Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas [1]

Juan D. Godino, Ángel M. Recio, Rafael Roa, Francisco Ruiz y Juan L. Pareja

Proyecto de Investigación "Edumat-Maestros". Universidad de Granada

Resumen

Mediante la aplicación de algunas nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática se desarrollan criterios para diseñar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basados en el uso de recursos tecnológicos. Los criterios son aplicados al análisis de un recurso virtual orientado al estudio de nociones algebraicas elementales por estudiantes de magisterio en el marco de su formación matemática y didáctica.

1. Introducción

Los recursos didácticos, sean manipulativos o virtuales, pueden ser el soporte para el planteamiento de problemas y situaciones didácticas que promuevan la actividad y reflexión matemática. Como tales recursos tienen unas potencialidades que deben ser hechas realidad por el profesor, lo cual no es inmediato, ya que no es suficiente con el enunciado de las tareas sino que es necesario identificar e implementar los conocimientos matemáticos y la trayectoria de estudio correspondiente. Es ingenuo pensar, como se supone en ciertas posiciones constructivistas sobre el aprendizaje, que el alumno aprende interactuando con los recursos y resolviendo problemas, sin tener en cuenta el papel tanto de las interacciones entre los estudiantes como el papel del profesor. Los conocimientos matemáticos se generan a partir de la resolución de problemas, pero no se reducen a los problemas y técnicas de solución; el progreso matemático, tanto individual como colectivo, tiene lugar cuando se logran generalizar y justificar los procedimientos de solución a tipos de problemas cada vez más amplios.

La disponibilidad de recursos tecnológicos (en la modalidad de "applets" y otros tipos de programas interactivos) destinados a facilitar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es ya en la actualidad muy abundante. Instituciones oficiales en España (Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa, MECD, "Proyecto Descartes") y profesionales a nivel internacional, como el NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), o la **National Library of Virtual Manipulatives (NNLCM),** promueven el desarrollo y difusión de recursos para los distintos contenidos matemáticos y niveles educativos. Empresas comerciales han desarrollado también diversos programas informáticos que han sido objeto de numerosas investigaciones y experiencias de innovación, como las referidas a CABRI, LOGO, DERIVE, etc.

Esta situación plantea un reto a los profesores, formadores de profesores e investigadores en educación matemática ya que la incorporación de estos recursos en el estudio de las matemáticas no es inmediata ni transparente. En el "Research Forum" del PME 25, Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2001) presentaron los resultados de un meta-análisis de más de 600 publicaciones de los últimos diez años con informes de investigaciones y experiencias de innovación sobre el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y las Comunicaciones) en la educación matemática. Este trabajo y otros "surveys" similares (Ruthven y Hennessy, 2002) han constatado el bajo nivel de integración de las TIC en las clases de matemáticas y la diversidad de factores a tener en cuenta, tanto para la evaluación de sus efectos como de las condiciones de implementación. Se constata una tensión entre las altas expectativas del uso de las TIC para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la baja integración en las clases. Parece necesario abordar el tema desde nuevas perspectivas que ayuden a comprender este fenómeno.

La elaboración de criterios de uso, así como herramientas de análisis de las consecuencias instruccionales y cognitivas de su empleo en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas continúa siendo una cuestión abierta. Drijvers, en su reacción al meta-análisis de Lagrange y cols indica que el estudio no logró contribuir a comprender el problema de la integración de las herramientas tecnológicas; la identificación de los aspectos o temas que juegan un papel en la integración de la tecnología en la clase de matemáticas es un fin interesante, pero no quedaron claras cuáles son las dimensiones a tener en cuenta, su naturaleza y marco teórico desde el cual se identifican e interpretan tales dimensiones. Como afirma Masalski (2005, p. ix), "Encontrar modos efectivos de usar la tecnología para la enseñanza, aprendizaje y evaluación en matemáticas todavía puede ser una tarea desalentadora"

En este trabajo vamos a aplicar algunas nociones del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002) para elaborar criterios de diseño y evaluación de recursos, situaciones y trayectorias didácticas. Según este marco teórico es necesario tener cuenta las interacciones entre la trayectoria mediacional con las distintas dimensiones implicadas en el estudio de las matemáticas, esto es, las componentes o dimensiones epistémica, cognitiva, emocional, docente y discente (Godino, Contreras y Font, en prensa). La descripción de los criterios los haremos aplicándolos al análisis de un recurso propuesto para la introducción de nociones algebraicas elementales: la balanza de expresiones algebraicas (NCTM: http://illuminations.nctm.org/tools/index.aspx).

Este recurso ha sido usado en un curso de formación inicial de maestros habiendo sido registradas algunas interacciones de los estudiantes con el mismo. Durante el análisis haremos referencia a algunos incidentes ilustrativos de dicha experiencia relacionados con las interacciones de los estudiantes con el recurso y el papel del formador en el proceso de estudio.

La pauta de análisis que vamos a describir en este trabajo, elaborada desde el marco teórico mencionado, que se resume en la sección 2, puede ayudar a explicar el dilema altas expectativas/ baja integración de los recursos informáticos en las clases de matemáticas, al tener en cuenta la complejidad de las interacciones de las diversas dimensiones y factores implicados. Nuestro análisis puede orientar también en el diseño de recursos tecnológicos y de trayectorias didácticas basadas en los mismos, así como para prever conflictos semióticos potenciales.

Para la elaboración de la pauta de evaluación de los recursos didácticos tendremos en cuenta los conocimientos matemáticos que potencialmente se ponen en juego en el uso del recurso (en su doble faceta, institucional y personal). Dichos conocimientos son analizados teniendo en cuenta los tipos de entidades primarias emergentes de la actividad matemática (situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos) y algunos aspectos de las dualidades cognitivas descritas en el marco teórico de referencia que se resume en la siguiente sección.

2. Síntesis del marco teórico: El enfoque ontesemiótico a la didáctica de las matemáticas

Se trata de un marco teórico desarrollado por Godino y colaboradores que permite analizar conjuntamente el pensamiento matemático, los ostensivos que le sirven de soporte, así como las situaciones y factores que condicionan su desarrollo. Este enfoque teórico se designa como "ontosemiótico" por el papel esencial que se le atribuye al lenguaje y a la categorización de los diferentes tipos de objetos que emergen de la actividad matemática. Se concibe el lenguaje matemático de una manera general, incluyendo como tal la variedad de medios de expresión simbólica, gráfica, etc., y considera como objeto matemático cualquier tipo de entidad real o imaginaria al cual nos referimos cuando realizamos, comunicamos o aprendemos matemáticas.

Este enfoque teórico comienza a partir de las nociones sobre significado institucional y personal de los objetos matemáticos, donde (Godino and Batanero, 1994; 1998), a partir de presupuestos de tipo pragmático, se enfatiza el papel del conocimiento institucional matemático, pero sin quitar importancia a los sujetos individuales, que se consideran como el foco central de los esfuerzos educativos. En el trabajo mencionado se concibe el significado de un objeto matemático (por ejemplo, número real, función, etc.), en términos del "sistema de prácticas realizadas para resolver un cierto tipo de problemas". Una práctica se define como "cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1998, p.182).

Las prácticas, operativas y discursivas, se pueden atribuir a individuos –en cuyo caso se habla de significado personal del objeto, o bien compartida en el seno de una institución – y se consideran como el correspondiente significado institucional. Junto a los sistemas de prácticas, Godino y Batanero introducen la noción de objeto matemático como emergentes de los sistemas de prácticas sociales (respectivamente, personales) ligadas a un campo de problemas.

La teoría de los significados institucionales y personales ha sido extendida en diversos trabajos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, en prensa) incluyendo la noción de función semiótica y una categorización de los objetos matemáticos. Se proponen como tipos de entidades matemáticas primarias las siguientes:

(1) Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...)

(2) Situaciones (problemas, extra o intra-matemáticos, aplicaciones, ejercicios).

(3) Acciones del sujeto cuando se resuelve las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas, procedimientos, ...)

(4) Conceptos, dados por sus definiciones o descripciones (número, punto, línea recta, media, función, ...)

(5) Propiedades o atributos, que se describen usualmente como enunciados o proposiciones.

(6) Argumentos, usados para validar y explicar las proposiciones (deductivos, inductivos, etc.)

En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "*configuraciones*", definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

Dentro del "enfoque ontosemiótico" se están introduciendo nuevas herramientas teóricas que permitan abordar el estudio de los fenómenos de instrucción matemática. Estas nociones se describen como "Teoría de las Configuraciones Didácticas" (Godino, Contreras y Font, en prensa), donde se modeliza la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la *configuración didáctica*, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos. Se concibe como una realidad organizacional, como un sistema abierto a la interacción con otras configuraciones de las trayectorias didácticas de las que forman parte. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

Una configuración didáctica lleva asociada una *configuración epistémica*, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá una *configuración instruccional* constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. La descripción de los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se realiza mediante las *configuraciones cognitivas*, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica.

3. Descripción del recurso

En la balanza con expresiones algebraicas (Figura 1) se escriben expresiones con una variable X en cada platillo de una balanza virtual, por ejemplo, X-7 y 7-X. En la celda designada como X = aparece un valor por defecto (X=-10) que se puede cambiar, bien desplazando horizontalmente el cursor situado a la izquierda, o escribiendo directamente un número en la celda. Automáticamente se calculan los valores de las expresiones escritas en los platillos y se representan en la ventana correspondiente las gráficas de las funciones Y =X-7; Y=7-X. Ambas rectas se cortan en el eje de abscisas para x = 7.

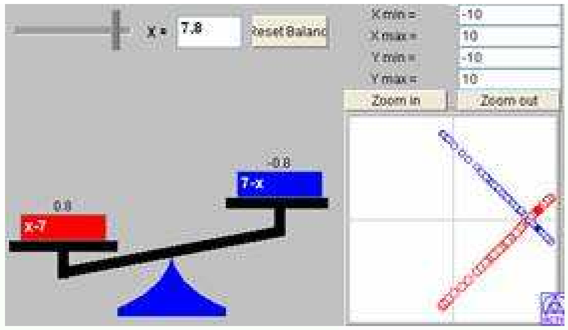


Figura 1: Balanza de expresiones algebraicas

Como posibles tareas sugeridas por los diseñadores del “applet” figuran las siguientes:

1. Introduce las expresiones x + x y 2*x en los platillos de la balanza. Cambia el valor de x desplazando el cursor deslizante o clicando en el gráfico y arrastrando el ratón. ¿Qué observas cuando cambia el valor de x?

2. ¿Qué observas en la balanza cuando pones las expresiones 7-x y x-7? ¿Cómo se corresponde el comportamiento de la balanza con el gráfico?

3. ¿Qué expresión nunca se iguala con 7-x? ¿Cómo puedes reconocer en el gráfico que estas dos expresiones nunca son iguales?

4. ¿Puedes encontrar otras dos expresiones de manera que cuando el valor de x aumenta la balanza se comporta del siguiente modo: (1) Se equilibra para algunos valores; (2) Siempre está en equilibrio; (2) Siempre está desequilibrada?

5. Encuentra expresiones equivalentes a las siguientes, comprobando la equivalencia con la balanza: x * (x + 1); (x + 1) / x ; x / (x + 1); (x + 1) / (x + 1)

La balanza de expresiones resalta el hecho que una ecuación se puede interpretar como una relación entre dos expresiones simbólicas, que la igualdad puede cumplirse para cualquier valor de la variable, para ningún valor, o para un número finito de valores.

4. Desarrollo y aplicación de una pauta de análisis

Clasificaremos las cuestiones de reflexión y análisis teniendo en cuenta las dimensiones epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales) e instruccional (funciones docentes y discentes; patrones de interacción). Para las dimensiones epistémica y cognitiva fijaremos la atención en los tipos de entidades primarias y las facetas cognitivas duales que se proponen en el enfoque ontosemiótico como objetos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas. Cada una de estas dimensiones interactúa con la tecnología de diferentes maneras (Kaput, 2004, p. 2)

4.1. Dimensión epistémica (conocimientos institucionales de referencia)

Situaciones

S1) ¿Qué tipo de situaciones-problemas (tareas) específicas permite plantear el recurso?

Los tipos de cuestiones que se pueden plantear son:

- ¿Qué valor de x resuelve la ecuación, $E1(x) = E2(x)$?

- ¿Para qué valores de x las expresiones $E1(x) < E2(x)$ (respectivamente >)?

Dando valores numéricos a la variable x el “applet” permite resolver ecuaciones en las cuales intervienen expresiones racionales (no sólo lineales y cuadráticas).

Se quiere introducir el uso de la igualdad como equivalencia de expresiones algebraicas y como punto de intersección de las gráficas de dos funciones. Simultáneamente se tiene una situación matemática de comparación (numérica y gráfica) de dos expresiones algebraicas evaluadas para valores de la variable x. Cada miembro de la igualdad se interpretan como funciones, Y = 7-x; Y = x-7, que son representadas en un gráfico cartesiano.

S2) ¿Sobre qué tipo de situaciones previas se apoyan las nuevas situaciones?

La figura de la balanza y su comportamiento virtual como consecuencia de la “colocación de pesos en cada platillo” refiere metafóricamente a las experiencias de pesar objetos tangibles. Se suponen conocidos la situación de la medida con la balanza, la representación cartesiana de las funciones y la interpretación de cada miembro de una ecuación como el criterio de una función.

S3) ¿Qué variables de tarea permiten generalizar la actividad matemática y en qué dirección?

Las expresiones que se pueden introducir en los platillos de la balanza pueden ser no sólo polinómicas, sino algebraicas racionales y trascendentes por lo que las ecuaciones, inecuaciones y funciones cuyos valores numéricos se pueden comparar son muy generales. Por ejemplo, se pueden plantear cuestiones como: ¿Para qué valores de x se hace cero la expresión (sen(x)+cos(x))/x?.

El rango de valores de x e y que se representan se puede cambiar actuando en los botones señalados como zoom (in y out). La igualdad de las dos expresiones, que corresponde a la solución de la ecuación se interpreta también como intersección de las gráficas de las dos funciones.

Lenguaje

L1). ¿Se introduce un lenguaje específico en la descripción y uso del recurso? ¿Qué nuevos términos, expresiones, símbolos y gráficos se introducen?

Se usa la expresión de una ecuación (inecuación) como equilibrio (desequilibrio) de una balanza. El desequilibrio de la balanza se puede expresar mediante el lenguaje de las inecuaciones. El signo = se usa de manera ostensiva en la asignación de un valor específico a las variables X e Y, (X = 7.8, X min = -10, ...). Pero también hay usos no ostensivos de la igualdad,

- Para indicar el valor de cada expresión, colocando el resultado encima del platillo.
- Asignación funcional mediante las gráficas (y = x-7; y = 7-x).
- Equivalencia de expresiones cuando la balanza está en equilibrio.

L2) ¿Se utiliza más de un registro semiótico, traducciones y tratamientos entre los mismos?

Se pretende relacionar el punto de corte de las gráficas con la situación de equilibrio de la balanza y la igualdad de los valores calculados para las dos expresiones colocadas en cada lado de la balanza.

L3) ¿Qué conocimientos lingüísticos previos requiere el uso del recurso?

Se suponen conocidos los lenguajes de la balanza, las gráficas cartesianas, y las expresiones algebraicas (* para la multiplicación, ^ para la potenciación). La atribución de valores a la variable mediante el desplazamiento de un cursor, y la interpretación de los valores máximo y mínimo para la X y la Y.

L4) ¿Es útil en la progresión del aprendizaje matemático el lenguaje específico introducido?

Dado el uso cada vez más extendido de recursos informáticos los convenios lingüísticos utilizados pueden aparecer en otros similares (cursores, pulsadores, etc.)

Técnicas (acciones)

T1) ¿Qué técnicas específicas se requieren para la solución de las tareas?

- Se evoca la manipulación imaginaria de la balanza; cambiando los pesos se puede lograr el equilibrio.

- Manipulación del "applet" (escritura de expresiones, asignación de valores a x; elección de extremos para los intervalos).

La técnica de solución de las ecuaciones consiste en dar valores a la variable y observar el comportamiento de la balanza y las gráficas; puede ser útil en los casos en que no se disponga de un método algebraico de solución (reducción, sustitución, etc.)

T2) ¿Qué técnicas previas es necesario dominar para aplicar las nuevas técnicas?

- Manipulación y ejecución de programas informáticos y del hardware necesario.

T3) ¿Es posible generalizar las técnicas y en qué dirección?

Aunque la manipulación del "applet" implica el aprendizaje de algunos convenios específicos (escritura en los platillos, asignación de valores a x desplazando un cursor) estos convenios suelen tener un alcance general en este tipo de recursos informáticos. Su aprendizaje puede ser de utilidad para operar esos otros recursos.

Conceptos (reglas conceptuales)

C1) ¿Qué conceptos específicos se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementables?

Solución de una ecuación como valor numérico que iguala ambos miembros y como punto de intersección de dos gráficas.

C2) ¿Qué conceptos previos se usan de manera explícita o implícita y se suponen conocidos?

La metáfora de la balanza supone familiaridad con la magnitud peso, cantidades, unidades y medidas. Números y operaciones aritméticas; reglas de uso de paréntesis. Funciones reales de variable real; gráficas cartesianas de funciones.

C3) ¿En qué dirección se pueden generalizar los conceptos emergentes?

El recurso está construido como soporte específico y restringido a los conceptos descritos.

Propiedades

P1) ¿Qué propiedades se prevé emergerán de las prácticas matemáticas implementables?

Si a una equivalencia de expresiones algebraicas se le aplican las mismas transformaciones a ambos miembros la equivalencia se mantiene.

P2) ¿Qué propiedades previas se usarán de manera explícita o implícita y se suponen conocidas?

Si a los dos platillos de una balanza se añaden o quitan los mismos pesos, se mantiene el equilibrio.

P3) ¿En qué dirección se pueden generalizar las propiedades emergentes?

No se pretende generalizar la propiedad emergente mencionada.

Argumentos (justificaciones)

A1) ¿Qué tipo de justificaciones de las técnicas y propiedades proporciona el recurso?

La justificación de las técnicas y propiedades es de tipo empírico y ostensivo. La solución de la ecuación se logra asignando valores a x de manera continua; el dispositivo calcula y muestra los resultados de manera numérica y gráfica. No hay argumentación deductiva.

A2) ¿Las argumentaciones específicas propiciadas por el recurso se apoyan en otras previas?

No consideramos aplicable en este caso.

A3) ¿En qué dirección se pueden generalizar las argumentaciones propiciadas por el recurso?

No se pretende en este caso.

En la Figura 2 sintetizamos la red de objetos que se ponen en juego en el uso del applet la “balanza de expresiones algebraicas”; puede servir de referencia para el diseño de situaciones didácticas basadas en su uso y la elaboración de instrumentos de evaluación de los aprendizajes.

4.2. Dimensión cognitiva (significados personales)

El análisis a priori de los conocimientos institucionales que potencialmente se ponen en juego en la implementación del recurso proporciona elementos para la elaboración de instrumentos de evaluación de los significados personales de los estudiantes, respecto de los conocimientos previos requeridos, y de los nuevos conocimientos logrados tras el proceso de estudio. Cada uno de los seis tipos de elementos descritos en la sección 4.1. nos pueden servir de guía para elaborar ítems de evaluación de los significados personales de los estudiantes. En el Anexo incluimos un cuestionario elaborado teniendo en cuenta los distintos componentes de los conocimientos pretendidos.

Parece razonable suponer que los estudiantes muestren interés por la manipulación del “applet”; el recurso evita tener que realizar cálculos tediosos, escribir tablas de valores y graficar las funciones.

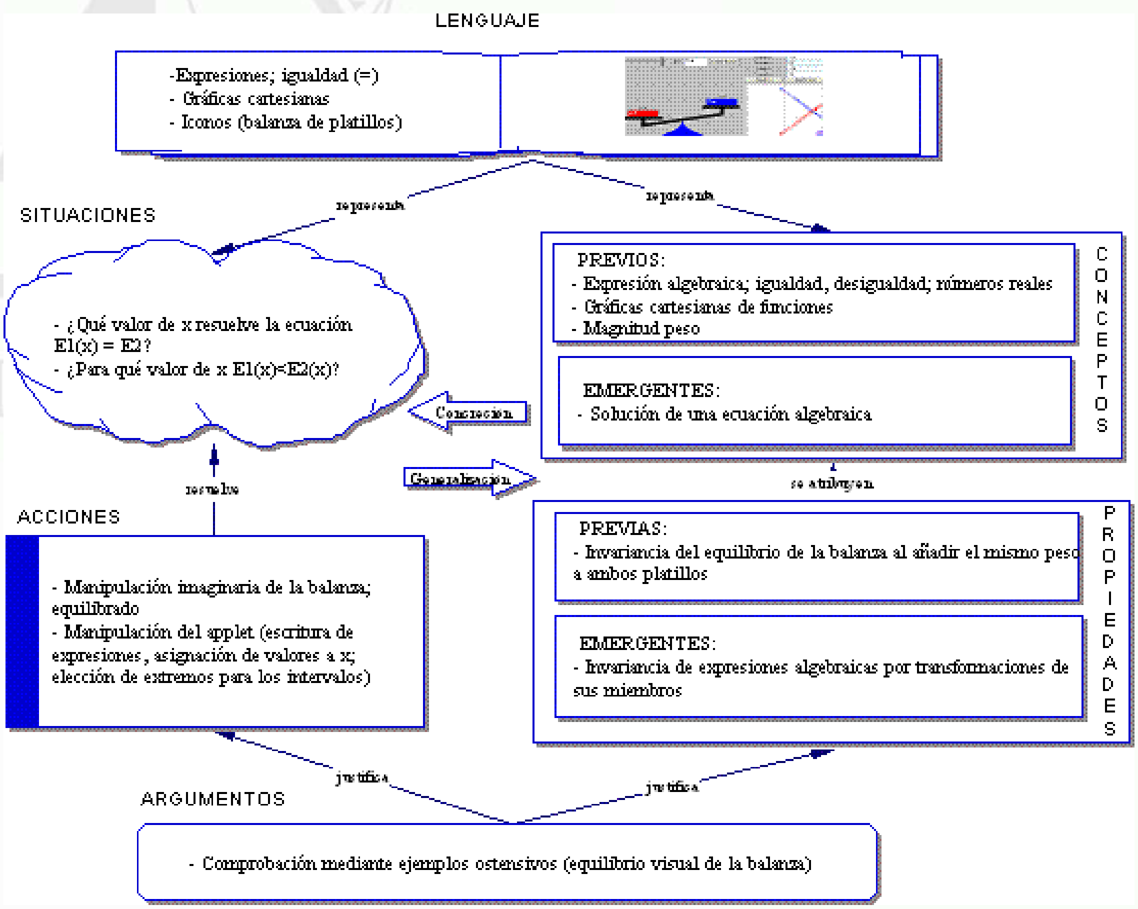


Figura 2: Configuración epistémica de referencia asociada al uso de la balanza de expresiones

4.3. Dimensión instruccional (funciones docentes, discentes y patrones de interacción)

El análisis epistémico a priori realizado nos proporciona un marco de referencia para elaborar posibles *trayectorias didácticas* de los contenidos puestos en juego por el recurso. Tales trayectorias se implementarán de acuerdo a unas *guías de estudio*, o “proyectos de enseñanza-aprendizaje”, en los cuales se hará una selección de los distintos tipos de conocimientos y su secuenciación temporal. En esta fase, la cuestión será la búsqueda de criterios que permitan optimizar la *idoneidad epistémica* (Godino, Contreras y Font, en prensa) del proceso de estudio, entendida como representatividad de los significados pretendidos respecto de los significados de referencia.

En la tabla 1 incluimos la guía de estudio usada en una experiencia de enseñanza de este recurso con estudiantes de magisterio. Comparada con el “significado de referencia” construido en la sección anterior podemos observar carencias importantes, tanto en los tipos de problemas abordados, las técnicas de solución, la clarificación del lenguaje y el discurso algebraico que se pone en juego al usar el recurso.

Tabla 1: Guía de estudio de la balanza de expresiones usada en la experiencia

Las guías de estudio deben incluir también indicaciones sobre el desempeño de las funciones docentes y discentes, así como una previsión de los tipos de configuraciones didácticas que optimicen la idoneidad didáctica del proceso.

A continuación indicamos algunas cuestiones relacionadas con las funciones docentes, discentes y patrones de interacción:

<u>¿En qué nivel educativo se puede usar el recurso?</u>

<u>¿En qué medida facilita el recurso que los estudiantes se impliquen personalmente en la realización de las tareas?</u>

<u>¿Cuánto tiempo se puede dedicar a los distintos tipos de tareas que se pueden proponer?</u>

<u>¿Cómo interesa secuenciar las tareas y las técnicas?</u>

<u>¿Qué conocimientos se deberán institucionalizar (regular) y en qué momento?</u>

<u>¿Facilita el recurso la evaluación de los conocimientos de los estudiantes?</u>

El recurso no es transparente en diversos aspectos. El docente deberá plantear cuestiones problemáticas que inciten a la exploración, informar de los convenios lingüísticos, institucionalizar los nuevos conocimientos pretendidos. En particular, los usos no ostensivos (implícitos) del signo = y del lenguaje de las ecuaciones e inecuaciones requieren intervenciones del docente si se desea sistematizar los conocimientos pretendidos.

En la experiencia de enseñanza que hemos realizado con estudiantes de magisterio hemos podido observar que el profesor ha debido comenzar explicando el funcionamiento del “applet”, la escritura de las expresiones, uso del cursor para asignar valores a la variable x de manera continua, interpretar las dos expresiones que se escriben en los platillos como una ecuación y la relación entre cada miembro y los gráficos cartesianos

Algunas cuestiones que ayudan a evaluar el recurso desde el punto de vista de las funciones (o roles) del estudiante en el proceso de aprendizaje son:

<u>¿Pueden los estudiantes usar el recurso de manera autónoma para actividades de exploración?</u>

<u>¿Están disponibles los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes?</u>

¿Aporta el recurso elementos para la autoevaluación de los aprendizajes pretendidos?

¿Ayuda el recurso a identificar conflictos semióticos y resolverlos?

¿En qué medida facilita el recurso la implementación de configuraciones didácticas de tipo adidáctico, dialógico, magistral o personal?

Otras cuestiones que debemos plantearnos para evaluar globalmente la pertinencia o eficacia de un recurso, comparado con otros posibles, pueden ser:

¿Existe un recurso alternativo que permita implementar los conocimientos pretendidos de una manera más eficaz?

¿Cómo se puede complementar el recurso con otros para optimizar la progresión del aprendizaje matemático? ¿Para qué tipo de conocimientos?

5. Síntesis y Conclusiones

La gran cantidad de investigaciones e innovaciones sobre el uso de las TIC en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas muestra el interés que el tema despierta, así como su extraordinaria complejidad. El estudio cualitativo y cuantitativo realizado por Lagrange y cols (2001) muestra que las ideas y resultados publicados están débilmente apoyados por la reflexión y la experimentación y no se ha abordado toda la complejidad de las situaciones educativas. La dificultad de la integración (uso e implementación efectiva en las clases) se puede ver a través de esa perspectiva: las innovaciones presentan una amplitud de ideas y proposiciones cuya difusión es problemática; la investigación se esfuerza por afrontar la complejidad del uso de las TIC.

En este trabajo nuestro objetivo ha sido construir una pauta que sirva como herramienta para mirar las condiciones de implementación de algunas herramientas TIC y las dimensiones a tener en cuenta, tanto de tipo epistémico (conocimientos institucionales), cognitivo (significados personales) como instruccionales (funciones docentes, discentes y patrones de interacción). En la práctica el marco teórico y la pauta de análisis elaborada puede ayudar a los investigadores e innovadores a diseñar, implementar y evaluar proyectos de integración de las TIC en las clases de matemáticas y comprender mejor la problemática multidimensional implicada.

En general, los recursos, tanto manipulativos como virtuales, son inertes en sí mismos. Para que desempeñen un papel en el aprendizaje es necesario formular tareas que inciten la actividad y reflexión matemática. Un análisis detallado de los conocimientos puestos en juego revela el papel esencial del profesor en los distintos momentos del proceso de estudio para que la actividad no quede bloqueada por los conflictos de significados y los conocimientos adquieran el nivel de generalidad pretendido. El grado de pertinencia de un recurso depende del uso que el profesor haga del mismo, y por tanto de los conocimientos didácticos específicos que tenga el profesor sobre su uso. El recurso puede ayudar a crear un contexto rico para apoyar el diálogo del profesor con los alumnos a propósito de unas tareas que son específicas, y que ponen en juego los conocimientos matemáticos pretendidos.

Reconocimientos:

Trabajo realizado en el marco de los Proyectos de Investigación BS2002-02452, y MCYT SEJ2004-00789, Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica. Ambos proyectos son cofinanciados con Fondos FEDER (UE).

Referencias

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,14 (3): 325-355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (en prensa). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics,* (aceptado, 14-7-04).

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado).

Kaput, J. (2004). Technology becoming infrastructural in mathematics education. ICME-10 TSG-15: *The role and use of technology in the teaching and learning mathematics.* http://www.ICME-10.dk

Lagrange, J.B, Artigue, M., Laborde, C. y Trouche. L. (2001). A meta study on IC Technology in education. Towards a muldimensional framework to tackle their integration. *Proceedings of the 25 PME Conference*. Freudenthal Institute, Utrecht.

Masalski, W. J. (2005). Preface. En, W. J. Masalski y P. C. Elliot (Eds.), *Technology – supported mathematics learning environments. Sixty – Seventh Yearbook*. (p. ix). Reston, VA: NCTM.

MEC. *Proyecto Descartes*, http://descartes.cnice.mecd.es/

NCTM. Illuminations, http://illuminations.nctm.org/tools/index.aspx

NLVM, National Library of Virtual Manipulatives. Utah State University,

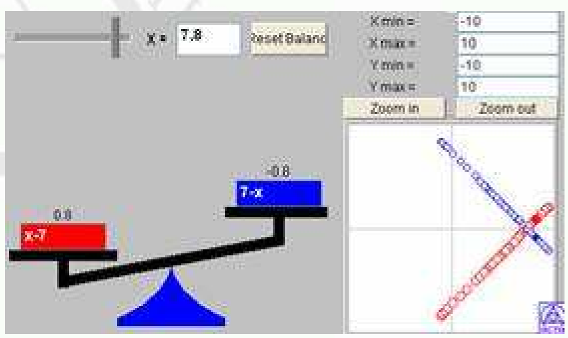
http://matti.usu.edu/nlvm/nav/

Ruthven, K. y Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 49: 47-88.

Anexo:

Cuestionario de evaluación de significados personales sobre nociones algebraicas puestas en juego en el uso de la balanza de expresiones algebraicas

Durante las prácticas en el Aula de Informática has usado el programa (applet) “balanza con expresiones algebraicas”. En la figura adjunta recordamos una de las salidas gráficas.



Responde a las siguientes cuestiones:

1. Si ponemos en el platillo izquierdo la expresión 2*x+1 y en el derecho 1-2*x, ¿hacia qué lado se inclinará la balanza si damos a x el valor 1?

Escribe la respuesta en lenguaje natural y en forma de inecuación.

2. Indica para qué valor de x la balanza se pone en equilibrio cuando en cada platillo se escriben las mismas expresiones anteriores. Expresa ese resultado mediante una ecuación.

3. Explica cómo se comporta la balanza a medida que desplazamos el cursor de valores de x desde –10 hasta +10.

4. Dibuja las gráficas de las funciones que definen cada una de las expresiones colocadas en los platillos, 2*x+1, 1-2*x.

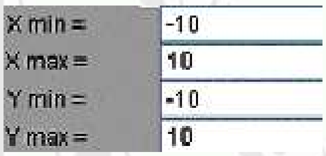
5. Si escribimos en la platillo izquierdo la expresión (x+1)*(x+1) indica una expresión diferente de ésta tal que la balanza esté siempre en equilibrio para cualquier valor que demos a x.

6. Explica cómo podrías usar el applet para encontrar las raíces o soluciones de esta ecuación cúbica: $x^3-2x+1=0$.

7. Explica qué significan los números que se escriben encima de los platillos.

8. Explica qué significa el número que aparece en la ventana, X = 7.8. ¿Qué le ocurre a ese número cuando se desplaza el curso hacia la izquierda?

9. Explica qué significan las expresiones:



10. Explica el significado del gráfico que aparece en la pantalla al lado derecho de la balanza.

11. Escribe como una inecuación la situación representada por la balanza mostrada en la figura.

12. El signo = tiene cuatro usos distintos en la situación de la balanza de expresiones algebraicas, algunos de ellos de forma no explícita:

a) Para asignar un valor fijo a una variable

b) Para expresar una identidad

c) Para expresar una ecuación

d) Para definir funciones.

Identifica y explica estos usos de la igualdad en el ejemplo mostrado en la figura.

13. Supongamos que tenemos representada en la balanza la siguiente situación, expresada como ecuación: 2*x-1 =1-2x, para x = 0.5

¿Qué ocurrirá a la balanza si cambiamos las expresiones de los platillos de la siguiente manera: (2*x-1)+2*x = (1-2*x) +2*x?

Justifica tu respuesta.

14. Explica qué significa resolver una ecuación y cómo se puede resolver.

---

[1] Versión ampliada y revisada de la comunicación presentada en el IX Simposio de la SEIEM, Córdoba (España), 2005.