Problemas comentados

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz
Club Matemático

Ya comentamos en el artículo anterior, que en el año 2001 se nos encargó por la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas (SCPM) la «conferencia» de clausura de las Jornadas que anualmente celebra nuestra sociedad. Ya usamos en ese artículo algunos de los temas que utilizamos en dicha disertación. Ahora vamos a usar alguna otra cosa de ella: los NÚMEROS MÁGICOS. Es decir, números que ante determinadas operaciones (la multiplicación, normalmente) presentan un comportamiento sorprendente.

Hay muchos tipos de números mágicos. Aquí presentamos dos de esos tipos: los originados a partir de cantidades formadas siempre por una misma cifra o los originados a partir de fracciones periódicas.

Uno muy conocido del primer tipo es el número **12 345 679**, que al ser multiplicado por 9 origina el número 111 111 111.

Al ser multiplicado por los distintos múltiplos de 9 (18, 27,..., 81) origina números formados por una sola cifra.

El más sencillo es el **37**, que es el número mágico de este tipo más pequeño posible. Si multiplicamos 37 por los múltiplos de 3, obtendremos: 37x3 = 111, 37x6 = 222,...

El siguiente es el **1583**. Cuando se multiplica por los distintos múltiplos de 7 obtendremos 111 111, 222 222, etc.

El más famoso de los números mágicos del segundo tipo es el **142 857**.

Cuando multiplicamos este número por los seis primeros números obtenemos resultados que son, en cada caso una permutación circular de dicho número.

Una multiplicación curiosa es la siguiente:

```
      142857
    x 326451
      142857
     714285
    571428
   857142
  285714
 428571.........
```

Lo de menos es el resultado de la misma. Lo curioso es la disposición de los resultados parciales.

También es extraña la multiplicación del número mágico por 7. La extrañeza sólo dura hasta que comprendemos lo sucedido. El número mágico no es más que el período de la fracción 1/7.

Se puede seguir investigando lo que sucede cuando multiplicamos por 8, 9, etc. Las sorpresas pueden seguir apareciendo.

Y ahora vamos con las propuestas hechas en el número anterior. Las soluciones a los aritmogramas propuestos en los ejemplos del artículo anterior

SEIS	SEND	SEIS	DIEZ	CINE	BLANCO
+ SEIS	+MORE	DE	+TRES	CENA	+ ROJO
DOCE	**MONEY**	ENERO	**TRECE**	BAILE	**ROSADO**
		REYES		**PASEAR**	

son, en el mismo orden en el que aparecen:

SEIS = 4 814; SEND = 9 567 MORE = 1 085;

SEIS = 4 104 DE = 81 ENERO = 17 129;

DIEZ = 9 672 TRES = 1 075; CINE = 7 486

CENA = 7 680 BAILE = 90 436;

BLANCO = 794 350 ROJO = 8 060

Para alguno hay más de una solución.

PROBLEMA Nº 27:

En un mercado, un ganadero anunciaba que su piara constaba de una cantidad par de cerdos, que no es el menor de los pares. ¿Cuánto cuesta cada cerdo?

Ofrecemos la solución para cuatro cerdos:

Podemos razonarlo así:

Si 4·O = A, A debe ser un número par. Probaremos con A = 2, 4, 6 y 8.

Al probar con 2, O valdría 3, con lo que el problema estaría a medio resolver así:

```
CERD 3
CERD 3
CERD 3
CERD 3
PI 2 R 2
```

Dado que el número de letras de PIARA es el mismo que el de CERDO, 4 veces C debe ser menor que 10; y por tanto C puede valer 1 ó 2. Pero como hemos asignado 2 a O, nos queda que C = 1.

El problema está ahora como se muestra a la izquierda:

```
1 ERD 3
1 ERD 3
1 ERD 3
1 ERD 3
PI2R2
```

Y P debe ser 4 o una cifra mayor que 4. Tengamos en cuenta que el 1, el 2 y el 3 ya están asignados, por lo que las otras letras son cifras superiores a 3.

R es 4 veces D + 1, que se lleva de la columna de la derecha, y en la columna central tenemos que 4 veces R es 12, 22 o 32. Caben dos opciones:

a) Al ser R – 1 un múltiplo de 4, R (=4D + 1) debe ser impar y por tanto 5, 7 ó 9.

a_1) Si fuese 5, D sería 6 (y se llevarían 2), con lo que 4R + 2 = 22, que es concordante con el resultado de la columna central.

a_2) Si R fuese 7, D valdría 4 (y se llevarían 2) ó 9 (y se llevarían 3), con lo cual 4R + 2 = 30 ó igual a 31, que no permitiría el resultado de la columna de Rs.

```
1 E 5 6 3
1 E 5 6 3
1 E 5 6 3
1 E 5 6 3
P I 2 5 2
```

a_3) Si R fuese 9, D valdría 7 (y se llevarían 2), y que 4R + 2 = 38.

Concluimos que R vale 5 y D = 6, con lo que nuestro problema marcha como indica la figura de la derecha. Para P e I nos quedan las cifra 4, 7, 8 y 9. Probamos.

Sabiendo que 4E + 2 = I, si E es 4, I valdría 8 y P = 5. No nos sirve.

Si E vale 7, nos daría que 4E + 2 = 30, e I = 0 (llevando 3), pero P tendría que valer 7 también.

Si E vale 9, 4E + 2 sería 38, con lo que I = 8 y P vale 7. ¿Resuelto!

CERDO + CERDO + CERDO + CERDO = PIARA, y entonces resulta cada cerdo por 19 563 pesetas (de las del siglo pasado) y la piara por 78 252.

PROBLEMA Nº 28:

Un agricultor decía que, según sus cuentas, disponía de agua para regar cuando recibía, al menos, un cierto número impar de gotas. ¿Cuánto le costaba esta cantidad mínima de agua para el riego?

Es fácil deducir, con un razonamiento análogo al del ejercicio anterior pero más sencillo, que para cinco GOTAs cada una representa 1 075, y AGUA es el número 5 175. Basta fijarse en que 5A termina en 5, por lo que A = 5;

luego G es 1, y 5O es menor que 10 y por tanto, al sumar G = 1, O es 0.

$$\begin{array}{r} \mathrm{GOTA} \\ \mathrm{GOTA} \\ \mathrm{GOTA} \\ \mathrm{GOTA} \\ \underline{\mathrm{GOTA}} \\ \mathrm{AGUA} \end{array}$$

Como 5T + 2 es U, U representa un 2 o un 7 pues la suma debe ser 12 o 17. 12 no puede ser pues significaría que T también representaría al 2. Concluimos que T = 2 y U = 7.

¿Hay soluciones para 3, 7, 9... gotas? Les toca hablar a ustedes.

PROBLEMA Nº 29:

Una pareja de matemáticos, marido y mujer, están tomando café. A falta de otras cosas más intrascendentes sobre qué tratar, mantienen el siguiente diálogo:

- **¿Te das cuenta de que mi edad sólo fue múltiplo de la tuya una vez?**
- **Es verdad, y es una pena que no nos conociéramos entonces, porque no volverá a suceder.**
- **Pero la edad de nuestro hijo es el máximo común divisor de las nuestras.**
- **Y el mínimo común múltiplo de nuestras edades es el año en el que estamos.**

¿En qué años nacieron él, ella y su hijo?

De entrada, el único dato es que la cantidad que representa el año de la conversación es también el mínimo común múltiplo de sus edades. Aunque el problema fue propuesto para el año 2001, podemos revisarlo en este año y ampliar un poco las posibilidades. Pero tampoco se pueden ampliar mucho; tiene que ser un año que pueda factorizarse en un producto de dos números no demasiado grandes y armónicos: uno con respecto al otro. No olvidemos que esos dos factores serían divisores respectivos de las edades de la pareja.

Buscando de manera adecuada encontramos que eso sólo es posible en los años 2002, 2000, 1998, 1995 y 1980. En los demás casos salen números muy elevados. Y, también hay que decirlo, me paré en 1980 y no seguí buscando en años anteriores. Aquí hay una posibilidad de seguir trabajando el problema. ¿Hay algún año anterior a éste en que se puedan cumplir las condiciones?

Veamos los cinco casos estudiados:

Para $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, podemos determinar $2002 = 26 \cdot 77$.

Para $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, podemos determinar $2000 = 40 \cdot 50$.

Para $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$, podemos determinar $1998 = 37 \cdot 54$.

Para $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, podemos determinar $1995 = 35$ y 57.

Finalmente, para $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, podemos determinar $1980 = 44 \cdot 45$.

No olvidemos que las edades reales deberán tener un producto igual al resultado de multiplicar el año por la edad del hijo.

$A \cdot B = \text{mcm}\ (A \text{ y } B) \cdot \text{mcd}\ (A \text{ y } B)$

$12 \cdot 20 = \text{mcm}\ (12 \text{ y } 20) \cdot \text{mcd}\ (12 \text{ y } 20) = 60 \cdot 4 = 240$

Esto, para que sea posible el problema, pone la edad del hijo en una cantidad muy baja: 1, 2, 3,... No olvidemos que cada factor de los anteriormente seleccionados deberá ser ahora multiplicado por esa edad para que tengamos las edades correctas de los padres.

Se ve rápidamente que si elegimos el 2 para la edad del hijo, las parejas se ponen en 52 y 154, 80 y 100, 74 y 108, 70 y 114, 44 y 90. En todos los casos, aún contando con los avances de la medicina, no parecen edades apropiadas para tener un hijo de 2 años...

Ya no hace falta seguir investigando para edades superiores. Y queda claro, entonces, que ese hijo ha de tener 1 año de edad. Y así podemos volver a considerar que las edades de la pareja son números primos entre sí.

Para decidir cuáles son las edades posibles para la pareja hay que iniciar un estudio que contemple la primera de las condiciones: que la edad del mayor sólo fue múltiplo una vez de la edad del más joven, y no volverá a ocurrir.

Hay una fórmula para determinar cuándo ocurre eso, a partir de la diferencia de edades:

$(0 + n) \cdot X = (D + n)$

Donde 0 es la edad del que acaba de nacer y D (diferencia) es la edad del mayor en ese momento; n es el número de años que han de pasar y X es un factor entero que hemos de determinar.

$X = (D + n)/(0 + n) = (D + n)/n = 1 + D/n$

Se descarta en todos los casos el resultado obvio de $n = 1$.

Caso 1º: Para $2002 = 26 \cdot 77$

Hay una diferencia de edad de 51 años. Parece mucha pero, teniendo en cuenta casos como el del recinetemente fallecido Dr. Iglesias Puga, no se puede descartar.

$X = 1 + 51/n$

Se cumplirá para los valores de n = 3 (ella tendría 3 años y él 54) y n = 17 (ella tendría 17 años y él 68). Queda descartado.

Caso 2º: Para 2000 = 40 · 50

Hay una diferencia de edad de 10 años.

$X = 1 + 10/n$

Se cumplirá para los valores de n = 2 (ella tendría 2 años y él 12), n = 5 (ella tendría 5 años y él 15) y n = 10 (ella tendría 10 años y él 20). Queda descartado.

Caso 3º: Para 1998 = 37 · 54

Hay una diferencia de edad de 17 años.

$X = 1 + 17/n$

Se cumplirá solamente para el valor de n = 17 (ella tendría 17 años y él 34). Cumple la condición.

Caso 4º: Para 1995 = 35 · 57

Hay una diferencia de edad de 22 años.

$X = 1 + 22/n$

Se cumplirá para los valores de n = 2 (ella tendría 2 años y él 24), n = 11 (ella tendría 11 años y él 33) y n = 22 (ella tendría 22 años y él 44). Queda descartado.

Caso 5º: Para 1980 = 44 · 45

Hay una diferencia de edad de 1 año.

$X = 1 + 1/n$

Se cumplirá solamente para el valor de n = 1 (ella tendría 1 año y él 2). Cumple la condición (aunque ya la habíamos descartado) pero no parece una buena edad para haberse conocido ni de apenarse por ello...

En resumen, sólo nos queda como aceptable el caso 3º. Es decir, las edades de ambos en 1998 son de 54 y 37 años. Para que las posibilidades conceptivas estén garantizadas supondremos que él tiene 54 años y nació, por tanto, en 1944 mientras que ella tiene 37 años y nació en 1961. El hijo de ambos nació en 1997 y tiene 1 año de edad.

Si alguno de ustedes quiere mejorar la respuesta puede probar si alguno de los años no contemplados podría dar una respuesta mejor. O si antes de 1980 habrá otra fecha posible. Anímense.

En consonancia con el tema de este número, los números mágicos, ahí van algunas proposiciones ¡¿honestas?!

PROBLEMA Nº 30:

¿Qué número, multiplicado por 49 da un producto que se escribe sólo con la cifra 1?

PROBLEMA Nº 31:

Otra curiosidad del número mágico 142 857 es que si lo partimos en dos trozos resultan dos números que sumados entre sí dan 999. Una parte es complemento a 9 de la otra.

$$142 + 857 = 999$$

¿Sorprendente? ¿Habrá una propiedad? ¿Será una casualidad?

¿Sucede esto con otros números de este tipo?

Es cuestión de probar.

Y ahora un problema «práctico» que admite, seguramente, varias respuestas.

PROBLEMA Nº 32:

Tres amigos, de madrugada y en condiciones no muy apropiadas para conducir, deciden compartir un taxi para regresar a sus domicilios. Cuando se baja el primero, el taxímetro indica 12 •; al llegar frente al domicilio del segundo amigo, ya marca 16 •. El tercero, al acabar el viaje, debe abonar 22 •. Si la «bajada de bandera» es de 3 • y suponemos que el taxímetro marca proporcionalmente a los kilómetros recorridos, ¿cuánto es lo qué debería abonar cada uno de los amigos? Piénsese en lo que hubiese abonado si no hubiera compartido el taxi.

Y aquí queda todo de momento. Hágannos caso. Escriban mensajes a esta sección y cuenten sus soluciones y experiencias o, si lo prefieren, propongan sus propios problemas. Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera del próximo *NÚMEROS*.

El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón, del IES Canarias Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).
Correo electrónico: mgarciadeniz@sinewton.org
jaruperezpadron@sinewton.org