfeld, A. H. (2000): "Purpose and methods of research in mathematics education". *Notices of the AMS*, pp. 641-649.
- Sierpinska, A. (2004): "Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization". *For the learning of mathematics*, 24, 2, pp. 7-15.
- Silver, E. (1990): "Contribution of research to practice: Applying findings, methods, and perspectives". In T. Cooney and C.R. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s*. 1990 Yearbook, pp. 1-11. Reston VA: The Council.
- Thomas, G. B.; Finney, R. L. (1984): *Calculus and analytic geometry*. Massachusetts: Addison-Wesley.
- Trouche, L. (2005): "Calculators in mathematics education: A rapid evolution of tools, with differential effects". En D. Guin, K. Ruthven, & L. Trough (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators. Turning a computational device into a mathematical instrument*, pp. 9-39. NY: Springer.

Manuel Santos Trigo. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV). México.
Correo electrónico: msantos@cinvestav.mx