

## Problemas Comentados (XVI)

J.A. Rupérez Padrón y M.García Déniz  
-Club Matemático-

En estos momentos hay una gran actividad en las escuelas canarias alrededor de la resolución de problemas. Un objetivo importante en el aprendizaje de las matemáticas es el de "elaborar estrategias de identificación y resolución de problemas en los diversos campos del conocimiento y la experiencia, mediante procedimientos intuitivos y de razonamiento lógico, contrastándolas y reflexionando sobre el proceso seguido."

La resolución de ejercicios y problemas es un proceso clave en la enseñanza de las matemáticas, mediante el cual los alumnos experimentan la potencia y la utilidad de las matemáticas en el mundo que los rodea.

Las capacidades que se deben desarrollar son:

- reconocer y formular problemas
- desarrollar y aplicar diversas estrategias
- verificar e interpretar conclusiones
- generalizar soluciones y estrategias
- aplicar el proceso a situaciones problemáticas del mundo real.

No se puede dejar solo al alumno para que descubra o invente las estrategias y mecanismos heurísticos necesarios. El profesor debe enseñar, de forma cooperativa a ser posible, a resolver problemas.

Se propone a los maestros:

- Utilizar los problemas como herramientas de adquisición de estrategias y de desarrollo de cuestiones matemáticas.
- Conocer algunas estrategias sencillas y métodos para adquirir hábitos de resolución de problemas.
- Desarrollar una metodología adecuada para la enseñanza de la resolución de problemas.
- Soluciones prácticas para la resolución, en el aula y fuera de ella, de problemas interesantes y no habituales.

Los contenidos implicados son:

El proceso de resolución de problemas. Desarrollar y aplicar diversas estrategias, generales y específicas. Habilidades instrumentales necesarias. La representación gráfica. Distribuciones espaciales. Lógica y resolución de problemas. Resolución de problemas aritméticos. Los problemas de geometría. Caracterización de los tipos de problemas. Determinación de criterios para la elaboración de baterías de problemas. Actividades lúdicas a partir de la resolución de problemas. Los problemas de ingenio. Ideas prácticas para utilizar juegos y problemas en el aula. Los puzzles y los problemas. Problemas contados o escenificados. La Magia y los problemas. Rincón de las Matemáticas. Con una pizarra, un retroproyector, modelos variados y algunas calculadoras de cuatro operaciones es suficiente. Para entender el proceso que se sigue podemos explicarlo mediante un ejemplo de los utilizados en las sesiones de formación en Primaria.

### 5. LOS SALTOS DE FÉLIX. (Categoría 3, 4, 5)

Para conservar su forma física, el gato Félix salta hasta lo alto de una escalera que tiene 11 escalones. Con cada salto, Félix sube simultáneamente 2 o 3 escalones a la vez.



**¿Con qué secuencia de saltos puede Félix llegar al undécimo escalón?**

**Escribid todas las soluciones diferentes que habéis hallado.**

#### Comentarios:

Procedencia: RMT 11. Prueba nº 1. Enero-febrero, 2003

Categoría: Primero, segundo y tercero de Primaria.

Dominio de conocimientos:

Suma y multiplicación. Combinatoria. Sistematización. Exhaustividad.

Análisis de la tarea:

- Hallar todas las sumas donde los términos sean sólo 2 y 3 y el resultado es 11.
- Comprender que el escalón 11 no puede ser alcanzado con saltos de 2 únicamente, ni por saltos de 3 únicamente, y que Félix debe entonces mezclar los dos tipos de salto.
- Ensayar a repartir los distintos saltos en varias categorías, por ejemplo, describir las series que comprenden tres grandes saltos, a continuación las que comprenden un solo gran salto.
- Indicar para cada categoría las diferentes series de saltos posibles.

### Solución:

Categoría 1: cuatro series posibles

$$3 \times 3 + 1 \times 2 \quad \begin{array}{l} 3 + 3 + 3 + 2 \\ 3 + 3 + 2 + 3 \\ 3 + 2 + 3 + 3 \\ 2 + 3 + 3 + 3 \end{array}$$

Categoría 2: cinco series posibles

$$1 \times 3 + 4 \times 2 \quad \begin{array}{l} 3 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ 2 + 3 + 2 + 2 + 2 \\ 2 + 2 + 3 + 2 + 2 \\ 2 + 2 + 2 + 3 + 2 \\ 2 + 2 + 2 + 2 + 3 \end{array}$$

### Observaciones:

A muchos niños les cuesta comprender la pregunta de este problema de **combinatoria**. Incluso entendiendo, al emprender el trabajo, hay todavía demasiadas trampas, como muestra el análisis de la tarea.

La respuesta a este problema dependerá del tipo de instrucción que se haya recibido en resolución de problemas.

Si este alumno sólo ha resuelto problemas a partir de un modelo previo difícilmente podrá resolverlo.

Sin embargo, las operaciones que precisa el problema son de muy fácil manejo: sumar y restar, multiplicar por 2 y por 3.

Además las cantidades que se manejan son inferiores a 12.

Si acaso, algunos de nuestros alumnos más despabilados, ¡que siempre los hay, afortunadamente y a pesar de nosotros!, podrán iniciar una búsqueda a través de un tanteo totalmente carente de sistematización. Y, a veces, hasta encuentran una solución...

¿Qué le falta, pues, al alumno para abordar la resolución de este problema de una forma matemática?

Fundamentalmente, seis cosas:

- a) El conocimiento de una estrategia general para abordar la resolución de cualquier problema.
- b) Utilización de un pensamiento lógico no asociado estrictamente a las operaciones aritméticas.
- c) El aprendizaje de unos elementos lógicos de distribución espacial que, en forma gráfica, le ayuden a disponer los datos del problema.
- d) El conocimiento de algunos, muy pocos y sencillos, heurísticos específicos que le permitan vislumbrar un camino en la búsqueda de la solución.
- e) La sistematicidad de su pensamiento que le haga seguir una línea de trabajo sin cansarse, hasta que consiga una solución o vea que el camino emprendido no le lleva a ningún sitio.
- f) El gusto de la exploración matemática, encontrando placer hasta cuando se equivoca, y la ilusión de emprender un nuevo camino distinto al anterior si aprecia que éste no es el correcto.
- g) Apertura de pensamiento para llegar a entender que un problema puede tener una, muchas o ninguna solución, sin que por ello sea más o menos valioso.

Volvamos al problema anterior y tratemos de resolverlo.

Lo primero que se aprecia es que desconocemos mucho de la situación de partida que define el problema.

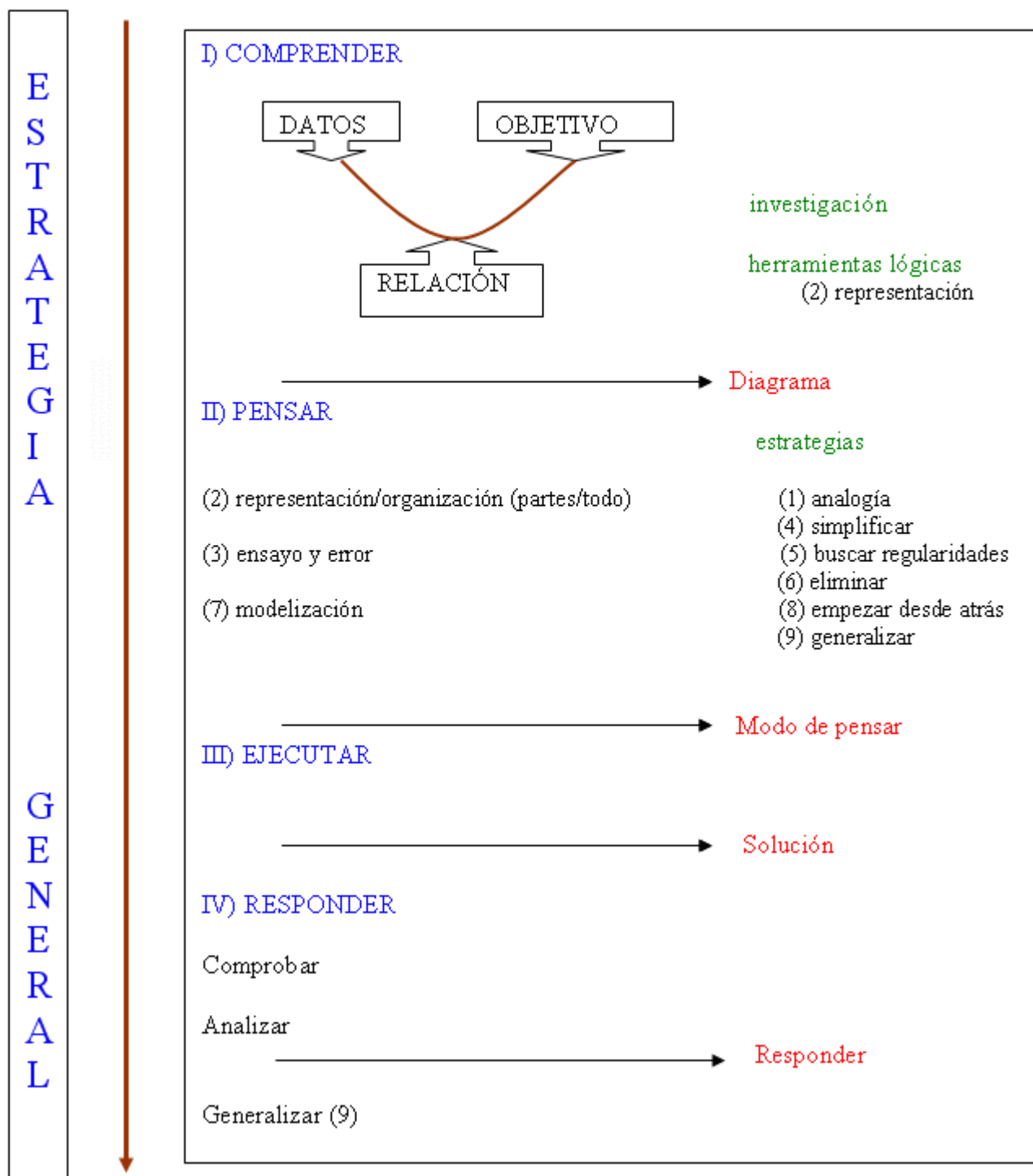
Para que este camino sea recorrido sin dificultades, sistemáticamente, necesitamos el uso de otro heurístico básico: "representar los datos organizar la información". Para ello podemos utilizar figuras, diagramas, tablas, gráficas, codificaciones, etc.

Llegar a esta conclusión no es fácil. El alumno ha de estar entrenado en este tipo de pensamiento. Se puede apoyar y verificar experimentalmente. Pero el maestro ha de enseñarlo. No puede confiar en que el niño o la niña adquiera ese tipo de pensamiento de manera intuitiva. Se trata de un aprendizaje difícil y lento, pero ese es el reto del aprendizaje "integral". No basta con formar buenos CALCULISTAS; necesitamos buenos PENSADORES.

El siguiente esquema es una adaptación del método de Polya, utilizado con bastante éxito entre el profesorado de Educación Primaria en nuestra Comunidad.

# PROCESO de RESOLUCIÓN de PROBLEMAS

**Propuesta** (enunciado del problema: texto escrito, oral, gráfico o manipulativo)



\*\*\*\*\*

Lo esencial del método ha sido descrito en múltiples libros (Polya, Schoenfeld, de Guzmán, Mason, Stacey, NCTM, Socas, etc.). Un resumen podría ser el siguiente.

Es necesario motivar al alumno para que acepte el problema como un desafío; aceptado éste, el verdadero problema se plantea cuando el alumno no encuentra solución y se bloquea.

Un mismo planteamiento puede ser para un alumno un problema y para otro un ejercicio; todo depende de su trabajo anterior.

En la escuela, generalmente, se enseña QUÉ PENSAR pero no CÓMO HACER PARA PENSAR; no se entrena al alumno para pensar.

EN LA ESCUELA HAY QUE FORMULAR EXPLÍCITAMENTE LOS PROCESOS QUE SE APLICAN AL RESOLVER LOS PROBLEMAS

El currículo oculto en resolución de problemas es insuficiente.

Hay que hacer diseños instruccionales para que el alumno se entrene de forma explícita en la resolución de problemas. El alumno no asimila la estructura matemática que está detrás del enunciado.

La ESTRATEGIA de resolución de problemas se puede definir como: TRADUCIR y luego RESOLVER.

Una ESTRATEGIA es una técnica general de resolver problemas. Las estrategias no garantizan que se encuentre una respuesta, pero guiarán la solución del problema.

Los HEURÍSTICOS ESPECÍFICOS son operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas matemáticos. Son "reglas" o "modos de comportamiento que favorecen el éxito.

Hay distintos modelos para guiar el proceso de resolución de problemas. Todos ellos tienen en común las siguientes fases fundamentales:



El alumno ha de tener una serie de conocimientos básicos que le permitan afrontar la resolución de un problema.

Conocimientos lingüísticos: habilidad lectora y dominio gramatical. La estructura lingüística es sólo el vehículo que transmite el mensaje o contenido.

Conocimientos semánticos y contextuales: contenido matemático y extramatemático. Los conocimientos contextuales se evidencian en los problemas con mayor o menor grado de proximidad a los intereses de los estudiantes (problemas reales y realistas).

Conocimientos del esquema o estructura: especialmente el esquema semántico de las relaciones matemáticas.

Partes/todo.

Conocimientos operativos: el sujeto necesita saber hacer las operaciones matemáticas.

Conocimiento de estrategias: estrategias generales y heurísticos específicos.

Los heurísticos específicos más significativos son los siguientes:

#### 1. RECORDAR UN PROBLEMA SIMILAR (ANALOGÍA).

1. Problema similar resuelto anteriormente.

2. Resolver antes un problema similar más sencillo (con números más pequeños, transformado en una situación familiar conocida, con menos variables, etc.

#### 2. REPRESENTACIÓN DE DATOS (ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN)

1. Hacer una figura o un diagrama.

2. Construir tablas.

3. Hacer gráficas.

4. Codificar algebraicamente (ecuaciones) o numéricamente los datos o situaciones del problema.

#### 3. CONJETURAR Y COMPROBAR (ENSAYO Y ERROR).

#### 4. SIMPLIFICAR.

#### 5. BUSCAR REGULARIDADES, ENCONTRAR UNA LEY O PATRÓN (GENERALIZAR).

#### 6. ELIMINAR.

#### 7. CONSTRUIR MODELOS (ANALOGÍA).

#### 8. EMPEZAR UN PROBLEMA DESDE ATRÁS.

#### 9. GENERALIZAR.

**LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS BÁSICAS HAY QUE ENSEÑARLAS COMO UN CONTENIDO MÁS.**

El heurístico número 2, REPRESENTACIÓN DE DATOS, es uno de los más potentes que se pueden enseñar a los alumnos. Debemos ofrecer continuamente a nuestros alumnos las herramientas de representación que necesita: figuras, diagramas, tablas, listados, codificaciones. En el fondo, la enseñanza de las matemáticas es un ofrecimiento continuo de nuevas herramientas de este tipo. No basta con exponerlas; es importantísimo enseñar a utilizarlas.

Otro heurístico poderoso es el número 1, la ANALOGÍA, que de hecho es el más utilizado por el profesor en la enseñanza de la resolución de problemas, incluso en aquellos que sólo utilizan como método el de modelos. Utilizar modelos es una analogía. Pero no es la única que se puede enseñar a los alumnos.

Un heurístico parecido al anterior es el número 4, SIMPLIFICAR. Consiste en modificar el enunciado del problema mediante la utilización de números más pequeños, separando en subproblemas, resolviéndolo en casos independientes o trabajando con ejemplos. En ocasiones, esta técnica puede allanar la comprensión de un problema que podía parecer muy complicado en una primera lectura.

Un heurístico sencillo, del que los alumnos tienen una idea intuitiva, es el número 6, eliminar. Sólo es necesario conseguir que los alumnos sean sistemáticos, tanto en la elaboración de la lista inicial como en los criterios a utilizar en el proceso de

eliminación. No es un heurístico de utilización generalizada, como los anteriores, pero es siempre una alternativa válida a tener en cuenta por parte de los alumnos.

De mucha importancia resulta que los alumnos aprendan, desde muy pequeños y en situaciones apropiadas, a utilizar el heurístico número 5, BUSCAR REGULARIDADES. Se puede hacer un buen entrenamiento en seriaciones que pueden empezarse con dibujos sencillos, buscando semejanzas y diferencias que conducen a la búsqueda de un patrón que permita inferir cómo ha de ser el siguiente término de la serie. Pasando después a sucesiones numéricas y más tarde a juegos que originen series de números, se llega de una manera sencilla a la obtención de una regla. Se llega así a la GENERALIZACIÓN.

Todos los heurísticos son importantes. La oportunidad de enseñar uno u otro depende de los alumnos, de la planificación de nuestras clases y de la batería de problemas que diseñemos.

El problema tiene aún una última fase. El alumno ha de comprobar que todo el proceso es correcto. El problema ha sido resuelto comprobando en cada paso los resultados.

El pensamiento matemático es un proceso dinámico que extiende nuestra capacidad de comprensión. La práctica con reflexión es lo que sirve para mejorar el razonamiento matemático.

TODOS PODEMOS RAZONAR MATEMÁTICAMENTE.

"La resolución de problemas debe ser el eje de la enseñanza de las matemáticas" (Agenda in action, 1980). Esta fue la primera recomendación hecha por el NCTM en abril de 1980 y ha sido asumida como objetivo prioritario de la educación matemática por la mayoría de los países.

La resolución de problemas abarca muchas funciones rutinarias y triviales, así como otras poco corrientes que se consideran esenciales en la vida diaria de los ciudadanos. Es una capacidad específica de la inteligencia, por tanto, si la educación debe contribuir al desarrollo de ésta, es fundamental incidir en la resolución de problemas.

Por otro lado, el alumno al resolver problemas descubre la utilidad de lo que estudia, comprueba para qué sirven los conocimientos matemáticos aprendidos, conectando la teoría y la práctica al servicio de las ciencias actuales, sin que esto signifique que las matemáticas que se enseñen estén orientadas exclusivamente a satisfacer las necesidades particulares de las matemáticas en un momento determinado y para resolver un problema dado.

El poder auténtico de la resolución de problemas exige un amplio repertorio de conocimientos, no sólo de destrezas y conceptos particulares sino también de la relación entre ellos y los principios fundamentales que los unifican.

Un problema es una tarea que plantea a una persona la necesidad de hallar una solución, para lo cual ha de buscar el camino adecuado.

Bibliografía recomendada:

En alguna otra ocasión iremos comentando algunos libros importantes cuyas enseñanzas están recogidas en las ideas anteriores. En esta ocasión nos limitaremos a indicar dos de ellos, muy interesantes y asequibles.

Kaye Stacey – Susie Groves

**“Resolver problemas: estrategias (Unidades para desarrollar el razonamiento matemático)”**

Madrid, 1999. (Traducción y adaptación de M<sup>a</sup> Luz Callejo y José Carrillo)

NARCEA, S. A. EDICIONES

J. Hernández Domínguez, M. J. Martín Morales, M<sup>a</sup> A. Noda Herrera, M. M. Socas Robayna

**“Resolución de problemas de matemáticas en la Educación Primaria. Los problemas aritméticos.”**

Canarias, octubre de 2000. Cuadernos de Aula, DIRECCIÓN GENERAL DE ORDENACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES. GOBIERNO DE CANARIAS

Como complemento del artículo, para seguir manteniendo el deseo de resolver problemas interesantes por parte de nuestros lectores y sin tener aparente relación con el resto del artículo, proponemos algunos problemas de ingenio, bastante sencillos y conocidos tal vez, pero considerando los lectores de Primaria que se incorporan, quien sabe...

1. SECUENCIAS ¿Cómo continúa...?

(¡Ojo! La mayoría son muy tramposos. Hay que ser espabilado...)

1) U, D, T, C, C, S, S, O, ...

2) A, B, C, D, E, ...

3) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

4) D, N, O, S, A, J, J, M, ...

5) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

6) S, M, H, D, S, M, ...

7) C, D, I, L, M, V, ...

8) T, C, P, H, H, O, E, ...

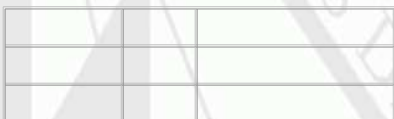
9) 3, 3, 4, 6, 5, 4, 5, 4, ...

10) R, D, A, C, T, ...

- 11) B, C, D, F, G, H, ...
- 12) 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...
- 13) B, C, D, E, H, I, K, O, ...
- 14) 0, 5, 4, 2, 9, 8, 6, ...
- 15) O, C, E, ...
- 16) O, S, S, O, O, S, E, O, ...
- 17) 1001, 6, 500, E, O, E, S, 6, E, J, ...
- 18) A, T, G, C, L, V, L, E, ...
- 19) 1884, 1888, 1892, 1896, ...
- 20) A, K, Q, J, N, O, S, S, C, ...
- 21) G, E, L, N, D, J, J, ...
- 22) 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ...
- 23) A, A, A, A, B, C, E, E, E, F, G, G, G, G, I, L, L, L, L, L, L, L, P, S, S, S, S, S, T, T, ...
- 24) A, E, A, P, A, U, U, U, E, C, O, ...
- 25) 202, 122, 232, 425, 262, 728, ...
- 26) M, G, D, Y, J, A, R, ...

Están sacadas (y adaptadas después) del libro "The Bumper Compendium of Mind-Bending Puzzles", editado por Heather Dickson y publicado por Lagoon Books en 1998.

2. ¿Cuántos rectángulos hay en el dibujo?



3. Un vendedor de huevos hace su primera venta dando al cliente la mitad de los huevos que lleva en su cesta más medio huevo. Al segundo cliente, le vende la mitad de los huevos que le quedan más medio huevo. Con el tercero hace lo mismo y con el cuarto también. Solo que con el cuarto se queda sin huevos. ¿Con cuántos huevos empezó la venta?

4. Un típico loco del volante atropella a una ancianita y se da a la fuga. Tres testigos ven la matrícula de su coche: un tuerto del ojo derecho, un tuerto del ojo izquierdo y un matemático distraído. El primero sólo ve las dos primeras cifras de la izquierda, y recuerda que son iguales; el segundo sólo ve las dos últimas cifras, y dice que también son iguales; el matemático distraído recuerda que el número de la matrícula tiene cuatro cifras y que es un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el número de matrícula del automóvil del loco del volante?

5. ¿Cuál es el menor número de cuadraditos que hay que sombrear en este tablero para que la figura resultante tenga algún eje de simetría?



Y aquí seguimos. Esperando su respuesta positiva o su deseo de que dejemos esto de una vez. Escriban mensajes a esta sección y cuenten sus soluciones y experiencias o, si lo prefieren, propongan sus propios problemas. Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera del próximo NÚMEROS.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático**.

El **Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón**, del **IES Canarias Cabrera Pinto** (La Laguna), y **Manuel García Déniz**, del **IES Tomás de Iriarte** (Santa Cruz de Tenerife).  
[mgarciadeniz@sinewton.org](mailto:mgarciadeniz@sinewton.org) / [jaruperezpadron@sinewton.org](mailto:jaruperezpadron@sinewton.org)



[Descargar en PDF](#) [Comentarios](#)

[Contactar](#) [Colaboradores y sponsors](#) [Estadísticas](#)

Buscar

