SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y MAPAS CONCEPTUALES COMO HERRAMIENTAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS PEDAGÓGICOS EN MATEMÁTICAS

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Los profesores de matemáticas nos enfrentamos diariamente a problemas complejos dentro de nuestra aula de clase. Estos problemas parecen ser problemas de enseñanza o de contenido. Pero, en realidad, casi siempre son de aprendizaje. Nos referimos a los problemas de lograr que nuestros estudiantes construyan, de la mejor manera posible, su conocimiento matemático. En algunos casos, nos cuesta trabajo comprender por qué algunos de nuestros estudiantes no pueden avanzar en la construcción de su conocimiento. Y en muchas ocasiones (con o sin razón) tendemos a culpar a los estudiantes de esta situación, al afirmar que vienen mal preparados o que no tienen la actitud apropiada hacia las matemáticas. Pero, ¿qué podemos hacer nosotros, como profesores de matemáticas, para apoyar a nuestros estudiantes para que avancen en su formación matemática?

Un primer paso consiste en convencernos a nosotros mismos de que el centro de nuestra preocupación debe ser el aprendizaje. Lo que nos debe preocupar es la calidad de la formación matemática que nuestros estudiantes están logrando gracias a nosotros. Y, para poder preocuparnos por el aprendizaje, debemos intentar comprender, en la medida de nuestras posibilidades, la problemática de la comprensión en matemáticas. ¿Qué significa comprender matemáticas? Esta es una pregunta muy compleja que podríamos responder de manera sencilla: comprender matemáticas significa ser capaz de resolver problemas en los que las matemáticas están involucradas. De esta manera, podemos reformular nuestro problema al preguntarnos ¿por qué nuestros estudiantes no son capaces de resolver un problema dado?

Existe una respuesta sencilla a esta pregunta: un estudiante no puede resolver un problema porque el conocimiento que tiene no es “suficiente” para permitírselo. Usamos aquí un significado amplio del término “conocimiento”. No obstante, nuestra tesis consiste en que buena parte de los problemas que nosotros, como profesores de matemáticas, enfrentamos en nuestra aula de clase, tienen que ver con nuestra capacidad para conocer y comprender el conocimiento matemático de nuestros estudiantes. Esta capacidad nos debe permitir comprender por qué nuestros estudiantes no son capaces de resolver un problema. Adicionalmente, ella nos debe dar luces para diseñar las estrategias con las cuales podremos apoyar a nuestros estudiantes para que ellos avancen en la construcción de su conocimiento matemático y puedan llegar a resolver los problemas que antes eran insolubles para ellos.

La comprensión en matemáticas depende directamente de las matemáticas mismas. Aunque hay facetas de la formación matemática del estudiante y de sus actitudes hacia las matemáticas que pueden ser comunes a otras áreas del conocimiento, nos preocupamos aquí por aquellos aspectos de la comprensión en matemáticas que están directamente relacionados con las matemáticas mismas. Por esa razón, consideramos que el desarrollo de nuestra capacidad para comprender el conocimiento matemático de nuestros estudiantes depende de nuestra comprensión y nuestro conocimiento de las matemáticas escolares. En otras palabras, consideramos que, para poder resolver los problemas a los que nos enfrentamos en el aula de clase, debemos conocer en detalle la estructura y las principales características del conocimiento matemático que esperamos que nuestros estudiantes construyan. Aunque, al ser profesores de matemáticas, podemos considerar que conocemos suficientemente el tema que enseñamos, es posible que esto no sea cierto. Podemos ser buenos matemáticos, en el sentido de conocer algunos temas con profundidad desde la perspectiva del saber matemático. Pero, ¿conocemos estos temas desde la perspectiva de las matemáticas de la escuela y de nuestros estudiantes?

En este documento queremos proponer dos herramientas que pueden aportar a una mayor comprensión de las matemáticas escolares y a la construcción de estrategias para abordar los problemas a los que nos enfrentamos en el aula de clase de matemáticas. Se trata de los sistemas de representación y los mapas conceptuales.

A continuación describimos las principales ideas detrás de la noción de mapa conceptual como medio de representación del conocimiento matemático y describimos algunas de las características de los mapas conceptuales que buscan describir un contenido matemático particular. Hacemos énfasis en los diversos tipos de conexiones que pueden existir entre los elementos de un mapa. En seguida, introducimos la noción de sistema de representación y mostramos cómo esta noción permite identificar y caracterizar las actividades matemáticas del aula de clase. Mostramos después cómo los mapas conceptuales y los sistemas de representación permiten describir de manera potente buena parte del conocimiento escolar con respecto a un contenido matemático particular y permiten resaltar algunas de las características de la comprensión de los estudiantes. Finalmente, presentamos la descripción de la función cuadrática con base en los sistemas de representación y los mapas conceptuales como ejemplo de la utilización de estas herramientas.

MAPAS CONCEPTUALES

DESCRIPCIÓN

Los mapas conceptuales son una técnica para representar visualmente la estructura de la información. Es decir, los mapas conceptuales son un sistema de representación cuyas normas son relativamente sencillas (Lanzing, 1998): “los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos” (p. 2).

Aunque esta técnica de representación ha sido utilizada desde la Edad Media, se considera que Joseph D. Novak de la Universidad de Cornell fue el pionero en la utilización de los mapas conceptuales en la educación. Él desarrolló esta técnica para determinar cómo ocurren los cambios en la comprensión conceptual de los estudiantes (Novak, 1990, p.937, citado en McGowen, 1998, p. 38). Los mapas conceptuales se han utilizado de manera sistemática en la educación, particularmente como herramienta para describir el currículo y como herramienta de la instrucción.

Existe una técnica, relacionada a los mapas conceptuales, llamada “mapas mentales”. Esta técnica desarrollada por Buzan, requiere que los mapas conceptuales tengan una jerarquía: “un mapa mental consiste en una palabra o concepto central, alrededor del cual se dibujan de 5 a 10 ideas principales que se relacionan con esa palabra. Este proceso se puede después repetir para cada una de las palabras hijas, tantas veces como se quiera" (Buzan, 1995, citado por Lanzing, p. 4). Williams (1998) llama a estos mapas los "mapas araña".

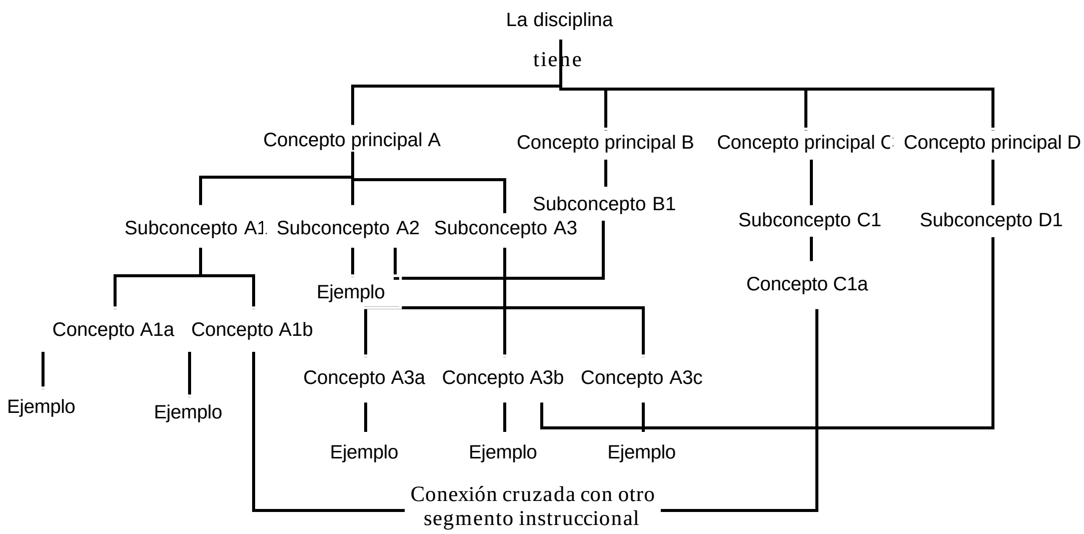


Figura Nº 1. Ejemplo de un mapa conceptual

La figura 1 muestra parte de un ejemplo de Novak (1988) de un "mapa conceptual para planificar un programa de instrucción. En un plan de estudios completo se incluirían también conceptos subordinados y conexiones cruzadas adicionales, además de ejemplos concretos de conceptos" (p. 103). En este caso, vemos que éste es un mapa tipo "araña" puesto que presenta una jerarquía partiendo de un concepto inicial, "la disciplina".

Como sistema de representación, los mapas conceptuales tienen dos ventajas importantes:

- Permiten descripciones no lineales del objeto.
- Al tener un carácter gráfico, permiten observar la estructura de la información.

MAPAS CONCEPTUALES Y MATEMÁTICAS

Las dos cualidades que acabamos de mencionar son muy importantes para la descripción de objetos matemáticos y su correspondiente discurso matemático. La estructura del contenido matemático no es lineal. Por un lado, todo concepto se encuentra relacionado con otros conceptos y, en general, todo procedimiento está relacionado con uno o más conceptos y procedimientos adicionales. Por otro lado, y como veremos más adelante, una representación de un concepto (u objeto) puede estar relacionada con otras representaciones de ese mismo u otros conceptos (u objetos). Por consiguiente, hay una estructura que representa la manera como los conceptos, los procedimientos y las representaciones se relacionan unos con otros. Aunque éstas son características bien conocidas de los objetos matemáticos y su correspondiente discurso, este último se hace, en general, dentro de un texto. Esto implica, por un lado, que la descripción tiene que ser lineal, y, por el otro, que no es posible ver "gráficamente" la estructura del discurso. Hay que deducirla de la lectura del texto. En consecuencia, en contraposición con la descripción textual, los mapas conceptuales resultan muy potentes para la descripción del discurso matemático y, como veremos más adelante, cuando se conjugan con la noción de sistema de representación, esta potencia se multiplica.

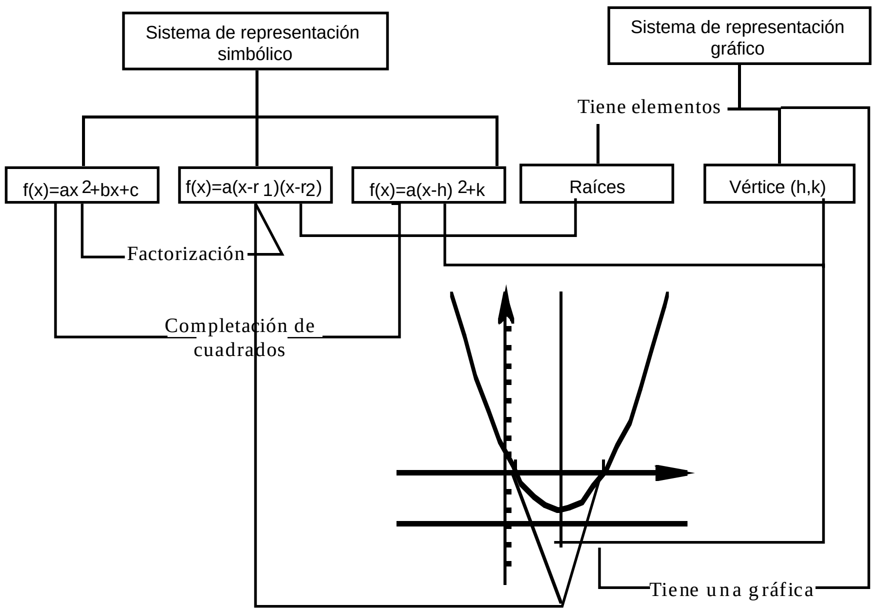


Figura Nº 2. Mapa conceptual en matemáticas

La figura 2 muestra una porción de un mapa conceptual para la función cuadrática. En ella se aprecia la identificación de elementos en dos sistemas de representación y la relación de estos elementos con otros elementos del mismo sistema de representación o con representaciones del mismo elemento en otros sistemas de representación.

CARACTERÍSTICAS DE LOS MAPAS CONCEPTUALES EN MATEMÁTICAS

Cuando se utilizan para describir contenido matemático, los mapas conceptuales pueden tener unas características que dependen, al menos parcialmente, de ese contenido. Introducimos aquí las nociones de familia, submapa y nivel.

En el caso de la descripción de un concepto matemático por medio de mapas conceptuales, los mapas serán de tipo “araña”, dado que siempre habrá una idea inicial: el concepto mismo. Esto implica que se puede introducir el concepto de *familia* dentro de un mapa o submapa y que, al interior de la estructura jerárquica que se construye, existe un sentido natural de la mayoría de las conexiones. Estas van de padres a hijos (ver figura 4).

Un mapa conceptual con contenido matemático permite identificar *submapas*. Estos son porciones del mapa global en las que se desarrolla una parcela particular y fácilmente identificable del contenido en cuestión.

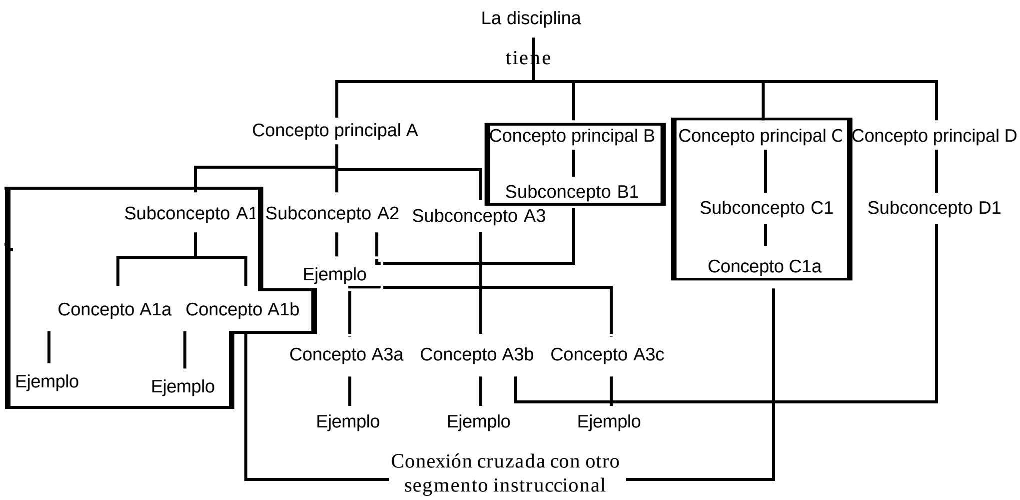
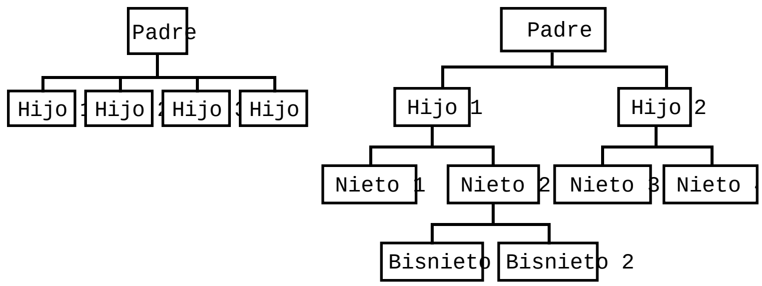


Figura Nº 3. Ejemplos de submapas

La figura 3 presenta el mapa del comienzo de este apartado. En él hemos resaltado algunos posibles submapas.

Estos submapas pueden tener una *estructura*. La noción de estructura se puede caracterizar con base en el número de niveles del mapa o submapa. En el ejemplo de la figura 4, observamos un ejemplo de un mapa con dos niveles y de otro mapa con cuatro niveles. Resulta evidente que el número de niveles de un submapa da una indicación de la complejidad de la descripción que se pretende hacer con él.



Submapa de dos niveles Submapa de cuatro niveles

Figura Nº 4. Estructuras de submapas

CONEXIONES

Los mapas conceptuales también se pueden caracterizar de acuerdo con el tipo de conexiones que presentan. Las conexiones *básicas* son aquellas que definen la jerarquía de familia de las ramas de un mapa o un submapa. Estas conexiones básicas caracterizan la estructura lineal de las ramas y la relación de familia expuesta en la figura 4. Las conexiones *internas* son aquellas que establecen relaciones entre dos elementos diferentes pertenecientes a un mismo submapa por fuera de la relación jerárquica de familia. Las *externas* son aquellas que establecen relaciones entre representaciones de un mismo elemento en diferentes submapas. Las conexiones (tanto internas,

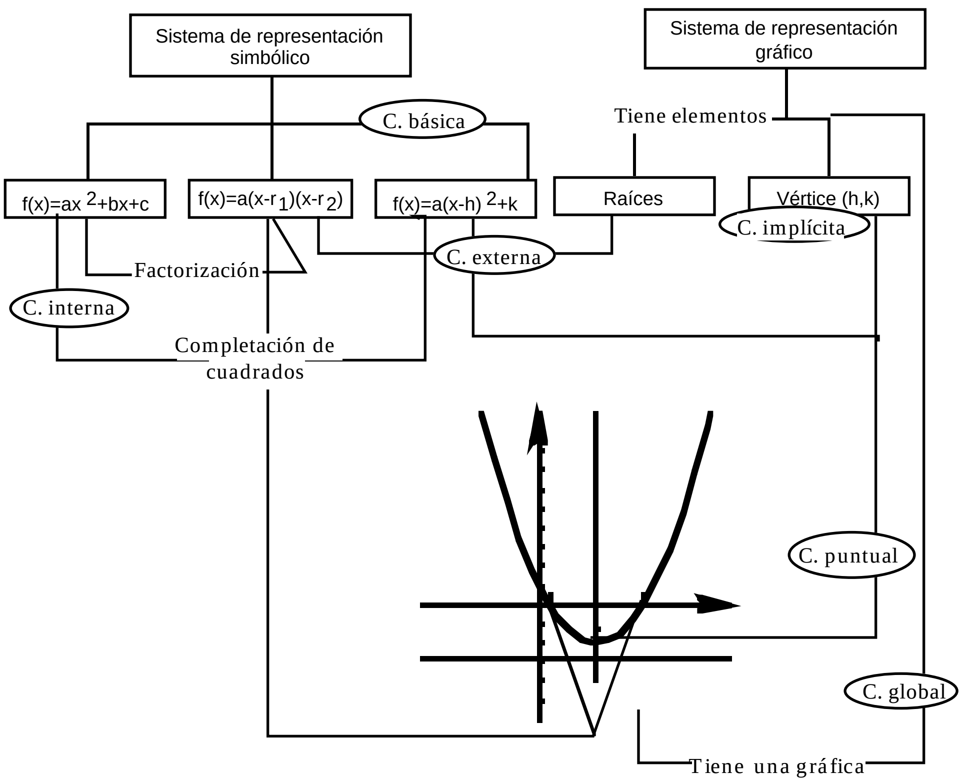


Figura Nº 5. Ejemplos de conexiones

como externas) pueden ser *implícitas* o *explícitas*. Las conexiones explícitas se expresan con líneas que explícitamente establecen la conexión entre dos elementos. Las conexiones implícitas se expresan dentro de la caja de un mismo elemento al referirse a otro elemento. Las conexiones pueden ser *puntuales* o *generales*. Las conexiones generales van de un elemento o grupo a otro grupo de elementos. Las conexiones puntuales van de un elemento a otro elemento.

La figura 5 presenta, para el mapa presentado anteriormente, ejemplos de los diferentes tipos de conexiones. En este caso, vemos un mapa que *no* es de tipo “araña” y por lo tanto en el que es evidente la existencia de dos submapas principales.

Sistemas de representación

Introducción

Un mismo objeto matemático puede representarse en diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, en el caso de las funciones, éstas pueden representarse en el sistema de representación simbólico ($f(x) = x^2 - 4x + 3$), en el sistema de representación gráfico (ver figura 6) y en el sistema de representación tabular (ver figura 7), entre otros.

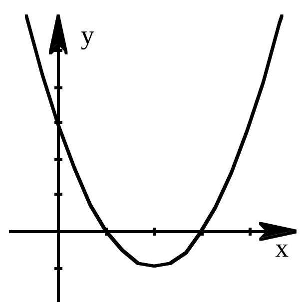


Figura Nº 6. Representación gráfica

x	y
-1	8
0	3
1	0
2	-1
3	0
4	3
5	8
6	15

Figura Nº 7. Representación tabular

Cuando hablamos de "objeto matemático", tenemos que hacer una aclaración de tipo ontológico. Existen diversas posiciones con respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos (ver, por ejemplo, Ernest, 1991). En este documento asumimos una posición "platónica" en el sentido de considerar que los objetos matemáticos existen en una realidad propia independiente de nosotros. Asumimos esta posición para efectos de la discusión que sigue, sin que esto signifique que la defendamos particularmente desde el punto de vista epistemológico o didáctico. Habiendo hecho esta aclaración, podemos ver que la representación de un objeto matemático *no* es el objeto en sí mismo. La mancha de tinta que se encuentra dentro de las siguientes comillas “2” no es el número dos. Es una representación de ese objeto matemático.

En el caso del ejemplo del comienzo de esta sección, cada una de las representaciones de ese objeto matemático (una función cuadrática específica) resalta algunos aspectos particulares del objeto en cuestión. Como nosotros no podemos “ver” el objeto, debemos buscar conocer todas sus características. Para ello, resulta importante estudiar sus diversas representaciones.

A manera de metáfora, podemos imaginarnos que el objeto que estudiamos es la cara de una persona desconocida que se encuentra en otro lugar. Para conocerla, podemos tener diversas representaciones. Por ejemplo, una foto a color, una foto en blanco y negro, una imagen de computador enviada por Internet, un dibujo hecho por un artista y la descripción verbal de un amigo. Es posible que cada una de estas representaciones nos dé información importante sobre lo que queremos conocer y que estas informaciones se complementen. Dado que todas estas representaciones son representaciones de una misma persona, ellas tienen muchas cosas en común. En cada una de las representaciones podremos identificar el hecho de que la persona tiene el cabello oscuro o los ojos claros. En otras palabras, podremos identificar relaciones entre elementos pertenecientes a diversas representaciones.

El hecho de que se represente un mismo objeto de diferentes maneras da lugar a esta relación natural entre elementos pertenecientes a cada una de las representaciones. Dado que es un único objeto y que cada representación tiende a resaltar facetas particulares de ese objeto, podemos establecer relaciones entre los elementos que componen las representaciones. Aunque en el caso de la metáfora de la cara de una persona esto parece evidente, en el caso de las representaciones de un objeto matemático, este punto es muy importante desde la perspectiva didáctica. En el caso del objeto matemático que presentamos al comienzo de esta sección, podemos, por ejemplo, establecer una conexión entre el término “3” de la representación simbólica, el corte de la gráfica con el eje *y*, y el valor en la segunda columna de la fila que en la primera tiene el término “0”. Estos tres elementos, pertenecientes a tres representaciones diferentes, se encuentran relacionados porque representan una misma faceta del objeto en cuestión.

DEFINICIÓN DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

El término "sistema de representación" tiene diferentes significados en la educación matemática. De hecho, un grupo de investigadores pertenecientes al PME[1] ha trabajado en el tema y producido una categorización de estos significados (Goldin y Janvier, 1998, p. 1-2).

Buscamos utilizar los sistemas de representación para *representar* diferentes facetas de un objeto matemático y trabajamos con los sistemas de representación bajo el supuesto de que se ciñen a un conjunto de reglas que se encuentran condicionadas por las matemáticas, en general, y por el objeto matemático específico, en particular. Por estas razones, consideramos que la definición de Kaput (1992) sobre sistema de notación se adapta a nuestras necesidades. De acuerdo con esta definición (p. 523)[2],

> *un sistema de notación es un sistema de reglas para*
> *(i) identificar o crear caracteres,*
> *(ii) operar en ellos y*
> *(iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)*

Esta definición de sistema de representación no es exclusiva de las matemáticas. Por ejemplo, si miramos la definición que dimos de mapa conceptual, podemos percibir que éste es un sistema de representación. La definición de Lanzing (1998) que afirma que en un mapa conceptual "los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que

1. Las siglas PME representan "Psychology of Mathematics Education". Este es una comunidad de investigadores en educación matemática que se reúne anualmente y que organiza, entre otras actividades, grupos de trabajo en diversos temas.
2. Complementamos esta definición de Kaput con la primera de las definiciones de Goldin y Janvier, definición que identifica "una situación física externa estructurada, o un conjunto de situaciones estructuradas en un ambiente físico que pueden ser descritas matemáticamente o pueden interpretarse en el sentido de involucrar ideas matemáticas" (p. 1). Esta definición permite introducir, como parte de las características de un objeto matemático, al conjunto de fenómenos reales cuyo análisis puede requerir de modelos matemáticos que involucran dicho objeto. Por esa razón, en los mapas conceptuales que describen un objeto matemático es importante incluir un submapa que hemos llamado "aplicaciones".

indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos" se adapta a las condiciones de Kaput para un sistema de representación.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y ACTIVIDADES MATEMÁTICAS

La definición de sistema de representación que acabamos de proponer es muy potente cuando se utiliza en matemáticas. Gracias a ella, Kaput puede describir las actividades matemáticas que tienen lugar en las matemáticas escolares. Él propone que estas actividades matemáticas se pueden clasificar en cuatro categorías:

1) transformaciones sintácticamente restringidas dentro de un sistema particular, con o sin referencia a otros significados externos;

2) traducciones entre sistemas de notación, incluyendo la coordinación de acciones a través de sistemas de notación;

3) construcción y verificación de modelos matemáticos, lo que es equivalente a la traducción entre aspectos de una situación y conjuntos de notaciones; y

4) la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o "entidades cognitivas" que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización.

La primera actividad, las transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación, se refiere a la manipulación de una o más representaciones dentro de un mismo sistema de representación para efectos de transformarlas en otras representaciones (en general, equivalentes). Este es el caso, por ejemplo, de la utilización del procedimiento de completación de cuadrados para transformar la forma simbólica $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en la forma equivalente $f(x) = (x-2)^2 -1$. O también, continuando dentro del sistema de representación simbólico, el caso de utilizar la fórmula cuadrática para transformar la expresión simbólica $x^2 - 4x + 3 = 0$ en la expresión equivalente $x = 1$, $x = 3$. También es el caso, dentro del sistema de representación gráfico, de utilizar traslaciones para obtener la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ a partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

La segunda actividad tiene que ver con la relación de uno o más elementos pertenecientes a un sistema de representación con otros elementos de otro sistema de representación. Es el caso de la relación del término “3” de la expresión simbólica *(x)* = $x^2 - 4x + 3$, con el punto de corte de la gráfica con el eje *y*, y con el valor en la segunda columna de la fila que en la primera tiene el término “0”. También es el caso de la relación entre los términos “2” y “1” de la expresión simbólica $f(x) = (x\text{-}2)^2$ -1, con las coordenadas del vértice de la parábola representada en el sistema de representación gráfico y con la fila de la tabla cuyo valor en la primera columna es “2”. Un ejemplo adicional de esta actividad, es la traducción de los términos “1” y “3” de la expresión simbólica $\mathrm{f}(x) = (x - 1)(x - 3)$ –que es equivalente a las dos anteriores– con los cortes de la gráfica con el eje *x*, y con las filas de la tabla cuyo valor en la segunda columna es “0”.

La tercera actividad, la de modelaje, se refiere al proceso de representar, dentro de un sistema de representación matemático una situación que no está descrita en estos términos. Tomemos el ejemplo del problema clásico de hallar las medidas de un lote rectangular de tal forma que, teniendo un perímetro fijo (e.g., 40), se obtenga la mayor área posible. Para realizar esta actividad, se hace necesario expresar la condición sobre el perímetro en una expresión simbólica del tipo $2x + 2y = 40$ y, con base en esta relación, expresar el área del lote como función de una de las medidas del mismo: $A(x) = x(20 - x)$. De esta forma, se ha representado en un modelo matemático la situación original, donde el problema consiste en hallar el valor de *x* para el cual $A(x)$ es máximo. La resolución de este problema, dentro del contexto matemático, requiere, entonces de la aplicación de las dos primeras actividades matemáticas. Hay que transformar sintácticamente la expresión en $A(x) = -x^2 + 20x$, y después en $A(x) = -(x -10)^2 + 100$. Con esta expresión, en el sistema de representación simbólico, se pueden traducir dos de sus elementos (10 y 100) al sistema de representación gráfico para hallar que el punto máximo de la gráfica se encuentra en su vértice (10,100) y regresar a la situación original para responder la pregunta afirmando que el lote debe ser un cuadrado de lado 10 y que tiene área máxima de 100.

La cuarta actividad, la “materialización”, es de carácter esencialmente cognitivo y no la vamos a considerar aquí.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y MAPAS CONCEPTUALES EN MATEMÁTICAS

En el apartado anterior pretendimos mostrar la potencia de la noción de sistema de representación como medio para representar las características y las relaciones de un objeto matemático y para identificar las actividades matemáticas que son específicas a ese objeto. No obstante, los sistemas de representación se pueden mirar como un elemento organizador de esta información. En este apartado buscamos mostrar cómo los mapas conceptuales se pueden convertir en un medio representación adecuado de esta información. El primer punto que hay que resolver consiste en decidir cuál es la naturaleza de los elementos y de las relaciones que definen el mapa conceptual en cuestión. Podríamos hablar de conceptos y procedimientos y de relaciones entre ellos. También podríamos identificar las características o facetas del objeto y las relaciones entre ellos. Como se ve, éstas son diferentes aproximaciones a un mismo problema. Lo que resulta evidente es que los sistemas de representación son el eje organizador de la información que queremos representar. La figura 8 muestra un mapa conceptual para el problema del área del lote que consideramos en el apartado anterior.

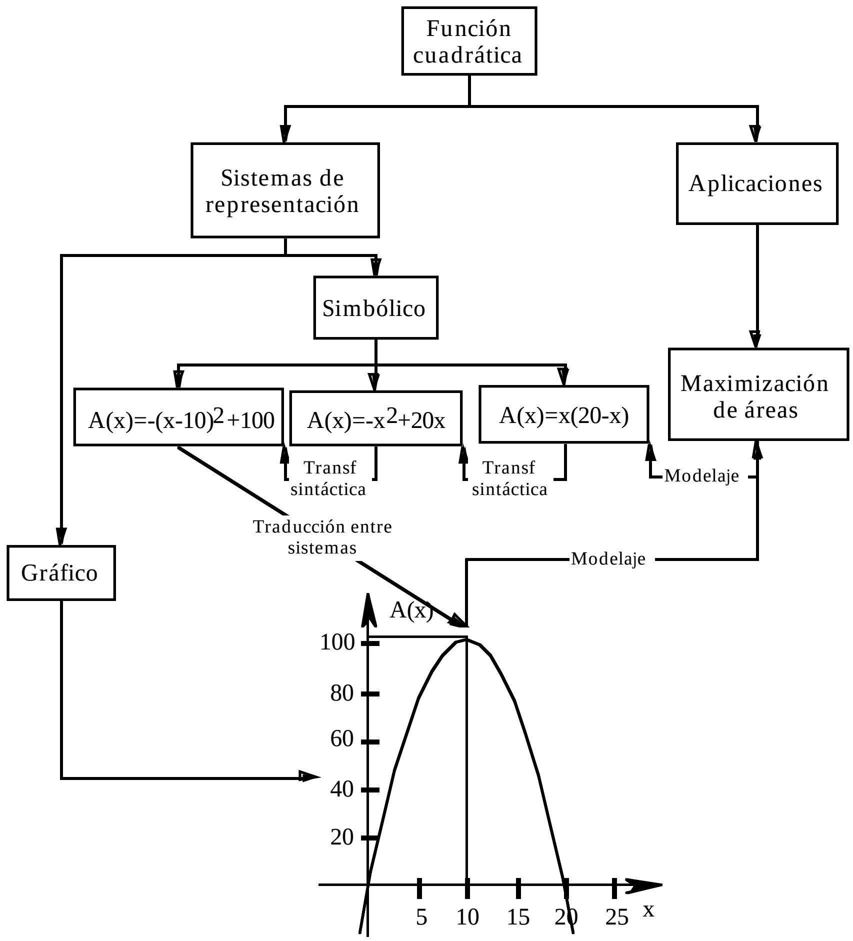


Figura Nº 8. Mapa conceptual para el problema de área

La noción de sistema de representación permite organizar la representación de un objeto matemático en un mapa conceptual. Cada sistema de representación es un submapa. La descripción de los fenómenos o situaciones cuyo análisis requiere de la utilización de un modelo que involucra al objeto es otro submapa, que denominamos “aplicaciones”. Cuando el objeto matemático se representa en un mapa conceptual, se identifican dos tipos de objetos en la gráfica: elementos y relaciones (o conexiones). Las relaciones pueden ser de diferentes tipos. En otras palabras, un elemento puede estar relacionado:

a. con otros elementos dentro de la forma particular o dentro del sistema de representación en el que se encuentran;

b. con una representación de ese mismo elemento en otro sistema de representación;

c. con un fenómeno que lo involucra; o

d. con dos elementos interconectados para los cuales sirve de puente.

Vemos entonces que los sistemas de representación y los mapas conceptuales ofrecen una perspectiva para caracterizar las actividades matemáticas escolares. En un mapa conceptual podemos, de acuerdo con la enumeración anterior, identificar cada una de las actividades matemáticas descritas por Kaput. La relación o conexión de elementos dentro de un mismo sistema de representación (a) corresponde a las transformaciones sintácticas (1). Estas transformaciones sintácticas permiten hacer la conexión entre dos o más elementos pertenecientes a un mismo sistema de representación. La relación entre dos representaciones de un mismo elemento en dos sistemas de representación (b) se refiere a la traducción entre sistemas de representación (2). La relación de un elemento con un fenómeno (elemento del sistema de representación de aplicaciones, c) tiene que ver con la construcción de modelos (3). Finalmente, "la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o 'entidades cognitivas' que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización" (4) puede identificarse en un mapa conceptual al analizar el lugar que ocupan los procedimientos dentro de la estructura (d). Estos pueden ser el objeto mismo de la descripción o ser conexiones que establecen relaciones entre dos elementos del mapa.

En la figura 8 hemos identificado conexiones que corresponden a los tres primeros tipos de actividades matemáticas propuestas por Kaput. Es importante resaltar que lo que hemos presentado en este mapa conceptual es tan solo una porción de lo que podría ser el mapa conceptual de la función cuadrática (ver apartado siguiente) o de una función cuadrática particular como la que se considera para este problema. El mapa conceptual de la figura 8 presenta únicamente el *modelo matemático* correspondiente al problema. Este modelo parte del submapa llamado *aplicaciones* en el que hemos identificado uno de los múltiples tipos de fenómenos que pueden ser modelados por la función cuadrática. El proceso de modelaje pasa por unas etapas que no están representadas en el mapa y que tienen que ver con la formulación matemática del perímetro y la expresión del área del lote como producto de sus dos dimensiones, para llegar a expresar esta área en función de una de las dimensiones. El mapa nos muestra que la resolución del problema, una vez modelado, requiere de la aplicación de las dos primeras actividades matemáticas. Es necesario transformar sintácticamente la expresión inicial en una expresión intermedia para llegar a la expresión simbólica que identifica el vértice. En seguida, se hace una traducción entre el sistema de representación simbólico y el gráfico para identificar el vértice como el punto máximo de la función y resolver el problema dentro de las representaciones matemáticas. Finalmente, se realiza el proceso inverso de modelaje para obtener la solución al problema original.

FUNCIÓN CUADRÁTICA. UN EJEMPLO

El análisis que hacemos en este apartado, junto con el mapa conceptual descrito al final del mismo, pretenden presentar un ejemplo del tipo de producciones que es posible realizar con base en los sistemas de representación y los mapas conceptuales. Aunque la esencia de este análisis y de este mapa conceptual se encuentra centrado en el estudio del contenido matemático, su intención es servir de base para la exploración, el análisis y la producción de estrategias que aborden la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de este tema. Iniciamos con unas consideraciones generales sobre la función cuadrática. Después presentamos un resumen del mapa conceptual. Finalmente presentamos en detalle dicho mapa conceptual.

CONSIDERACIONES INICIALES

En primera instancia, debemos diferenciar el término "función cuadrática" del término "cuestión cuadrática". El primero impone la visión funcional del objeto en cuestión, mientras que el segundo permite ampliar el objeto de estudio a aquello en lo se involucra el proceso de "elevar al cuadrado". Desde esta perspectiva, la cuestión cuadrática aparece en múltiples ocasiones en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. No obstante, este objeto matemático asume una presencia clara cuando se trata la ecuación cuadrática y la problemática de su resolución. Allí aparece uno de los temas clásicos de las matemáticas de la secundaria: la fórmula cuadrática. Otro lugar "clásico" en el que se trata la cuestión cuadrática es el teorema de Pitágoras, donde se hace necesario elevar al cuadrado y sacar raíz cuadrada. Hay otros momentos importantes en los que la cuestión cuadrática aparece en las matemáticas escolares. Por ejemplo, cuando se consideran las cónicas y sus gráficas. Finalmente, la función cuadrática tiene también un lugar preponderante, en segundo lugar únicamente con respecto a la función lineal. En resumen, la cuestión cuadrática es un tema que permea por una buena parte de las matemáticas de la educación media (Gómez y Carulla, 1999). ¿Cómo describir, en términos de Ruiz (1993), las invariantes esenciales de este objeto matemático desde la perspectiva de las matemáticas escolares?

Como veremos más adelante, para describir un objeto matemático es necesario asumir una posición con respecto a la "ventana" que se quiere utilizar para hacerlo. En nuestro caso, hemos escogido dos dimensiones que determinan nuestra posición: los sistemas de representación y la aproximación funcional. La primera dimensión porque permite introducir "orden" en la multiplicidad de elementos y relaciones que caracterizan un objeto matemático y la segunda porque se ha reconocido a la noción de función como eje conductor de las matemáticas del último ciclo de secundaria. En todo caso, esta visión funcional restringe parcialmente el tipo de presentación que se puede hacer del objeto en cuestión. En particular, este tipo de aproximación no permite considerar las expresiones de la forma $\mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}y^2 + \mathrm{d}y + \mathrm{e}xy + \mathrm{f} = 0$ que, desde la perspectiva gráfica, se relacionan con las cónicas. En todo caso, ella obliga a "ubicar" los elementos en una posición diferente de la que podrían tener si se utilizar otra aproximación (por ejemplo, las diversas manipulaciones simbólicas involucradas en la resolución de la ecuación cuadrática aparecen en diversos lugares de la descripción de la cuestión cuadrática, dependiendo de la visión que se asuma para hacer esta descripción).

La descripción que haremos a continuación muestra el alto nivel de complejidad de la función cuadrática como objeto de enseñanza en las matemáticas escolares. Su tratamiento simbólico involucra diversas formas; su tratamiento gráfico es rico en elementos y relaciones; su tratamiento geométrico presenta diversas aproximaciones a su construcción; y es un objeto que se encuentra involucrado en gran número de fenómenos de diversos tipos. Veremos cómo toda esta riqueza se multiplica cuando se tiene en cuenta que cada elemento de un sistema de representación se encuentra relacionado con otros elementos en otros sistemas de representación, y que existen múltiples conexiones dentro de cada uno de estos sistemas.

INTRODUCCIÓN AL MAPA CONCEPTUAL DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Dada la función cuadrática, tomamos en cuenta para su descripción aquellos conceptos que aparecen en el saber escolar colombiano. Para la elaboración del mapa no tuvimos en cuenta conceptos tales como transformaciones geométricas en el plano; teoremas y resultados generales comunes a todas las funciones polinómicas (aunque muchas de las características de la función cuadrática están ligadas a ellas); el concepto de comparación de funciones (por considerarlo de carácter general y no específico a la función cuadrática); y derivadas e integrales. Una vez identificados los conceptos que íbamos a tener en cuenta para el mapa, definimos cuatro categorías a través de las cuales se podían representar los conceptos seleccionados. Cada categoría poseía un lenguaje y una sintaxis propios provenientes de campos matemáticos que consideramos importantes para representar el objeto matemático. Por otro lado, dada la importancia de las aplicaciones de la función cuadrática, tuvimos en cuenta una quinta categoría de origen diferente a las cuatro primeras. Se trata de las aplicaciones de la función cuadrática. Aquí se busca describir los fenómenos cuyo análisis requiere de modelos que involucran este objeto matemático. La organización general de mapa se aprecia en la figura 9.

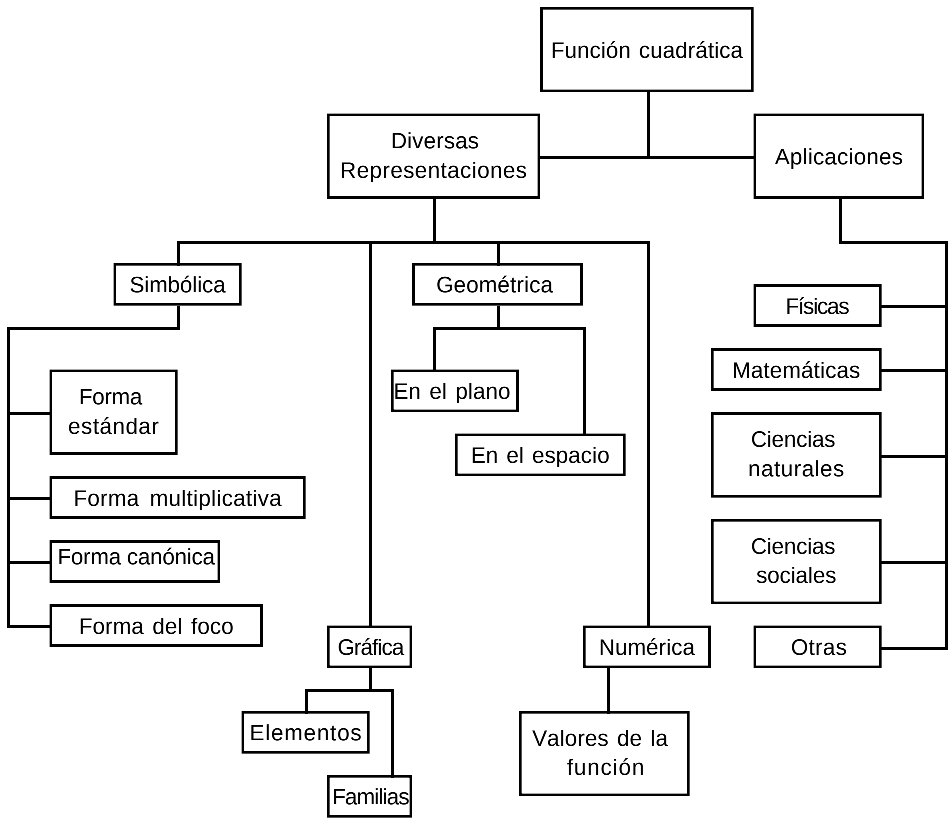


Figura Nº 9. Mapa general

Simbólico (S)

El lenguaje utilizado es el propio del campo algebraico y las reglas que lo sustentan son las de la estructura algebraica de los números reales. Este sistema de representación se organizó de acuerdo con las cuatro formas simbólicas que representan la función cuadrática (estándar, canónica, multiplicativa y de foco). Para cada una de ellas se analizó el significado de cada uno de los parámetros con el fin de describir las características de la función cuadrática. Los parámetros nos permiten describir aspectos como crecimiento, decrecimiento, concavidad, puntos críticos, máximos, mínimos y raíces. Por otro lado se describió la relación de equivalencia entre las diferentes formas simbólicas explicitando los procesos algebraicos (traducciones sintácticas) que permiten transformar unas expresiones en otras. De acuerdo con lo anterior, la representación simbólica tiene dos grandes submapas. En el primero se le da significado a los parámetros y en el segundo se expresan los parámetros de cada forma simbólica en función de los parámetros de las otras formas. En el segundo submapa se puede apreciar cómo las técnicas algebraicas no son objetos, sino relaciones entre objetos. Este hecho que refuerza la visión funcional (figura 10).

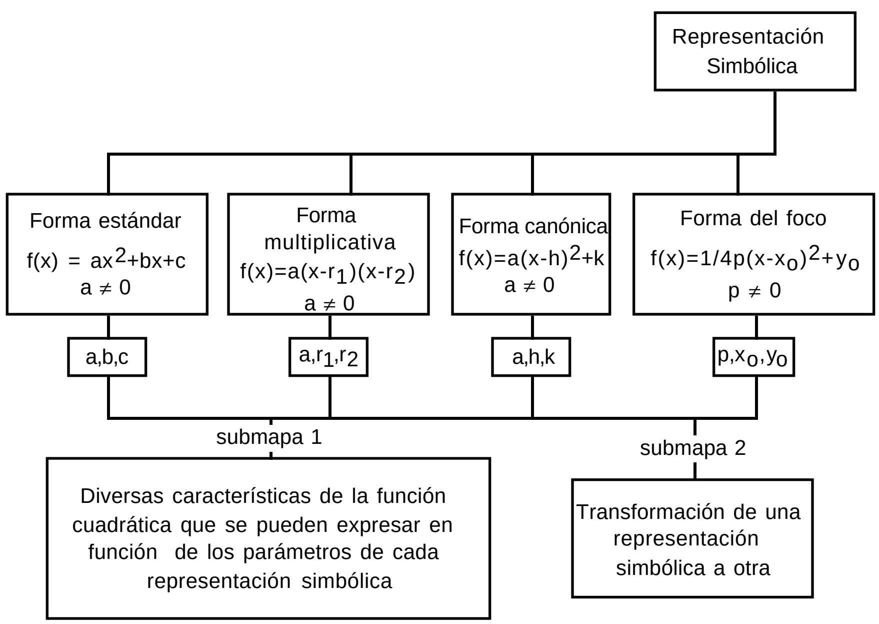


Figura Nº 10. Representación simbólica

Gráfico (GR)

Cuando hablamos del sistema de representación gráfico, hacemos referencia a la representación en el plano cartesiano. Por lo tanto, el lenguaje y las reglas sintácticas son las del plano cartesiano. En el mapa (figura 11) se encontrarán gráficas y frases que hacen referencia a lo gráfico. Aquí no entran representaciones, como la recta numérica, que para otros temas matemáticos pueden jugar un rol importante. Este sistema cuenta con dos submapas, uno que describe los elementos gráficos de la función cuadrática y sus características como foco, directriz, segmento focal, parábola y gráfica. El otro que, a partir de la noción de familia, describe el rol de los parámetros con respecto a la gráfica de la función en donde se hace una conexión implícita entre los parámetros de las formas simbólicas y sus efectos en las gráficas.

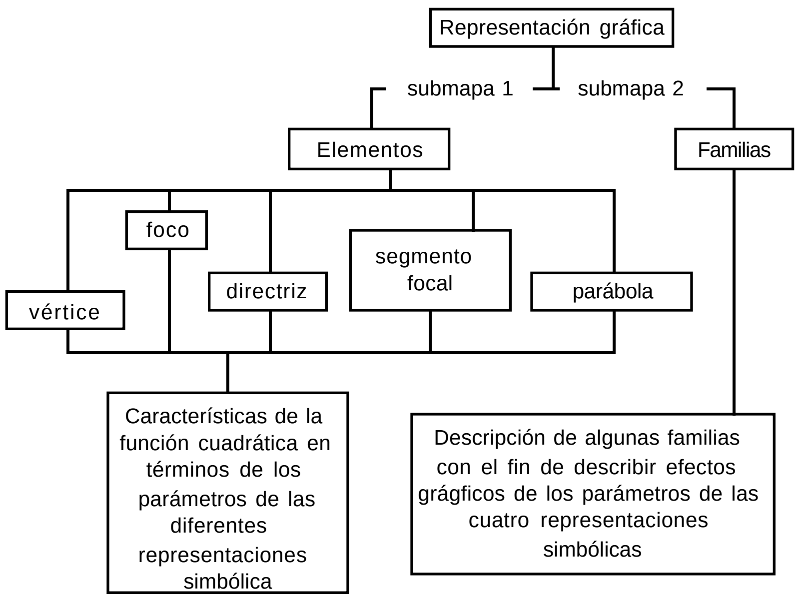


Figura Nº 11. Representación gráfica

Geométrico (G)

El lenguaje que se utiliza en este sistema de representación es el de la geometría (figura 12). Los conceptos aquí descritos son geométricos. Aunque en este sistema de representación también se pueden hacer gráficos, se diferencia del anterior porque no estamos dotando el plano del sistema de referencia cartesiano. Como se puede ver en el mapa, tanto en el sistema gráfico, como en el geométrico, se encuentran descritas características geométricas pero en lenguajes diferentes. Esta representación tiene dos submapas. Uno que describe la construcción de la parábola en el plano de tal manera que se puede ver el rol del vértice y la directriz en la formación de la parábola. El otro que describe la construcción en el espacio presentando la parábola como una cónica.

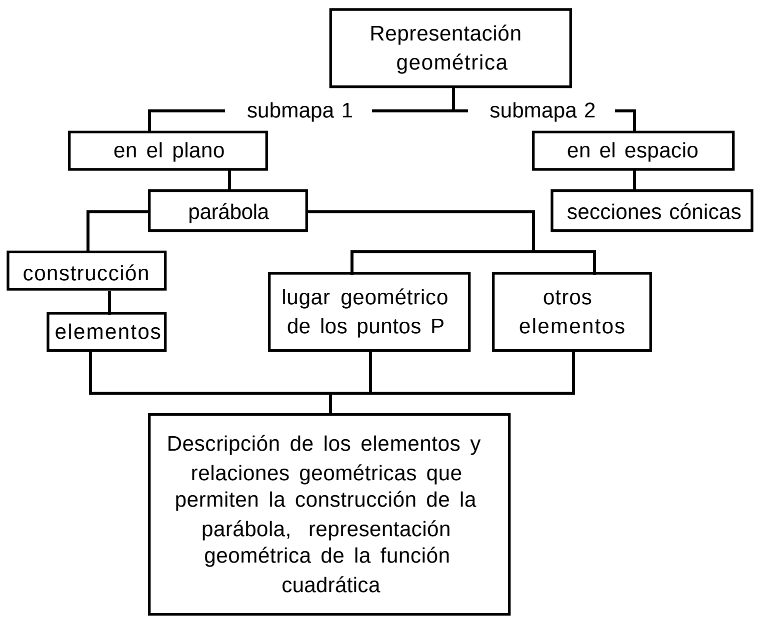


Figura Nº 12. Representación geométrica

Numérico (N)

En este sistema de representación hablamos de los valores numéricos de la función. Estos valores se pueden representar de diferentes formas. Por un lado, valores específicos para un x determinado. Por el otro, los valores se pueden agrupar en una tabla. Al dar valores a la función, estamos en una representación discreta. El mapa (figura 13) se divide en dos submapas: uno en el que se describe, en términos generales, lo que es una tabla de valores para la función cuadrática; y otro en el que se destacan los valores especiales de la función cuadrática. Estos valores especiales son, por ejemplo, aquellos para los que la función se anula.

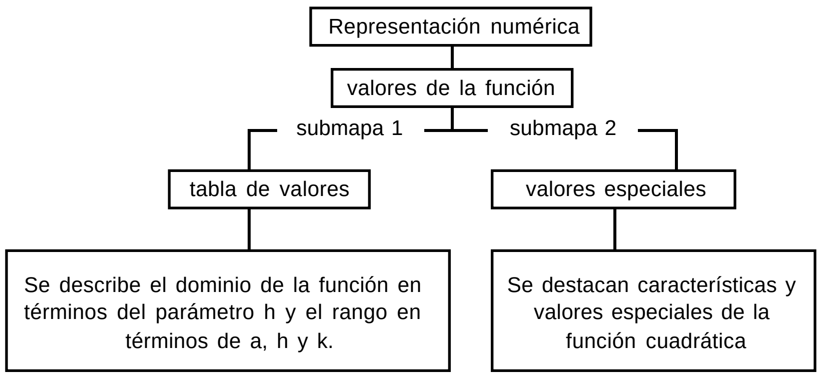


Figura Nº 13. Representación numérica

Aplicaciones

Para esta parte del mapa se hubiera podido pensar en cómo con palabras representamos a la función cuadrática. Sin embargo, para efectos de nuestro trabajo queríamos describir las aplicaciones de la función cuadrática. El significado que le dimos a esta parte del mapa tiene que ver con la manera cómo, con base en lenguajes no matemáticos, podemos representar situaciones, tanto del mundo real como del mundo de las matemáticas, para las cuales se requieren modelos matemáticos que involucran a la función cuadrática. Estas situaciones pueden ser modeladas por conceptos que aparecen en los cuatro sistemas de representación. Esta categoría la dividimos en tres submapas: el primero describe los fenómenos relacionados con la física; el segundo describe aplicaciones dentro de las matemáticas mismas; el tercero incluye otro tipo de aplicaciones (por ejemplo, de las ciencias naturales y las ciencias sociales). Este último no se encuentra desarrollado (figura 14).

Organización del mapa y códigos

El mapa se organiza con los cuatro sistemas de representación y las aplicaciones. Por otro lado, el mapa presenta diferentes tipos de conexiones entre los submapas. Dado que no podemos poner el mapa completo en una sola hoja, se codificaron las conexiones del mapa mediante una caja marcada con la inicial del sistema de representación y el numero de la unión. Las conexiones implícitas se ven cuando, por ejemplo, en el sistema de representación numérico o en el gráfico utilizamos los parámetros de las formas

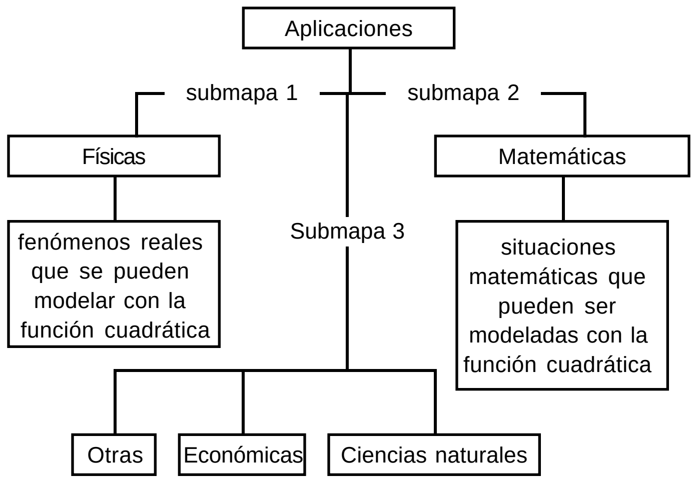


Figura Nº 14. Aplicaciones

simbólicas. Las conexiones entre diferentes sistemas de representación se presentan en cajas de forma no rectangular con flechas. La caja lleva el nombre de la inicial del sistema de representación de donde sale la conexión y la inicial de Otros para indicar la conexión con otros sistemas de representación (SO, GO, GRO, AO, NO). Cuando la conexión es dentro de un mismo sistema de representación se codifica con la doble inicial del sistema de representación de donde sale y entra la conexión (SS, GG, GRGR, AA, NN). La tabla muestra el significado de estos símbolos.

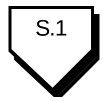
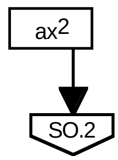
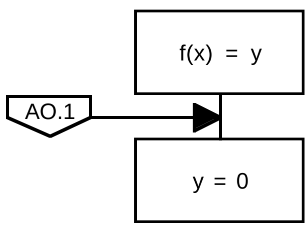
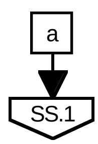
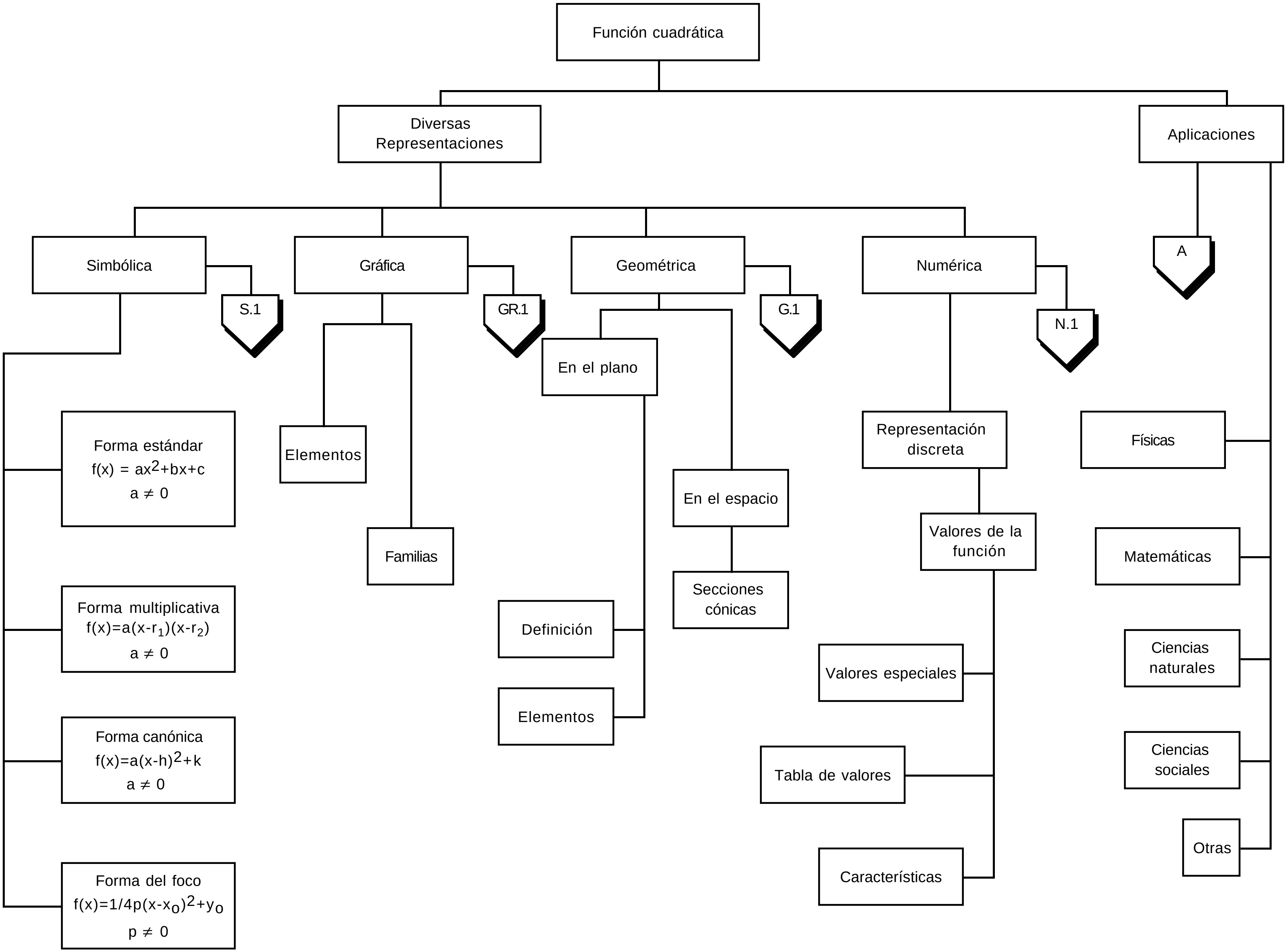
	Expansión del submapa correspondiente. En este caso, mayor detalle del submapa simbólico
	Conexión entre un elemento de un submapa (en este caso el simbólico, S) con otro elemento de otro sistema de representación, O.
	Conexión que viene del submapa “aplicaciones” al sistema de representación simbólico.
	Conexión interna entre un elemento del sistema de representación simbólico a otro elemento del mismo sistema

Tabla Nº 1. Significado de símbolos de conexiones

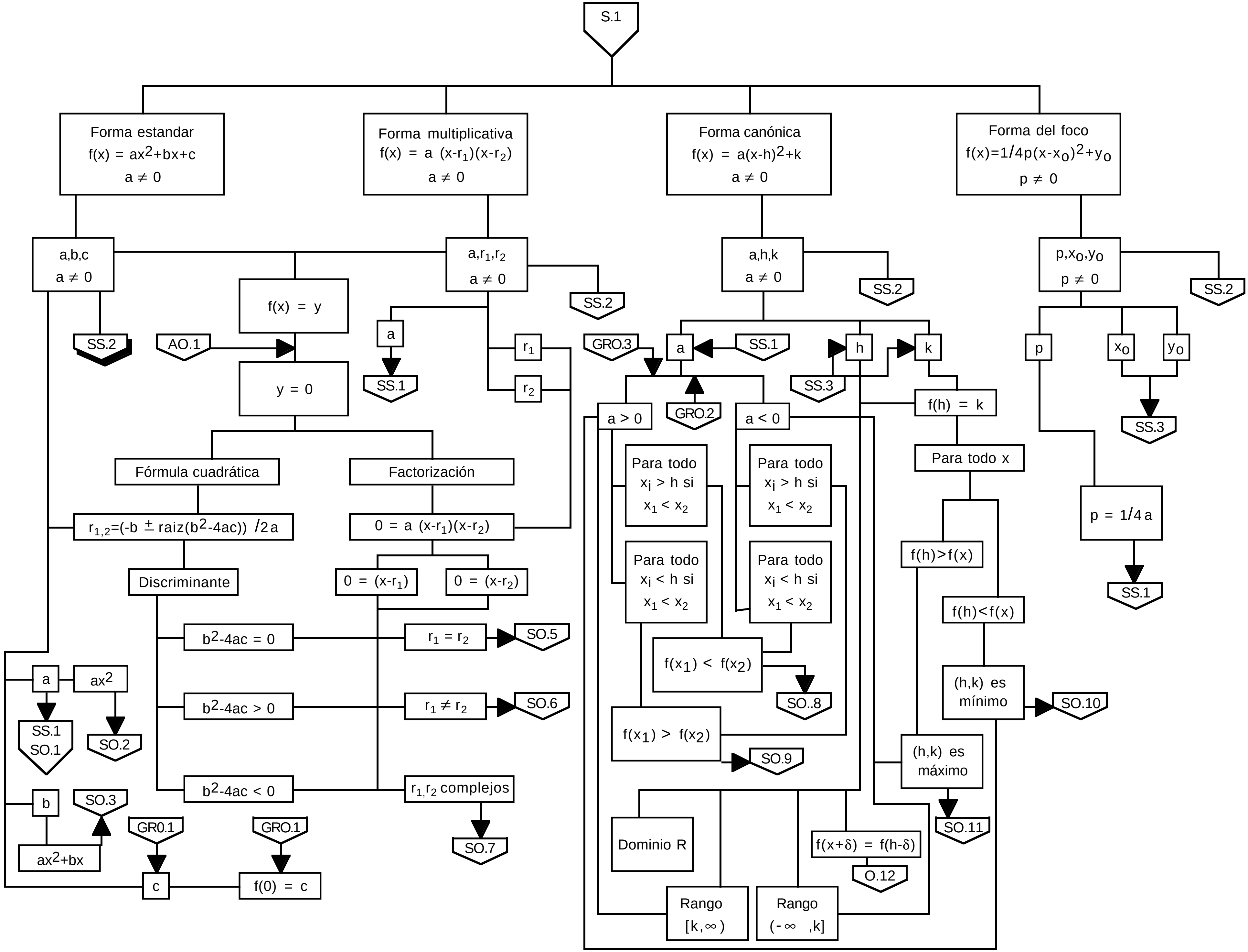
Nuestro interés con este trabajo consiste en mostrar la complejidad de un contenido matemático concreto organizado con base en la visión funcional y en la perspectiva de los sistemas de representación. Adicionalmente, esta manera de organizar el contenido matemático puede ser de utilidad para abordar la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de este y otros contenidos matemáticos.

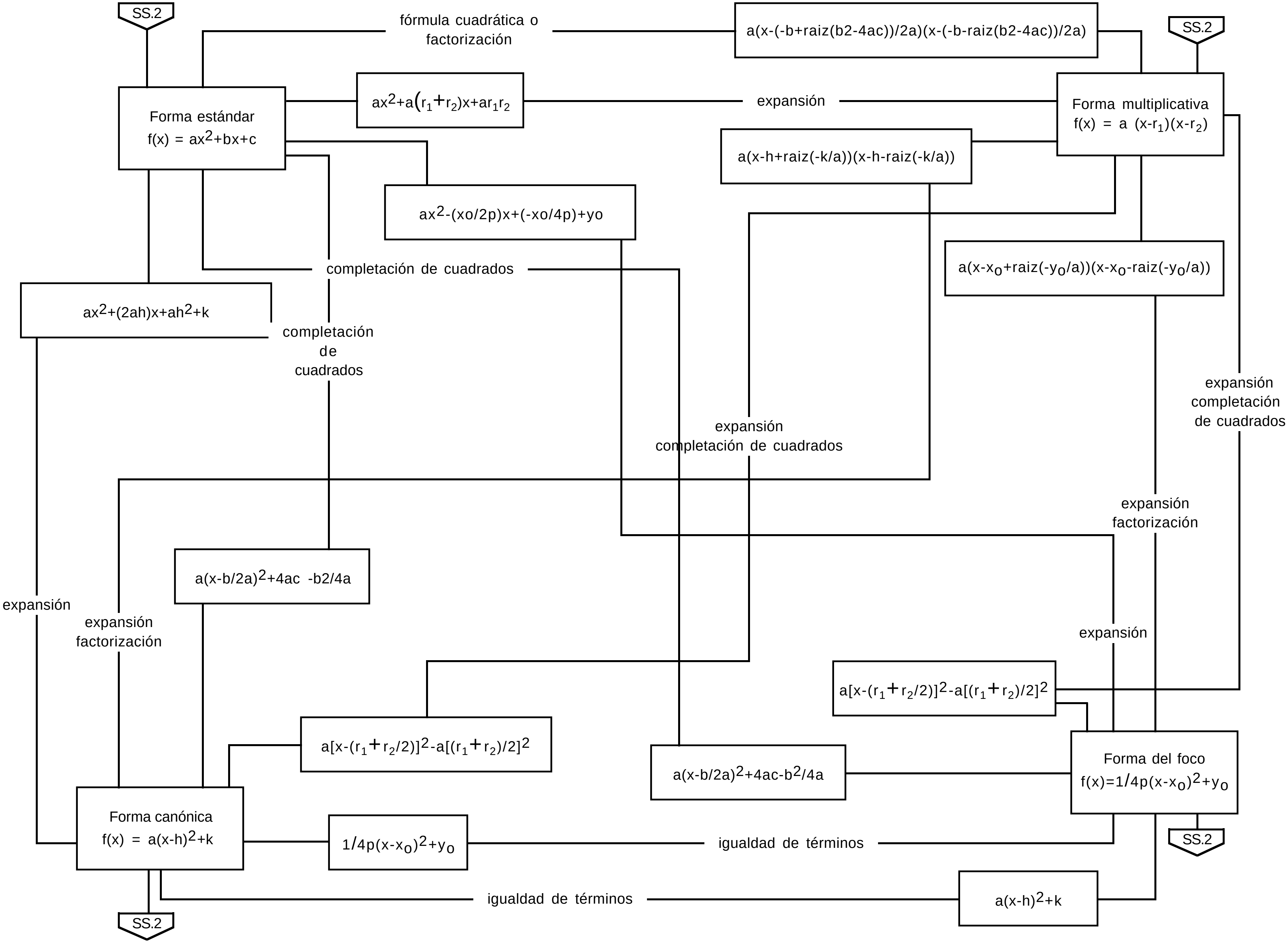
En las páginas siguientes presentamos el mapa conceptual de la función cuadrática.

i

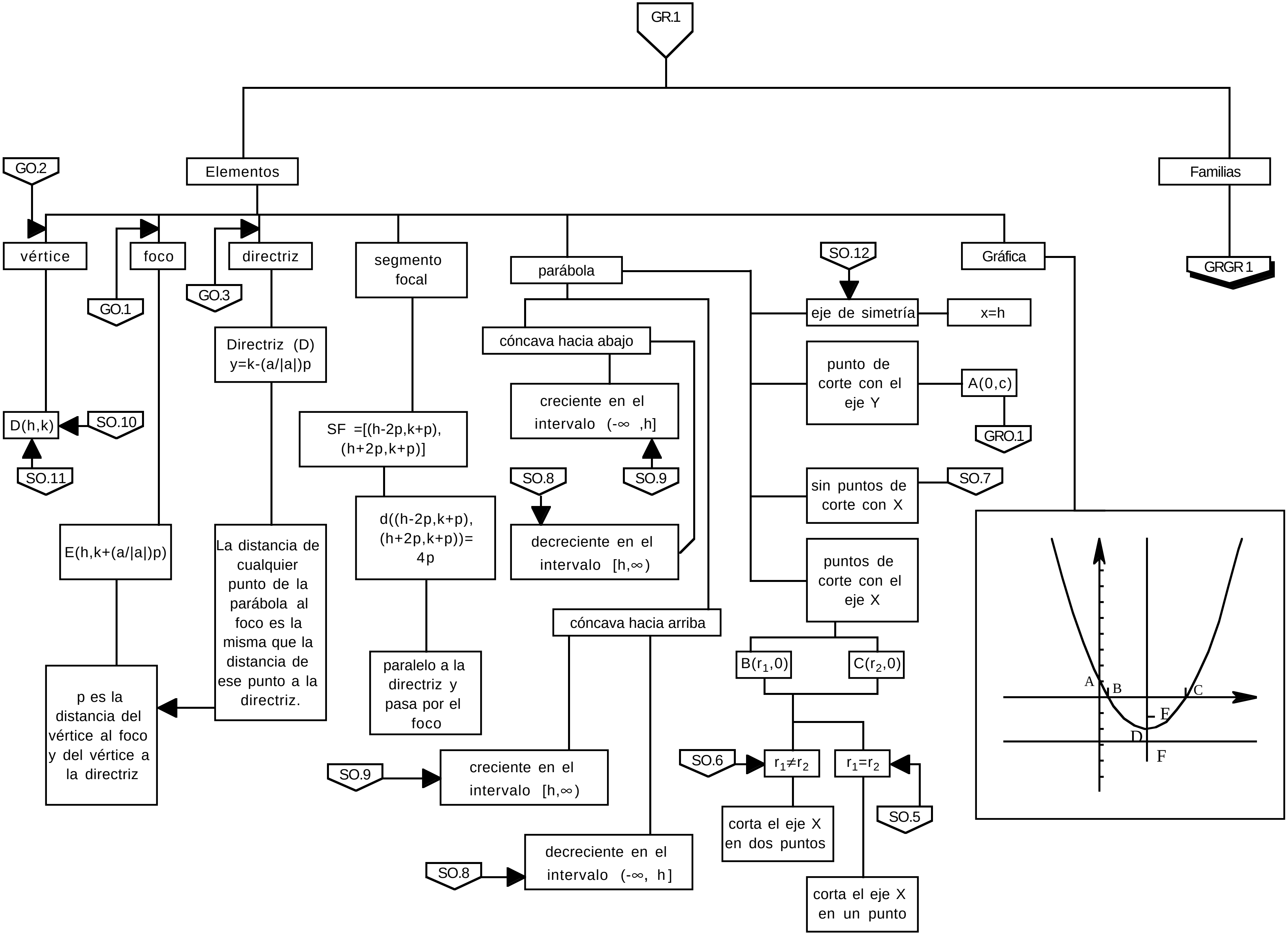


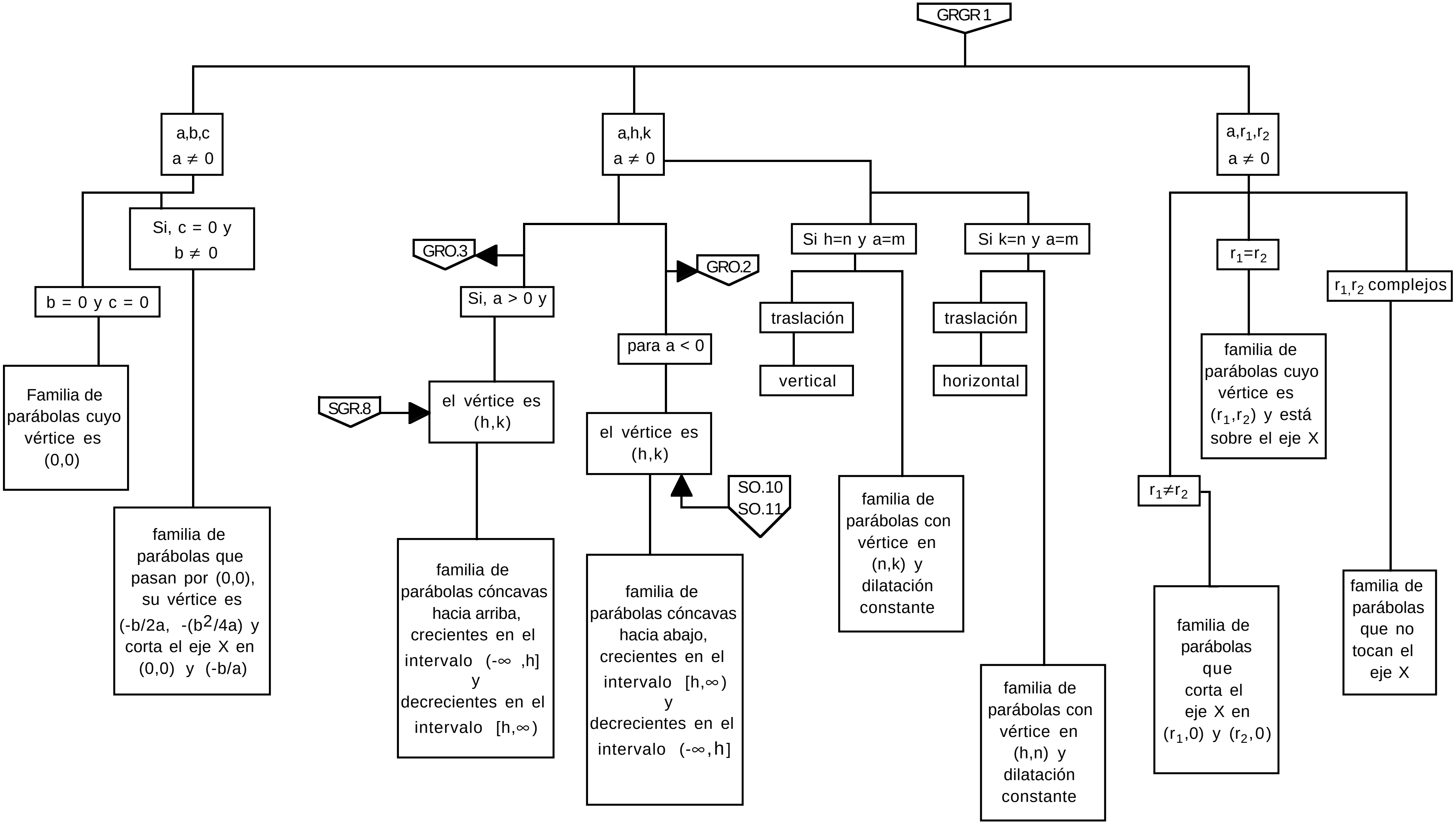
Función cuadrática
Diversas Representaciones
Aplicaciones
Simbólica
S.1
Gráfica
GR.1
Geométrica
G.1
Numérica
N.1
A
En el plano
Forma estándar
$f(x) = ax^2+bx+c$
$a \neq 0$
Elementos
Familias
Representación discreta
Físicas
En el espacio
Valores de la función
Matemáticas
Forma multiplicativa
$f(x)=a(x-r_1)(x-r_2)$
$a \neq 0$
Definición
Secciones cónicas
Ciencias naturales
Valores especiales
Elementos
Forma canónica
$f(x)=a(x-h)^2+k$
$a \neq 0$
Tabla de valores
Ciencias sociales
Otras
Forma del foco
$f(x)=1/4p(x-x_o)^2+y_o$
$p \neq 0$
Características

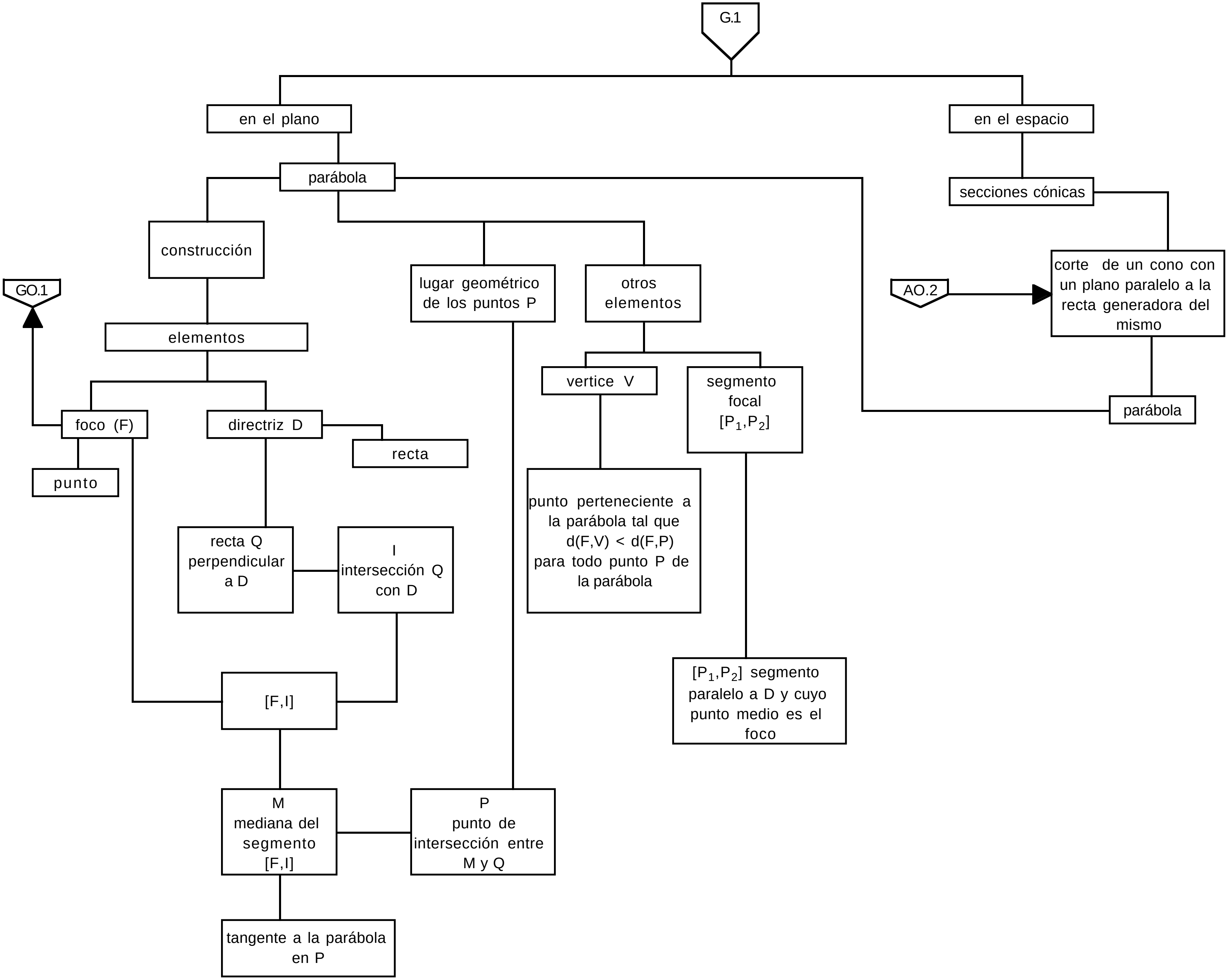

S.1
Forma estandar
f(x) = ax2+bx+c
a ≠ 0
Forma multiplicativa
f(x) = a (x-r1)(x-r2)
a ≠ 0
Forma canónica
f(x) = a(x-h)2+k
a ≠ 0
Forma del foco
f(x)=1/4p(x-xo)2+yo
p ≠ 0
a,b,c
a ≠ 0
a,r1,r2
a ≠ 0
a,h,k
a ≠ 0
p,xo,yo
p ≠ 0
f(x) = y
y = 0
AO.1
SS.2
SS.1
SS.3
GRO.3
GRO.2
a > 0
a < 0
Para todo
xi > h si
x1 < x2
Para todo
xi < h si
x1 < x2
f(x1) < f(x2)
f(x1) > f(x2)
SO..8
SO.9
f(h) = k
Para todo x
f(h)>f(x)
f(h)<f(x)
(h,k) es mínimo
(h,k) es máximo
SO.10
SO.11
p = 1/4 a
Fórmula cuadrática
Factorización
r1,2=(-b ± raiz(b2-4ac)) /2a
0 = a (x-r1)(x-r2)
Discriminante
0 = (x-r1)
0 = (x-r2)
b2-4ac = 0
b2-4ac > 0
b2-4ac < 0
r1 = r2
r1 ≠ r2
r1,r2 complejos
SO.5
SO.6
SO.7
ax2
SO.1
SO.2
SO.3
ax2+bx
GR0.1
GRO.1
c
f(0) = c
Dominio R
Rango
[k,∞)
Rango
(-∞ ,k]
f(x+δ) = f(h-δ)
O.12

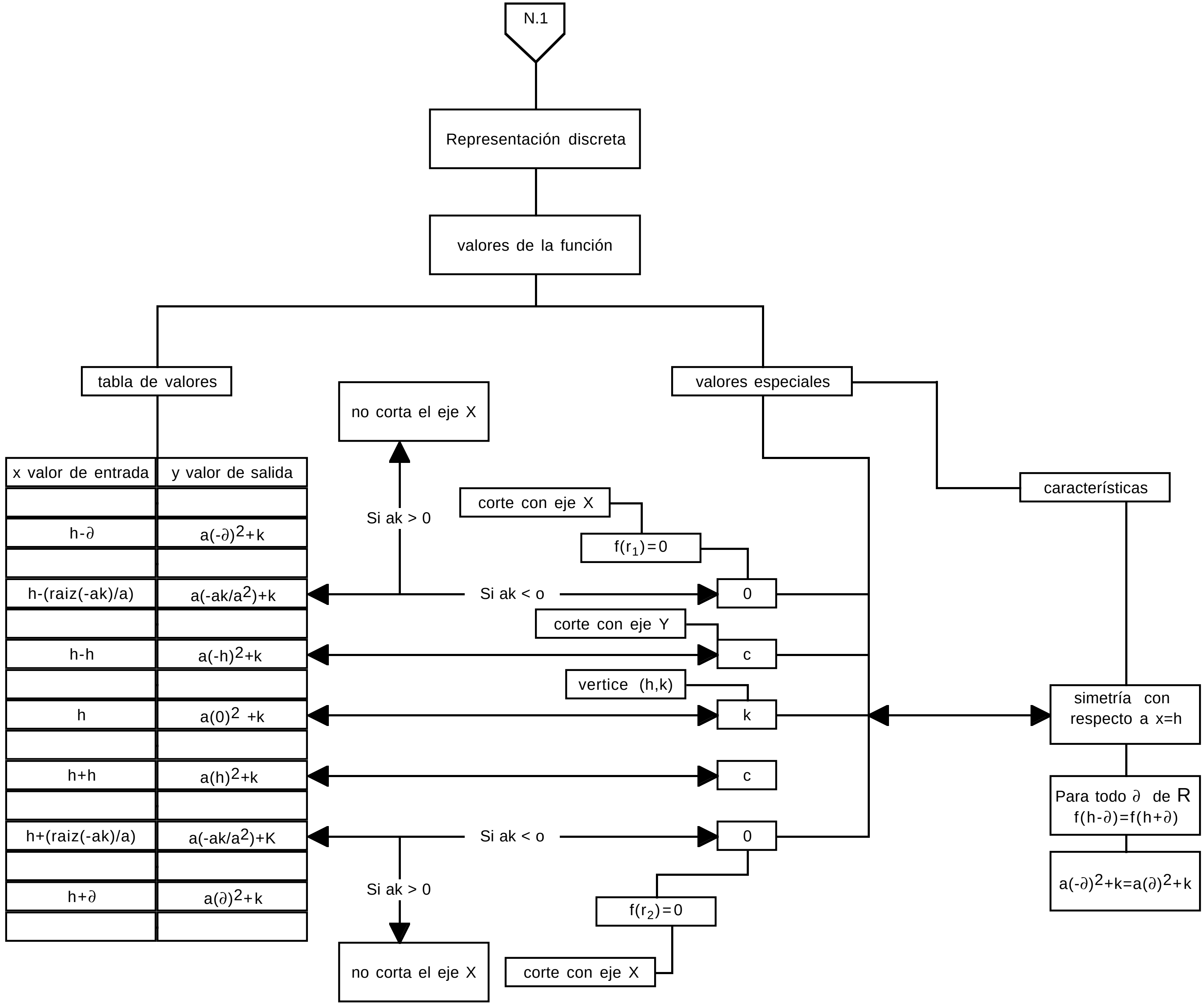


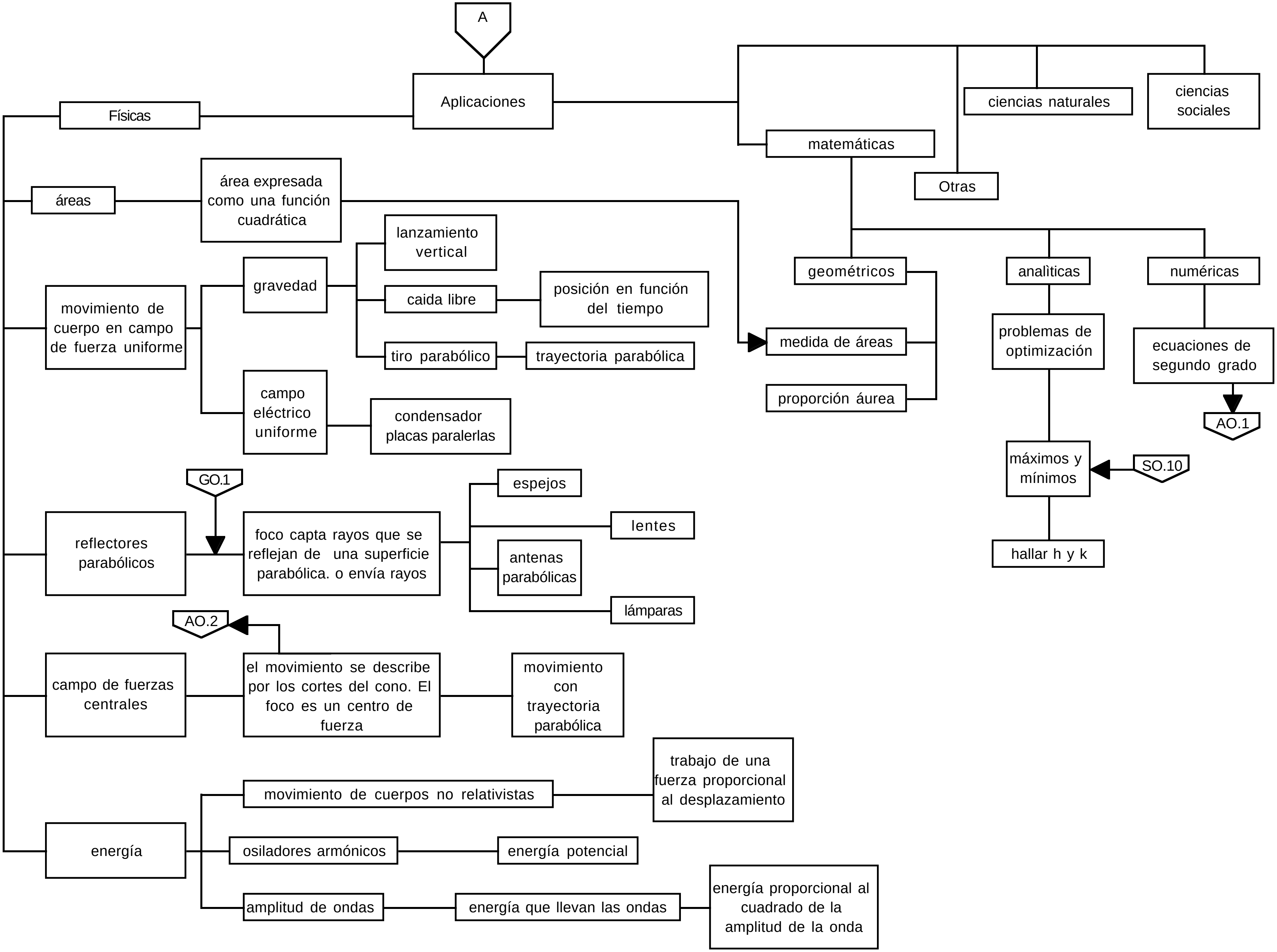
SS.2
fórmula cuadrática o factorización
a(x-(-b+raiz(b2-4ac))/2a)(x-(-b-raiz(b2-4ac))/2a)
SS.2
Forma estándar
f(x) = ax2+bx+c
ax2+a(r1+r2)x+ar1r2
expansión
Forma multiplicativa
f(x) = a (x-r1)(x-r2)
a(x-h+raiz(-k/a))(x-h-raiz(-k/a))
ax2-(xo/2p)x+(-xo/4p)+yo
a(x-xo+raiz(-yo/a))(x-xo-raiz(-yo/a))
completación de cuadrados
ax2+(2ah)x+ah2+k
completación de cuadrados
expansión completación de cuadrados
expansión completación de cuadrados
expansión factorización
a(x-b/2a)2+4ac -b2/4a
expansión
expansión factorización
expansión
a[x-(r1+r2/2)]2-a[(r1+r2)/2]2
a[x-(r1+r2/2)]2-a[(r1+r2)/2]2
a(x-b/2a)2+4ac-b2/4a
Forma del foco
f(x)=1/4p(x-xo)2+yo
Forma canónica
f(x) = a(x-h)2+k
1/4p(x-xo)2+yo
igualdad de términos
SS.2
igualdad de términos
a(x-h)2+k
SS.2


GR.1
Elementos
Familias
GO.2
vértice
foco
directriz
segmento focal
parábola
SO.12
Gráfica
GRGR 1
GO.1
GO.3
eje de simetría
x=h
cóncava hacia abajo
Directriz (D) y=k-(a/|a|)p
punto de corte con el eje Y
A(0,c)
GRO.1
creciente en el intervalo (-∞ ,h]
D(h,k)
SO.10
SF =[(h-2p,k+p), (h+2p,k+p)]
SO.11
SO.8
SO.9
sin puntos de corte con X
SO.7
E(h,k+(a/|a|)p)
La distancia de cualquier punto de la parábola al foco es la misma que la distancia de ese punto a la directriz.
d((h-2p,k+p), (h+2p,k+p))= 4p
decreciente en el intervalo [h,∞)
puntos de corte con el eje X
cóncava hacia arriba
B(r1,0)
C(r2,0)
paralelo a la directriz y pasa por el foco
p es la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz
A
B
C
E
D
F
SO.6
r1≠r2
r1=r2
SO.9
creciente en el intervalo [h,∞)
SO.5
corta el eje X en dos puntos
SO.8
decreciente en el intervalo (-∞, h]
corta el eje X en un punto


GRGR 1
a,b,c
a ≠ 0
a,h,k
a ≠ 0
a,r1,r2
a ≠ 0
Si, c = 0 y
b ≠ 0
b = 0 y c = 0
Familia de parábolas cuyo vértice es (0,0)
familia de parábolas que pasan por (0,0), su vértice es (-b/2a, -(b2/4a) y corta el eje X en (0,0) y (-b/a)
GRO.3
Si, a > 0 y
GRO.2
para a < 0
SGR.8
el vértice es (h,k)
el vértice es (h,k)
SO.10
SO.11
familia de parábolas cóncavas hacia arriba, crecientes en el intervalo (-∞ ,h] y decrecientes en el intervalo [h,∞)
familia de parábolas cóncavas hacia abajo, crecientes en el intervalo [h,∞) y decrecientes en el intervalo (-∞,h]
Si h=n y a=m
Si k=n y a=m
traslación
vertical
traslación
horizontal
familia de parábolas con vértice en (n,k) y dilatación constante
familia de parábolas con vértice en (h,n) y dilatación constante
r1=r2
r1,r2 complejos
familia de parábolas cuyo vértice es (r1,r2) y está sobre el eje X
r1≠r2
familia de parábolas que corta el eje X en (r1,0) y (r2,0)
familia de parábolas que no tocan el eje X


G.1
en el plano
en el espacio
parábola
secciones cónicas
construcción
lugar geométrico de los puntos P
otros elementos
corte de un cono con un plano paralelo a la recta generadora del mismo
GO.1
AO.2
elementos
vertice V
segmento focal [P_1,P_2]
parábola
foco (F)
directriz D
recta
punto
punto perteneciente a la parábola tal que d(F,V) < d(F,P) para todo punto P de la parábola
recta Q perpendicular a D
I intersección Q con D
[F,I]
[P_1,P_2] segmento paralelo a D y cuyo punto medio es el foco
M mediana del segmento [F,I]
P punto de intersección entre M y Q
tangente a la parábola en P


N.1
Representación discreta
valores de la función
tabla de valores
valores especiales
no corta el eje X
x valor de entrada
y valor de salida
h-∂
a(-∂)2+k
h-(raiz(-ak)/a)
a(-ak/a2)+k
h-h
a(-h)2+k
h
a(0)2 +k
h+h
a(h)2+k
h+(raiz(-ak)/a)
a(-ak/a2)+K
h+∂
a(∂)2+k
Si ak > 0
Si ak < o
corte con eje X
f(r1)=0
0
corte con eje Y
c
vertice (h,k)
k
c
0
Si ak < o
Si ak > 0
f(r2)=0
corte con eje X
no corta el eje X
características
simetría con respecto a x=h
Para todo ∂ de R f(h-∂)=f(h+∂)
a(-∂)2+k=a(∂)2+k


A
Aplicaciones
Físicas
matemáticas
Otras
ciencias naturales
ciencias sociales
áreas
área expresada como una función cuadrática
geométricos
analìticas
numéricas
medida de áreas
proporción áurea
problemas de optimización
ecuaciones de segundo grado
AO.1
máximos y mínimos
SO.10
hallar h y k
movimiento de cuerpo en campo de fuerza uniforme
gravedad
lanzamiento vertical
caida libre
posición en función del tiempo
tiro parabólico
trayectoria parabólica
campo eléctrico uniforme
condensador placas paralerlas
GO.1
reflectores parabólicos
foco capta rayos que se reflejan de una superficie parabólica. o envía rayos
espejos
lentes
antenas parabólicas
lámparas
AO.2
campo de fuerzas centrales
el movimiento se describe por los cortes del cono. El foco es un centro de fuerza
movimiento con trayectoria parabólica
energía
movimiento de cuerpos no relativistas
trabajo de una fuerza proporcional al desplazamiento
osiladores armónicos
energía potencial
amplitud de ondas
energía que llevan las ondas
energía proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda

REFERENCIAS

Buzan, T. (1995). *The mind map book*. Londres: BBC Books.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education. Studies in Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Goldin, G. A., Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior.* 17 (1), pp. 1-4.

Gómez, P., Carulla, C. (1999). La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del Distrito Capital [On–line]. http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/RepCuadAnInst.html.

Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 515-556.

McGowen, M. (1998). Cognitive units, concept images, and cognitive collages: An examination of the processes of knowledge construction. *Documento no publicado.* Warwick: University of Warwick.

Novak (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

Novak, J.D. (1990). Concept mapping: A useful tool for science education. *Journal of Research in Sciencie Teaching*. 27 (10), pp. 937-949.

Ruiz, L. (1993). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico. *Documento no publicado.* Granada: Universidad de Granada.

Williams, C. G. (1998). Using concept maps to assess conceptual knowledge of function. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29 (4), pp. 414-421.