Interacción social, discurso matemático y calculadora gráfica en el salón de clase

Pedro Gómez

Este estudio busca explorar los efectos de una innovación curricular (que introdujo la utilización de las calculadoras gráficas) en la cultura del salón de clase. Utilizando esquemas metodológicos similares a los empleados por Stodolsky, Burns y Lash (1991), se realiza un análisis de la interacción social y del discurso matemático de alrededor de veinte horas de video correspondientes a dos grupos de estudiantes dentro de una asignatura de precálculo: un grupo que siguió un currículo tradicional y otro, posterior y con la misma profesora, en el que los estudiantes tuvieron a su disposición en todo momento una calculadora gráfica, cada uno. Se apreciaron cambios relevantes entre los grupos. Los alumnos del grupo experimental manifestaron una participación más activa en la interacción social y en la construcción del discursos matemático, participación ésta que fue promovida por un comportamiento diferente por parte de la profesora.

Introducción[1]

¿Qué futuro tienen las calculadoras gráficas? ¿Qué papel puede jugar esta nueva tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas? ¿Cuáles pueden ser las implicaciones curriculares de este nuevo medio en el que tanto profesor, como estudiante, pueden interactuar con el conocimiento matemático? Estas y muchas otras preguntas están siendo abordadas en la actualidad por la comunidad de investigadores en educación matemática (Fey, 1992; Fey, 1994; Dunham y Dick, 1994). Se estudian múltiples aspectos del currículo en relación con la nueva tecnología. En la más reciente revisión de la literatura de investigación en el tema, Dunham y Dick (1994) los agrupan en cuatro grandes categorías:

- ▲ Las calculadoras gráficas y los estudios de rendimiento
- ▲ Las calculadoras gráficas y la comprensión conceptual
- ▲ Las calculadoras gráficas y la resolución de problemas
- ▲ Las calculadoras gráficas y la dinámica del salón de clase

1. Agradezco al doctor Luis Rico Romero, director de la memoria de tercer ciclo de la cual este documento es una consecuencia, con quien disfrute de intensos y muy fructíferos “discursos” e “interacciones” durante su realización; a Guiomar Mora, la profesora de los grupos que fueron objeto de este estudio, quien con amabilidad y paciencia soportó mi intromisión en sus clases; a Patricia Inés Perry quien leyó un borrador de una versión previa; a Mauricio Castro quien colaboró en un análisis inicial de confiabilidad del instrumento; a los doctores Michèle Artigue, Régine Douady y Luis Moreno quienes hicieron críticas y comentarios a una versión previa del trabajo; al doctor Jeremy Kilpatrick quien sugirió el tema para el estudio; y a Paola Valero, Cristina Carulla, Vilma María Mesa y Cristina Gómez, miembros del grupo de investigadores del programa *Calculadoras gráficas y precálculo* con quien tuve múltiples y variadas discusiones.
El programa *Calculadoras gráficas y precálculo*, del cual hace parte este estudio, ha recibido el apoyo de COLCIENCIAS, la Fundación para el Avance de la Ciencia y la Tecnología del Banco de la República y Texas Instruments.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
APARTADO AÉREO 4976
BOGOTÁ - COLOMBIA
TELÉFONOS: 2 84 99 11 - 2 82 40 66 EXT. 2717
FAX: 284-1890

Este estudio se enmarca dentro de la cuarta categoría propuesta anteriormente. Es una aproximación exploratoria y descriptiva a las preguntas abiertas 1, 2 y 9 que Kaput (1992) hace al final de su reflexión acerca de la tecnología y la educación matemática:

"1. ¿Cómo afectan diferentes tecnologías la relación entre el conocimiento procedimental y conceptual, especialmente cuando el ejercicio del conocimiento procedimental es suplantado (en cambio de ser complementado) por las máquinas?

2. ¿Cómo se integran las múltiples representaciones del conocimiento matemático [...]?

9. ¿Cómo cambian los patrones sociales en aquellas clases de matemáticas que son ricas en tecnología?" (pp. 549-550)

En este estudio nos interesamos por estudiar los efectos de la presencia de la calculadora gráfica en la "cultura del salón de clase" (Nickson, 1992). Nos aproximamos a esta problemática desde dos perspectivas:

- La interacción social entre el profesor y los alumnos
- El discurso matemático de profesor y alumnos

Buscamos, entonces, información relevante que nos permita aproximar respuestas a las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo cambia, si lo hace, y en qué sentido, la interacción social entre el profesor y los alumnos?
- ¿Cómo cambia, si lo hace, y en qué sentido, la interacción social entre los alumnos?
- ¿Cómo cambia, si lo hace, y en qué sentido, el discurso matemático del profesor?
- ¿Cómo cambia, si lo hace, y en qué sentido, el discurso matemático de los alumnos?

Diversos investigadores se han aproximado al problema de analizar la interacción en el salón de clase de matemáticas (Nickson, 1992). Se han diseñado aproximaciones ya clásicas como la de Flanders (1974a, 1974b) cuyo principal interés es el análisis de la interacción *social* entre el profesor y los estudiantes. Por otra parte, en el campo de la educación matemática, se han hecho análisis de la interacción con énfasis en el contenido (Stodolsky, 1991; Burns y Lash, 1987). También se han realizado estudios basados en un análisis microetnográfico de la interacción (Voigt, 1985, 1989). Por otra parte, estudios como los de Schoenfeld, Moschkovich, Arcavi y Smith (Schoenfeld, et. al., 1994; Moschkovich, et. al., 1993) han comenzado a mostrar el interés de analizar el discurso matemático del aprendiz dentro de un contexto tecnológico.

En este estudio se organizan algunas ideas conceptuales para el análisis de la interacción social en el salón de clase y del discurso matemático de profesor y alumnos. A partir de esta propuesta y utilizando esquemas metodológicos similares a los empleados por Stodolsky, Burns y Lash, hacemos un análisis de la interacción social y del discurso matemático de alrededor de veinte horas de video correspondientes a dos grupos de estudiantes dentro de una asignatura de precálculo: un grupo que siguió un currículo tradicional y otro, posterior y con la misma profesora, en el que los estudiantes tuvieron a su disposición en todo momento una calculadora gráfica, cada uno. También hacemos un análisis microetnográfico de dos segmentos de interacción correspondientes a cada uno de los dos grupos estudiados.

Marco conceptual

La cultura del salón de clase

En su revisión de la literatura sobre el análisis de la interacción, Nickson (1992) centra su reflexión en la identificación de aquellos significados invisibles y compartidos que gobiernan la interacción y se pregunta acerca de los factores que determinan estos significados. Sus respuestas giran principalmente alrededor de la manera como el conocimiento y las creencias del profesor influyen en su práctica docente y, por consiguiente, en la manera como él aporta a la *tradición de la clase*, expresada en "supuestos normativos o compartidos, suposiciones e interpretaciones que hacen posible la comunicación" (Cobb, 1993, p. 575). Es evidente, como lo muestra la figura 1, que los estudiantes participan en la construcción de esta cultura del salón de clase.

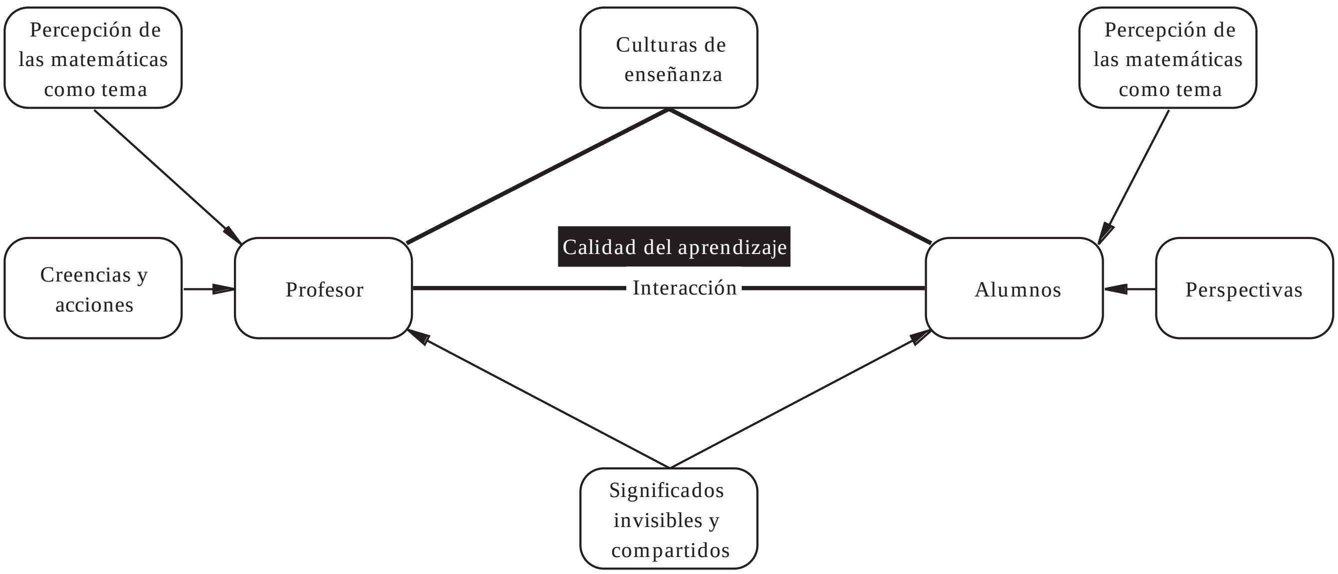

Figura Nº 1. La cultura del salón de clase

Nickson enfatiza la importancia de las creencias y de los valores acerca de las matemáticas: "[…] la importancia del cambio en las creencias y los valores acerca de la naturaleza del conocimiento matemático será descrita porque estas creencias y valores relacionados con las matemáticas como tema son responsables de mucho de lo que sucede en el contexto del salón de clase" (p. 102).

Los significados invisibles y compartidos o los supuestos normativos que hacen posible la comunicación dependen no solamente de las creencias y de los valores que los actores involucrados tengan acerca de la naturaleza de las matemáticas. Los sistemas de creencias tanto de los alumnos como del profesor giran también alrededor de sus visiones acerca de la enseñanza de las matemáticas, de su aprendizaje, del papel del profesor y del alumno, de la función de las matemáticas, de la utilización de los medios, etcétera (Ernest, 1991; Dossey, 1992). Es este bagage de creencias y visiones, junto con otras condiciones (e.g., institucionales, del sistema educativo, sociales) las que moldean la comunicación en el salón de clase y determinan buena parte de la interacción entre el alumno y el profesor.

De esta forma, las diferentes visiones o sistemas de creencias de los actores (profesor y alumnos) construyen diferentes contextos sociales en el salón de clase que se caracterizan, por ejemplo, en acuerdos implícitos acerca de quién tiene y cómo se maneja la autoridad sobre la verdad o validez de las afirmaciones que se hacen; de qué manera se administra el error dentro del discurso matemático del estudiante; cómo se puede desarrollar la discusión entre el profesor y el alumno o entre los mismos alumnos; de qué forma el profesor da instrucciones, guía o facilita la realización de una tarea por parte del alumno; de qué forma el profesor desarrolla un tópico o crea espacios para la comprensión; cómo se negocian los aspectos metodológicos; qué tipo de expectativas tienen profesor y alumnos con respecto a la comprensión y a la evaluación; qué características tiene el discurso matemático de los actores, etcétera.

Una proporción importante de los estudios revisados sobre la interacción en el salón de clase siguen el esquema de Flanders (1974a, 1974b) y Amidon (1973). Estos estudios centran su interés en la interacción *social* dentro del salón de clase. Las variables que se utilizan para analizar la interacción en este modelo tienen que ver con la iniciación y la respuesta del profesor y el estudiante dentro de la comunicación. Es evidente que este modelo no tiene en cuenta explícitamente el contenido matemático y se preocupa más por las actitudes del profesor hacia su interacción con el estudiante o por la forma como el profesor da información al estudiante. Dentro de los estudios de este tipo se pueden mencionar Fennema (1987), Hart (1989, 1990), Heger (1980), Huang (1993), Johnson (1974), Miller (1984), McDermott (1984) y Webb (1982a, 1982b, 1992).

Por otra parte, la mayoría de estos estudios utilizan un esquema metodológico en el que se analizan segmentos muy cortos de interacción (de tres a cinco segundos) y su relación por parejas consecutivas, proceso que permite la construcción de matrices en las que diferentes sectores determinan diferentes tipos de interacción dentro del salón de clase.

Otros estudios más recientes como el de Cobb (1993) hacen análisis a partir de las explicaciones y las justificaciones de los profesores y los alumnos y estudian el papel de la autoridad dentro del salón de clase en relación con las expectativas del profesor.

La importancia del contenido

Otro tipo de estudios acerca de la interacción en el salón de clase enfatiza la importancia del contenido en la comunicación y buscan "capturar las características estructurales de la instrucción" (Burns y Lash, 1987, p. 394). Estos estudios utilizan el concepto de "estructuras de actividad de los segmentos de clase" para describir las configuraciones instruccionales establecidas por los profesores. "Los segmentos de clase son bloques de tiempo durante una clase que tienen un propósito, un foco y un patrón de actividad preciso. Las características del segmento pueden ser delineadas, de tal forma que, cuando se toman conjuntamente, definen la estructura de actividad del segmento". (Burns y Lash, 1987, p. 395).

Este esquema metodológico fue utilizado por Stodolsky (1991) para mostrar, entre otras cosas, que las formas didácticas empleadas en una clase de matemáticas eran distintas a las utilizadas en ciencias sociales, aunque fuese el mismo profesor quien se encargase de ambas. Burns y Lash mencionan una serie de estudios que han utilizado el concepto de segmento para el análisis de la interacción. Según Burns y Lash las características de los segmentos que dan lugar a su estructura de actividad incluyen el propósito del segmento, el formato de actividad y el contenido del segmento (p. 395).

Por otra parte, Burns y Lash hacen una defensa de este esquema metodológico en contraposición con el paradigma de proceso - producto en el sentido que el segmento, como unidad de análisis, provee los medios para definir estructuralmente la lección, mientras que la investigación de proceso - producto ha sido criticada por romper la enseñanza en actos minúsculos que son difíciles de contextualizar.

Los estudios microetnográficos de la interacción

El grupo de Bielefeld (e.g., Voigt (1985, 1989), Bauersfeld (1988)) ha asumido una posición diferente con respecto al análisis de la interacción en el salón de clase. El propósito de estos estudios es explorar cómo profesores y estudiantes construyen significado y establecen orden acerca de lo que sucede en una clase de matemáticas. El foco de interés se encuentra en los patrones de interpretación y de acción que han sido natural y mutuamente controlados dentro de la interacción. Para reconstruir estos patrones se utilizan métodos de microetnografía. Esto es, métodos de descripción e interpretación detallada de una pequeña muestra de registros de comportamiento. (Voigt, 1985).

Los patrones de interacción

De manera general y de acuerdo a Voigt (1985), un patrón de interacción es una estructura de interacción cara a cara entre dos o más participantes tal que:

- ▲ La estructura sirve para reconstruir una regularidad específica de interacción que se centra en un tema
- ▲ La estructura se refiere a acciones, interpretaciones y percepciones mutuas concertadas entre por lo menos dos participantes y no puede ser representada como la suma de las acciones individuales
- ▲ La estructura no se puede explicar deductivamente por la adherencia a un conjunto de reglas explícitas
- ▲ Los participantes no generan conscientemente una regularidad, pero constituyen una rutina.

Dentro del concepto de patrón de interacción es importante considerar las nociones de *expectativas* y *obligaciones*, en el sentido de que los estudiantes buscan satisfacer las expectativas del profesor y, por consiguiente, hay una obligación mutua de satisfacer un patrón. “Las obligaciones son responsables del carácter normativo de los patrones de interacción y, por consiguiente, de su estabilidad” (p. 85). Estas obligaciones no son explícitas y deben ser previamente interpretadas.

El establecimiento de las expectativas, de las obligaciones y, por consiguiente, de algún patrón de interacción, son producto de los *patrones de experiencia*: las ideas subjetivas de los procesos usuales en clase y las ideas auto evidentes acerca del tema de estudio que se refieren a ellos. Estos patrones de experiencia son importantes puesto que le permiten al sujeto simplificar la complejidad de la interacción.

Buena parte de los conceptos propuestos por Voigt y, en particular, el concepto de consenso de trabajo están en íntima relación con el concepto de *contrato didáctico* de Brousseau (1986), puesto que las expectativas de un participante se toman parcialmente como obligaciones por parte de los otros. El *consenso de trabajo* (contrato didáctico) “se refiere a un acuerdo principalmente implícito e inestable entre las expectativas del profesor y la aceptación por parte de los estudiantes de los objetivos de sus acciones” (p. 93).

“Como un todo, nos podemos imaginar un patrón de interacción como una red compuesta de acciones y obligaciones implícitas para acciones subsiguientes. Las obligaciones afectan las acciones sobre la base de patrones de experiencia. La relación entre los patrones de experiencia en la forma del consenso de trabajo permite la interacción coordinada y de acuerdo a patrones por parte de los participantes” (p. 95).

Este estudio

En este estudio se siguen los esquemas propuestos por Burns, Lash y Stodolsky. El estudio se aproxima a la interacción desde el punto de vista del análisis de la estructura de las actividades que determinan un segmento. La noción de segmento determina el período de tiempo en el cual se realiza una tarea particular y se produce un discurso coherente alrededor de esta actividad, manteniendo constante el formato de interacción entre los actores. De esta forma, tanto el análisis de la interacción social, como el análisis del discurso matemático de cada uno de los actores estará enmarcado dentro de un contexto coherente y con significado que permite describir las características estructurales de estos dos aspectos curriculares.

Por otra parte, se hace también un análisis microetnográfico de dos segmentos de interacción, siguiendo los esquemas utilizados por Voigt.

El estudio de la cultura del salón de clase puede hacerse desde por lo menos dos perspectivas:

- La interacción social entre el profesor y los alumnos
- Las características del discurso matemático que realizan profesor y alumnos durante la interacción

La interacción social

La interacción en el salón de clase tiene lugar en un momento dado del proceso de enseñanza y aprendizaje entre por lo menos dos *actores* y es de carácter *bipolar*, aún cuando uno de los actores puede no manifestar explícitamente una *reacción* al mensaje que el otro actor le ha transmitido. El profesor es generalmente uno de los actores de la interacción, pero ésta también puede tener lugar entre dos o más alumnos sin la participación del profesor.

La interacción tiene lugar gracias a que existe una comunicación entre los actores. Esta comunicación puede ser de tipo verbal o no verbal. La comunicación verbal se hace durante la construcción de un discurso. En el caso del salón de clase de matemáticas este discurso tiene, en general, un contenido matemático.Este discurso se desarrolla a partir de una serie de mensajes que pretenden construir un significado. Se aprecia entonces cómo el discurso matemático se realiza dentro del salón de clase puede jugar un papel central en la caracterización de la interacción social entre los actores.

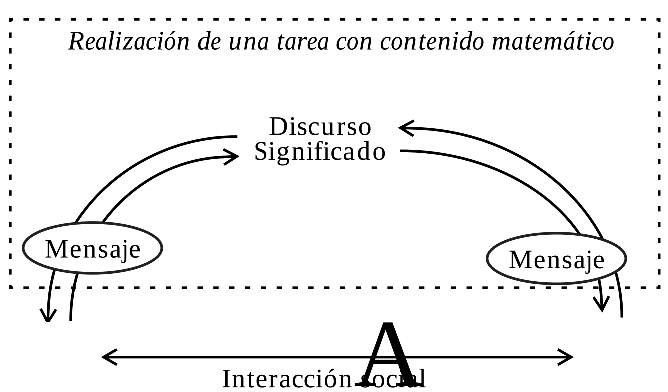

Figura Nº 2. La interacción y el discurso

Son muchos los factores que se pueden tener en cuenta para caracterizar la interacción social en el salón de clase. Siguiendo las ideas presentadas anteriormente, se pueden considerar varios aspectos.

Los actores

Los actores son las personas que participan en la interacción. La interacción social se encuentra expresada en la arista inferior del sistema curricular (Rico, 1990a).

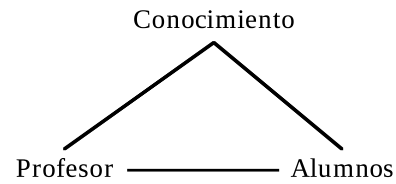

Figura Nº 3. Elementos del sistema curricular

En el sistema curricular cada elemento se encuentra en relación con los otros dos. Como se esquematiza en la figura 4, se considera la interacción social entre los actores (flechas en los dos sentidos) y la caracterización del discurso matemático que ellos construyen (flechas en un sentido hacia el conocimiento). En el caso de este estudio particular y, por razón de las características de los patrones que impone la profesora que se estudia y que serán evidentes más adelante, resulta conveniente considerar dos funciones diferentes en los alumnos: alumno en el tablero y grupo de alumnos, surgiendo, de este modo, un modelo de cuatro componentes:

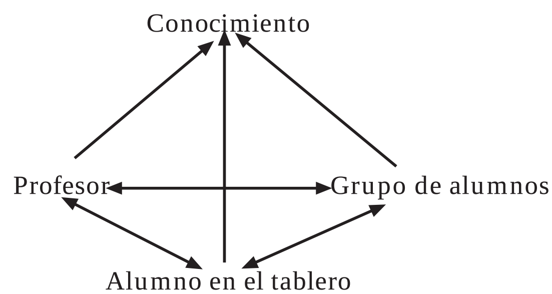

Figura Nº 4. Las relaciones en el sistema curricular

El formato

La interacción se da entre dos o más actores. Estos actores pueden asumir roles diferentes dentro de esta interacción. El formato de la interacción caracteriza los roles de los actores y el propósito de la tarea que se realiza.

El ritmo

El ritmo está determinado por el actor que define qué tarea se va a realizar a lo largo de la interacción y la forma como los otros actores reaccionan a esta acción.

El comportamiento de los actores

El comportamiento de un actor con los otros actores que participan en la interacción es un elemento central de ésta. Se enumeran a continuación algunas de las características de este comportamiento desde dos perspectivas: la del profesor y la del alumno.

Perspectiva del profesor. Desde el punto de vista del profesor, es posible tener en cuenta los siguientes elementos de la actuación del profesor dentro de su interacción social con el alumno:

- La forma como el profesor le indica al alumno la tarea a realizar y la forma como el primero guía y administra la realización de esta tarea por parte del segundo
- La forma como el profesor administra los errores que los alumnos cometen durante la realización de la tarea
- La forma como el profesor reacciona a las iniciativas propuestas por el estudiante durante la realización de la tarea
- La forma como el profesor administra la discusión en el salón de clase, tanto la discusión que se da entre los alumnos, como la discusión que él puede tener con uno o más alumnos
- La actitud que el profesor expresa hacia la negociación de los aspectos metodológicos
- La forma como el profesor administra la autoridad en relación con la validez de las afirmaciones que él hace o las afirmaciones hechas por el alumno
- La forma como el profesor desarrolla un tópico dentro de una exposición
- El tipo de intervención que el profesor hace durante la realización de una tarea

Perspectiva del alumno. Desde el punto de vista del alumno, es posible tener en cuenta los siguientes elementos de su actuación dentro de la interacción social con el profesor o con sus compañeros:

- La forma como el alumno administra y reacciona a las instrucciones, sugerencias y guías que el profesor le propone durante la realización de una tarea
- La forma como el alumno administra la autoridad del profesor en relación con la validez de sus afirmaciones
- La actitud del alumno hacia su propia autoridad en relación con la validez de sus afirmaciones
- La actitud del alumno hacia la presentación, la explicación y la justificación de sus ideas ante el profesor y sus compañeros
- El tipo de comunicación que se da entre los alumnos durante la realización de una tarea
- La actitud de los alumnos hacia la forma como se decide y acuerda la validez de los discursos propuestos durante la realización de la tarea

El discurso matemático

Se considera ahora el discurso matemático que se realiza con motivo de la interacción en el salón de clase. Este discurso tiene lugar a lo largo de múltiples dimensiones:

- La tarea que se realiza
- Los sistemas de representación en los que se expresa
- El tipo de conocimiento que se utiliza
- El medio físico en el que se realiza
- Los recursos que se utilizan
- Los aportes de los actores
- El período de tiempo durante el que tiene lugar el discurso

- La validez herencia de las afirmaciones y del discurso total

La tarea

Para que el discurso que se realiza dentro de la interacción tenga coherencia y significado en el contexto del aula de clase de matemáticas es necesario que éste gire alrededor de la realización de una tarea. Esta tarea puede ser de dos tipos.

La resolución de un ejercicio o un problema. En este caso, la tarea tiene como contenido una *situación particular* en la que hay una información inicial que particulariza el discurso. El propósito de la tarea es la satisfacción de unas condiciones previamente expuestas a partir de la información inicial.

El desarrollo conceptual. En este caso, el propósito del discurso es la exposición o desarrollo de un tópico a través de la explicación o justificación de un concepto o un procedimiento matemático. La tarea no gira alrededor de una instancia particular.

Sistemas de representación

Se sigue la conceptualización de Kaput (1992) sobre sistemas de representación, que él denomina sistemas de notación. "De manera informal definimos un *sistema de notación* como un sistema de reglas (i) para identificar o crear caracteres; (ii) para operar sobre ellos; (iii) para determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia). De esta forma, los caracteres no tiene que ser sucesiones de letras o números y pueden incluir gráficas y diagramas o inclusive objetos físicos [...]" (p. 523).

El discurso matemático requiere de por lo menos un sistema de representación en el cual puedan expresarse (codificarse) las ideas y procedimientos que se utilizan en la realización de la tarea o en la exposición de un tópico. Se consideran aquí tres sistemas de representación:

- Gráfico
- Simbólico
- Tabular

Los sistemas de representación imponen ciertas condiciones sobre las características del discurso.

El discurso matemático se basa en tres tipos de acciones dentro de los sistemas de representación:

- La transformación sintáctica de un objeto en otro al interior del mismo sistema de representación
- La traducción de un objeto representado en un sistema de representación al mismo objeto representado en otro sistema de representación
- El modelaje, como traducción entre aspectos de situaciones representadas de manera no matemática y uno o más sistemas de representación

Por otra parte, el manejo de los sistemas de representación impone ciertas condiciones:

- Cada afirmación que compone el discurso debe estar expresada en un sistema de representación
- El discurso puede utilizar más de un sistema de representación
- Al interior del discurso tanto las transformaciones sintácticas, como las traducciones entre sistemas de representación pueden o no ser coherentes o válidas

- ▲ La utilización de un sistema de representación en una o varias partes de un discurso puede o no ser *necesaria* para la coherencia global del mismo

Tipos de conocimiento

El discurso se da alrededor de un área del conocimiento matemático que se encuentra involucrada en una tarea que hay que realizar. Este discurso puede analizarse dentro de dos dimensiones: la dimensión conceptual y la dimensión procedimental.

En la dimensión conceptual, el discurso gira alrededor del manejo y la interacción entre unidades de información, conceptos matemáticos y estructuras conceptuales que relacionan los conceptos. En la dimensión procedimental, el discurso se centra en la aplicación de reglas, algoritmos y procedimientos que permiten la realización de una tarea particular dentro del discurso o de la globalidad de la tarea alrededor de la cual se da el discurso. (Rico, 1990b; Hiebert y Lefevre, 1986).

Medios

El discurso matemático requiere de un medio físico en el cual se exprese el mensaje que se desea transmitir. Este es el medio en el cual se expresan físicamente los sistemas de representación. “El medio está constituido por aquellos aspectos particulares del mundo físico en los cuales se expresan los sistemas de representación. Estos pueden incluir papel y lápiz, objetos físicos, pantallas de computador, sonido (para el lenguaje hablado), etcétera” (Kaput, 1992, p. 523). Puesto que este estudio se centra en el registro verbal de la interacción, se consideran tres medios:

- ▲ El medio verbal
- ▲ El medio escrito expresado en el tablero
- ▲ El medio escrito expresado en el papel

Recursos

Se consideran tres recursos que pueden ser utilizados durante el discurso:

- ▲ El libro de texto
- ▲ El retroproyector
- ▲ La calculadora

Aportes

Cada uno de los actores puede aportar al discurso que se construye con motivo de la realización de una tarea. Se consideran tres tipos de actores:

- ▲ Profesor
- ▲ Alumno en el tablero
- ▲ Grupo de alumnos

El tiempo

El discurso tiene lugar en un período de tiempo determinado. Dado que un discurso gira alrededor la realización de una tarea y se establece dentro de un formato de interacción particular, diferentes discursos ocuparán períodos de tiempo de longitudes diferentes.

La reflexión anterior da lugar a la noción de *segmento*.“Los segmentos de clase son bloques de tiempo durante una clase que tienen un propósito, un foco y un patrón de actividad preciso. Las características del segmento pueden ser delineadas, de tal forma que, cuando se toman conjuntamente, definen la estructura de actividad del segmento”. (Burns y Lash, 1987, p. 395).

Validez y coherencia

La validez es otra característica del discurso. Este puede o no ser válido desde el punto de vista matemático. Cuando hay errores en el discurso, estos pueden considerarse según dos tipos: conceptuales o procedimentales.

Los errores se expresan en el discurso cuando:

- ▲ Se utiliza un concepto o un procedimiento que no corresponde o no aplica a la situación en cuestión
- ▲ Se utiliza de manera errada un concepto o un procedimiento que sí corresponde a la situación en cuestión
- ▲ Se utiliza un concepto o un procedimiento errado

El discurso que se desarrolla al realizar una tarea puede o no ser coherente en el sentido de que el mensaje que transmite el discurso puede o no tener significado para quien lo recibe y lo interpreta. Sin embargo, un discurso que no es válido, puede en todo caso ser coherente. La coherencia del discurso está en relación con la existencia de una secuencia lógica de conexión entre las afirmaciones que lo componen. Estas conexiones tienen que ser válidas para que el discurso sea coherente.

Dimensiones del discurso matemático

En resumen, el discurso matemático, en su evolución en el tiempo, puede caracterizarse a lo largo de cinco grandes dimensiones:

- ▲ Los sistemas de representación que utiliza
- ▲ Los tipos de conocimiento que involucra
- ▲ El medio físico en el que se realiza
- ▲ Los recursos que utiliza
- ▲ Los aportes de los actores

De manera ideal podría entonces pensarse en describir este discurso matemático, en su evolución en el tiempo, dentro de un espacio de seis dimensiones. En este espacio, un eje correspondería a la variable tiempo y los otros cinco ejes corresponderían a las cinco dimensiones anteriores. Una vez que se hayan definido los valores posibles que puede asumir cada una de estas cinco variables, el discurso estaría representado por una sucesión de segmentos en este espacio. La coherencia del discurso sería una característica de los "saltos" entre segmentos.

Es evidente que la propuesta anterior resulta demasiado compleja para ponerse en práctica dentro de este estudio. Sin embargo, es importante que un instrumento que pretenda describir el discurso matemático de un actor tenga en cuenta lo rasgos que se han descrito. Estos rasgos tienen que ver con los siguientes aspectos:

Las cinco dimensiones. La existencia de cinco grandes dimensiones dentro de las que el discurso evoluciona a lo largo del tiempo.

La estructura de las dimensiones. Cada una de estas dimensiones es compleja, pues, a su vez, tiene varios componentes. De esta forma, por ejemplo, en la dimensión *sistemas de representación* se consideran los componentes gráfico, simbólico y tabular. Por su parte, en la dimensión *tipo de conocimiento* se consideran los componentes conceptual y procedimental y en la dimensión *medios* los componentes verbal, escrito en el tablero y escrito en el papel.

La complejidad de las dimensiones. El desarrollo de un discurso a lo largo de una dimensión tiende a involucrar más de un componente. Existe una dependencia entre los componentes en su utilización dentro del discurso. Es esta dependencia la que determina, en buena parte, la coherencia y el significado del discurso.

El discurso realizado y el discurso ideal. Para la realización de una tarea dada, es posible imaginar múltiples discursos que la concretan. Sin embargo, lo importante aquí es el análisis del discurso mismo que fue desarrollado por el actor en cuestión al realizar la tarea específica. Este discurso tiene su propia lógica y busca transmitir su propio significado.

Presencia, necesidad y suficiencia de un componente

Es posible aproximarse, desde el punto vista operacional, al análisis del discurso teniendo en cuenta las condiciones anteriores a partir de las nociones de existencia, necesidad y suficiencia de la utilización de un componente en la realización de una tarea. Estas nociones se definen a continuación.

Presencia. Se dice que un componente estuvo *presente* en la realización de una tarea dentro de un discurso si ese componente fue utilizado o mencionado dentro del mismo.

Necesidad. Se dice que la utilización o mención de un componente fue *necesaria* en la realización de la tarea dentro del discurso si, al eliminar esta utilización o mención, el discurso pierde significado y no es posible realizar la tarea.

Suficiencia. Se dice que la utilización o mención de un componente fue *suficiente* en la realización de la tarea dentro del discurso si la utilización que se pudo haber hecho de los otros componentes de la dimensión dentro del discurso no son necesarios para la realización de la tarea o para el significado del discurso.

Ejemplo

Se considera la siguiente tarea:

> *Hallar las coordenadas del vértice de la parábola cuya expresión simbólica es*

$$y = (x - 1)(x - 3)$$

Hay múltiples discursos que permiten desarrollar esta tarea. Se analizan algunos de ellos para ejemplificar la operacionalización de los componentes simbólico y gráfico de la dimensión *sistemas de representación*.

Componente simbólico suficiente y gráfico no necesario

En el discurso se puede:

- ▲ Desarrollar la expresión simbólica dada para obtener $y = x^2 - 4x + 3$
- ▲ Realizar la completación de cuadrados para obtener la expresión

  $y = (x-2)^2 - 1$
- ▲ Concluir que el vértice se encuentra en el punto (2, -1)

En este caso, el componente simbólico de la dimensión *sistemas de representación* es *suficiente*.

En otra situación, se desarrolla un discurso similar excepto que, como primer paso, se dibuja la gráfica de la parábola a partir de la expresión simbólica dada, con base en la localización de sus cortes con el eje x. Sin embargo, el resto del discurso se mantiene igual. En este caso, aunque el componente gráfico está *presente* en el discurso, no es *necesario* para el significado del mismo.

Componente gráfico suficiente

Para la misma tarea, se puede desarrollar el siguiente discurso:

- ▲ Se dibuja la gráfica de la parábola a partir de la localización de sus raíces
- ▲ Se utiliza el hecho de que la abcisa del vértice se encuentra en el punto medio de las raíces, para hallarla
- ▲ Se utiliza la función *Trace* de la calculadora para hallar la ordenada del vértice

En este caso el componente gráfico fue *suficiente*, porque aunque el componente simbólico estaba presente, éste era requerido por las condiciones iniciales de la tarea, pero no fue necesario para la realización de la misma.

Componentes gráfico y simbólico necesarios

Finalmente se considera un discurso en el que se utiliza la gráfica para hallar la abcisa del vértice de la forma que se acaba de exponer, pero se reemplaza este valor en la expresión simbólica para hallar la ordenada. En este caso tanto el componente gráfico, como el componente simbólico son *necesarios*.

Definición del problema

Introducción

Este estudio busca explorar los efectos de una innovación curricular (producto de la introducción de la calculadora gráfica como nuevo elemento del currículo) en la cultura del salón de clase. El estudio tiene lugar dentro de un contexto particular: el programa de investigación *Calculadoras gráficas y Precálculo* en la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia.

Las preguntas

Este estudio busca explorar los efectos de la presencia de la calculadora gráfica en la “cultura del salón de clase” (Nickson, 1992). Se hace una aproximación a esta problemática desde dos perspectivas:

- ▲ La interacción social entre el profesor y los alumnos
- ▲ El discurso matemático de profesor y alumnos

Se busca, entonces, información relevante que permita aproximar respuestas a las siguientes cuestiones:

- ▲ ¿Cómo cambia, si lo hace, y en qué sentido, la interacción social entre el profesor y los alumnos?
- ▲ ¿Cómo cambia, si lo hace, y en qué sentido, la interacción social entre los alumnos?
- ▲ ¿Cómo cambia, si lo hace, y en qué sentido, el discurso matemático que se construye durante la realización de una tarea?

Diseño

Introducción

Una aproximación "ingenua" al problema del papel de la tecnología dentro de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas podría esperar que se diseñaran proyectos de investigación en los que fuese posible proponer reglas o leyes generales que caractericen los efectos de la introducción de la tecnología dentro del currículo. Este tipo de proyectos requiere de condiciones experimentales muy restringidas que falsean el verdadero papel que puede jugar la tecnología.

> *Un verdadero estudio experimental que intente aislar los efectos de la disponibilidad para los estudiantes de las calculadoras gráficas sería tan restrictivo en sus controles que los resultados serían de muy poca utilidad práctica. Nadie puede creer que el simple hecho de hacer presente un conjunto de calculadoras gráficas en el salón de clase tendrá efectos mágicos en los estudiantes. Sin embargo, algún investigador puede intentar comparar dos grupos de estudiantes en los que el contenido, la instrucción y la valoración son idénticos y la presencia de las calculadoras gráficas es la única diferencia. Este tipo de estudios puede ofrecernos muy poco insight. Aún si el investigador fuese capaz de equiparar exactamente el contenido y la instrucción entre el grupo experimental y el grupo de control a partir de un conjunto de estudiantes seleccionados al azar –lo que es ya una tarea difícil–, atribuir cualquier diferencia significativa en rendimiento entre los dos grupos a la mera presencia de las calculadoras gráficas sería una actitud irresponsable. Uno quisiera saber inmediatamente <u>cómo</u> los estudiantes usaron la calculadora e investigar <u>por qué</u> aparecieron las diferencias (Dunham y Dick, 1994, p.441).*

Es evidente que no se pueden mirar las calculadoras gráficas como un elemento *aislado* que simplemente se encuentra presente en el salón de clase. La presencia de las calculadoras gráficas y el estudio de sus posibles efectos tiene que mirarse desde el punto de vista de la complejidad de la interacción que genera dentro del currículo de matemáticas. Este estudio se aproxima a los temas de la interacción social y del discurso matemático en el salón de clase con motivo de la presencia de las calculadoras gráficas teniendo en cuenta esta complejidad. Por esta razón, y siendo éste un estudio descriptivo y exploratorio, no se pretende contrastar hipótesis como podría hacerse con un diseño experimental. Teniendo en cuenta la aclaración anterior, se utilizan los términos *grupo de control* y *grupo experimental* para identificar los dos grupos de estudiantes que fueron observados.

Muestra

La muestra para este estudio consistió en dos grupos de alumnos que se identificarán de aquí en adelante como el *grupo de control* y el *grupo experimental*. Los dos grupos de estudiantes tuvieron la misma profesora.

La profesora. La profesora, una persona de cuarenta años, ha trabajado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes durante más de cinco años. También trabaja como profesora de matemáticas en otra universidad de la ciudad. La profesora fue seleccionada para el estudio al considerarla como una profesora "típica" dentro del grupo de profesores que dictan este curso en la Universidad. Ella aceptó participar en el estudio y estuvo dispuesta a que sus clases fuesen observadas y grabadas en video.

Grupo de control. El grupo de control estaba compuesto por la profesora y aproximadamente treinta estudiantes del curso 01108 - Precálculo de la Universidad de los Andes del segundo semestre de 1993. Estos son, en su mayoría, estudiantes de primer semestre que acaban de terminar sus estudios de secundaria. Algunos de ellos se encuentran repitiendo el curso, después de haberlo perdido el semestre anterior. El grupo de control desarrolló el diseño curricular "oficial" del Departamento de Matemáticas para este curso, diseño curricular que ya fue brevemente descrito. A la profesora no se le dio ningún tipo de indicación diferente de las que los profesores del curso reciben normalmente.

Grupo experimental. El grupo experimental estaba compuesto por otro grupo de estudiantes de primer semestre. El curso del grupo experimental tuvo lugar durante el primer semestre de 1994, con la misma profesora. En este caso, cada uno de los estudiantes recibió en los primeros días de clase, de parte del proyecto de investigación, una calculadora gráfica Texas Instruments TI-85. Cada estudiante tuvo la calculadora durante todo el semestre, pudiéndola utilizar, tanto durante la hora de clase, como durante el tiempo que le dedicaban al curso en su casa. Sin embargo, no se permitió la utilización de las calculadoras durante las principales pruebas de evaluación. Por otra parte, la profesora recibió una serie de instrucciones relacionadas con el manejo de la calculadora en el salón de clase y una parte de los materiales (situaciones problemáticas) que se utilizaron en el curso fueron diseñados para que involucraran el manejo de la calculadora por parte del estudiante. No obstante, el "nuevo diseño curricular" consistió más en una adaptación de la calculadora al diseño existente, que en una reformulación de este diseño teniendo en cuenta la presencia de la nueva tecnología.

Instrumentos y observación

En ambos grupos se grabó en video las clases correspondientes al tema de *funciones cuadráticas*. Este es el segundo tema del curso, después de funciones lineales. Tiene lugar entre la cuarta y la séptima semana del mismo. La cámara de video se ubicó en el costado posterior del salón de tal forma que fuese posible registrar la actuación del profesor y del alumno en el tablero y al menos una parte de la actuación del resto de alumnos en el grupo.

Variables

Introducción

En este apartado se hace una descripción de las variables que fueron utilizadas para el análisis de la interacción social y del discurso matemático que se construye durante esta interacción. Se consideran la noción de segmento y las variables formato, ritmo y tarea. En seguida se caracterizan las variables con las cuales se estudia la interacción social entre los actores. Finalmente, se detallan las variables que permiten analizar el discurso matemático. Estas se encuentran agrupadas en cinco categorías: sistemas de representación, tipo de conocimiento, medios, recursos y aportes.

La noción de segmento

Una hora de clase se puede dividir en segmentos. Un segmento es el período de tiempo en el cual se realiza una tarea particular con un propósito preciso dentro de un formato de interacción específico. De esta forma, la determinación del comienzo de un segmento está dada por dos acontecimientos posibles: ya sea, se inicia la realización de una nueva tarea, o, al interior de la realización de una misma tarea, se inicia un formato de interacción diferente del que estaba teniendo lugar en el segmento anterior. Se considera que, para efectos de determinación del inicio de un segmento, el formato ha cambiado si cambia la identidad del alumno en el tablero dentro de este patrón de interacción. El carácter operacional de la noción de segmento se hará más clara enseguida, como consecuencia de la definición de las variables formato y tarea.

Formato, tarea y ritmo

Se agrupan en una misma categoría estas tres variables que caracterizan a cada segmento.

Formato

La variable formato tiene tres valores posibles:

- ▲ Instrucciones del profesor
- ▲ Explicaciones del profesor
- ▲ Alumno en el tablero

Estos valores se determinan a partir de dos perspectivas:

Comunicación. La comunicación se caracteriza de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) El profesor da instrucciones

(1) El profesor desarrolla un tópico

(2) Hay un alumno en el tablero realizando una tarea

Tarea. La tarea que se realiza se analiza de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) La tarea no tiene contenido matemático

(1) La tarea tiene contenido matemático

Valores de la variable. Los valores de la variable se determinan tomando el mayor valor obtenido entre los dos descriptores.

Ritmo

La variable ritmo busca identificar el actor que inicia la interacción dentro de un segmento. Esta variable tiene tres valores:

- ▲ Profesor
- ▲ Alumno en el tablero
- ▲ Grupo de alumnos

La caracterización de los tres valores de la variable exige diferencias fuertes tanto para el comportamiento del profesor, como para el de los alumnos. En particular, los valores *alumno en el tablero* y *grupo de alumnos* indican un grado de autonomía considerable por parte de los alumnos. Las variaciones en la variable ritmo serán significativas en cuanto marcan una diferencia considerable en el rol del profesor y del alumno.

Los valores de la variable se determinan entonces a partir de dos perspectivas:

- ▲ El comportamiento del profesor
- ▲ El comportamiento de los alumnos

Comportamiento del profesor. El comportamiento del profesor se caracteriza de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) El profesor impone la tarea a realizar o desarrolla un tópico de su elección o da instrucciones

(1) El profesor acepta la tarea que propone el alumno en el tablero e interactúa con éste

(2) El profesor acepta la tarea propuesta por el grupo de alumnos e interactúa con ellos

Comportamiento de los alumnos. El comportamiento de los alumnos se caracteriza de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) Los alumnos aceptan la propuesta del profesor

(1) Un alumno pasa al tablero y propone una tarea que no ha sido escogida o propuesta por el profesor

(2) Un alumno hace una pregunta o propone la realización de una tarea que no ha sido escogida o propuesta por el profesor

Valores de la variable. Los valores de la variable ritmo se determinan tomando el mayor valor obtenido entre los dos descriptores.

Tarea

La variable tarea determina el tipo de actividad matemática o no matemática que se realiza durante el segmento. Esta variable puede asumir uno de tres valores posibles:

- ▲ Gestión administrativa
- ▲ Resolución de un ejercicio o problema
- ▲ Desarrollo conceptual de un tópico

Estos valores se encuentran determinados por los siguientes descriptores:

(0) La tarea no tiene contenido matemático

(1) La tarea involucra una instancia particular de un contenido matemático con presencia de una información inicial y unas condiciones a satisfacer

(2) La tarea gira alrededor de consideraciones generales del contenido matemático

La interacción social

Las variables de interacción social buscan caracterizar el comportamiento de los actores en la interacción. Hay seis variables de interacción social que corresponden a las seis flechas de la figura 5.

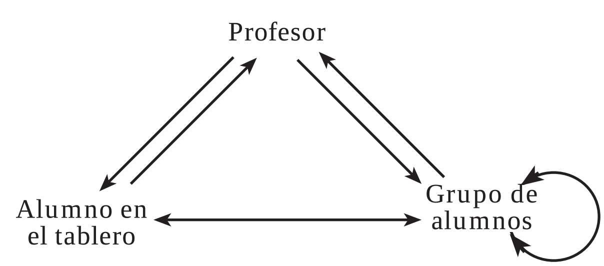

Figura Nº 5. Variables de interacción social

Cada una de estas seis variables puede asumir uno de cuatro valores que se codifican con 0, 1, 2 y 3 y que representan un orden.

Variables profesor

Las variables correspondientes al profesor (con el alumno en el tablero y con el grupo de alumnos) se analizan desde cuatro perspectivas:

- ▲ Tipo de intervención
- ▲ Manejo de los errores
- ▲ Manejo de las iniciativas e intervenciones de los alumnos
- ▲ Manejo de la autoridad

Tipo de intervención. La intervención del profesor dentro de la realización de la tarea se clasifica de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) El profesor hace una exposición literal de un contenido

(1) La intervención del profesor es necesaria para la realización de la tarea

(2) La intervención del profesor no es necesaria para la realización de la tarea

(3) El profesor propone situaciones problemáticas con propósitos didácticos que deben ser realizadas por los estudiantes

Manejo de los errores. El manejo de los errores de los estudiantes por parte del profesor se clasifica de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) Los corrige inmediatamente

(1) Los identifica y da oportunidad para que se corrijan

(2) Permite que existan durante un tiempo

(3) Los maneja con propósitos didácticos

Manejo de las iniciativas del alumno. El manejo de las iniciativas del alumno por parte del profesor se clasifica de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) No las atiende

(1) Las atiende, pero no induce a los estudiantes a que las desarrollen y las justifiquen

(2) Induce a los alumnos a que las desarrollen y las justifiquen, pero no los incita a que las propongan

(3) Incita a los estudiantes a que propongan y desarrollen sus propias iniciativas

Manejo de la autoridad. El manejo de la autoridad con respecto al conocimiento dentro del salón de clase por parte del profesor se clasifica de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) Impone su propia autoridad

(1) No impone su autoridad, pero no permite su cuestionamiento por parte de los alumnos

(2) Permite el cuestionamiento por parte de los alumnos de su autoridad

(3) No hace presente su autoridad dentro del discurso

Valores de las variables. Los cuatro valores de la variable se determinan tomando el mayor valor obtenido entre los cuatro descriptores. En el caso de la variable *profesor → alumno en el tablero*, el manejo de los errores y las iniciativas se refieren a los errores y las iniciativas de este alumno. En el caso de la variable *profesor → grupo de alumnos*, estos descriptores se refieren a las actuaciones del grupo de alumnos.

Variables alumnos → profesor

Aquí se consideran tanto la variable *alumno en el tablero → profesor*, como la variable *grupo de alumnos → profesor*. Estas variables se analizan desde tres perspectivas.

Reacción a las intervenciones del profesor. La reacción de los estudiantes (alumno en el tablero, por un lado, o grupo de alumnos, por el otro) se clasifica de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) Espera instrucciones o desarrollo literal del tópico

(1) Sigue las instrucciones o el desarrollo, pero utiliza o presenta sus propias iniciativas cuando se le requiere o es necesario dentro de la tarea

(2) Presenta iniciativas propias distintas de las del profesor

(3) No tiene en cuenta las intervenciones del profesor y desarrolla la tarea o el tópico de acuerdo a sus propias iniciativas

Actitud ante la autoridad del profesor. La actitud de los estudiantes (alumno en el tablero, por un lado, o grupo de alumnos, por el otro) ante la autoridad del profesor se clasifica de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) Requiere la autoridad del profesor

(1) Acepta pasivamente la autoridad del profesor sin cuestionarla aunque manifiesta la conciencia acerca de la existencia de otras fuentes de autoridad

(2) Cuestiona la autoridad del profesor e intenta imponer otras fuentes de autoridad incluida la suya

(3) Trabaja basándose en múltiples fuentes de autoridad, principalmente de acuerdo al consenso con sus compañeros

Iniciativas propias. El manejo de las iniciativas propias por parte de los estudiantes (alumno en el tablero, por un lado, o grupo de alumnos por el otro) se clasifica de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) No expone iniciativas propias

(1) Expone iniciativas propias pero las desecha cuando éstas son cuestionadas por el profesor

(2) Expone iniciativas propias y las defiende y justifica cuando éstas son cuestionadas por el profesor

(3) Genera una situación en la que la tarea se realiza a partir de sus propias iniciativas y las de sus compañeros sin intervención del profesor

Valores de las variables. Los cuatro valores de las dos variables se determinan tomando el mayor valor obtenido entre los tres descriptores.

Variables alumno en el tablero ↔ grupo de alumnos

Esta variable describe el comportamiento de los alumnos en la interacción entre el alumno en el tablero y el grupo de alumnos. Esta variable se analiza desde dos perspectivas.

Comunicación. La comunicación entre el alumno en el tablero y el grupo de alumnos se clasifica de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) No hay intervención del grupo de alumnos

(1) Hay intervención del grupo de alumnos, pero el alumno en el tablero no la tiene en cuenta

(2) El alumno en el tablero tiene en cuenta la intervención del grupo de alumnos, pero no se da discusión

(3) Se da discusión entre el alumno en el tablero y el grupo de alumnos

Discurso. Las características de los discursos que se desarrollan se clasifican de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) No se presenta ningún aporte por parte de los alumnos

(1) Se presenta el aporte de más de un alumno para la realización de la tarea, pero no se explican o justifican los discursos

(2) Los alumnos justifican y explican sus discursos, pero la validez de éstos no es decidida socialmente

(3) La validez de los discursos propuestos es decidida y acordada socialmente entre los alumnos

Valores de las variables. Los cuatro valores de las dos variables se determinan tomando el mayor valor obtenido entre los dos descriptores.

Grupo de alumnos ↔ Grupo de alumnos

Esta variable pretende describir la interacción interna dentro del grupo de alumnos con motivo de la realización de una tarea. Se tienen en cuenta dos perspectivas:

Comunicación. La comunicación entre el alumno en el tablero y el grupo de alumnos se clasifica de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) No hay interacción entre los alumnos

(1) Hay interacción entre dos o más alumnos, pero ésta es dependiente de una intervención relevante por parte del profesor

(2) Hay interacción entre los dos o más alumnos, pero la intervención del profesor no es relevante para ella

(3) La interacción se da sin la intervención del profesor

Discursos. Las características de los discursos que se desarrollan se clasifican de acuerdo a los siguientes descriptores:

(0) No se propone más de un discurso posible para la realización de la tarea

(1) Se propone más de un discurso posible para la realización de la tarea, pero sólo uno de ellos es necesario para la realización de la tarea

(2) El aporte de más de un alumno es necesario para la realización de la tarea, pero la validez de éstos no se decide socialmente

(3) La validez de los discursos propuestos es decidida y acordada socialmente entre los alumnos

Valores de la variable. Los valores de la variable se determinan tomando el mayor valor obtenido entre los dos descriptores.

El discurso matemático

A continuación se consideran las variables que buscan describir el discurso que se desarrolla durante el segmento con motivo de la realización de la tarea en cuestión. En el marco conceptual se propuso que el discurso matemático, en su evolución en el tiempo, puede caracterizarse a lo largo de cinco grandes dimensiones:

- Los sistemas de representación que utiliza
- Los tipos de conocimiento que involucra
- El medio físico en el que se realiza
- Los recursos que utiliza
- Los aportes de los actores

Presencia, necesidad y suficiencia de un componente

Es posible aproximarse, desde el punto vista operacional, al análisis del discurso a partir de las nociones de existencia, necesidad y suficiencia de la utilización de un componente en la realización de una tarea. Estas nociones se definen a continuación.

Presencia. Se dice que un componente estuvo *presente* en la realización de una tarea dentro de un discurso si ese componente fue utilizado o mencionado dentro del mismo.

Necesidad. Se dice que la utilización o mención de un componente fue *necesaria* en la realización de la tarea dentro del discurso si, al eliminar esta utilización o mención, el discurso pierde significado y no es posible realizar la tarea.

Suficiencia. Se dice que la utilización o mención de un componente fue *suficiente* en la realización de la tarea dentro del discurso si la utilización que se pudo haber hecho de los otros componentes de la dimensión dentro del discurso no son necesarios para la realización de la tarea o para el significado del discurso[2].

Definición y operacionalización de las variables para el análisis del discurso

Se define un conjunto de variables a partir del cual sea posible describir el discurso matemático desarrollado durante la realización de una tarea.

Variables. Se define una variable para cada componente de cada una de las cinco dimensiones. De esta forma se tienen entonces quince variables de acuerdo a la siguiente lista:

- *Variables de la dimensión sistemas de representación*: gráfica, simbólica, tabular, traducción
- *Variables de la dimensión tipo de conocimiento*: conceptual, procedimental
- *Variables de la dimensión medios*: verbal, tablero, papel
- *Variables de la dimensión recursos*: libro, calculadora, retroproyector
- *Variables de la dimensión aportes*: profesor, alumno en el tablero, grupo de alumnos

2. En el apartado *marco conceptual* se presentó un ejemplo de la utilización de estas nociones en la caracterización de diversos discursos producidos para la realización de una tarea específica.

Descriptores. Cada una de las variables anteriores puede asumir uno de cuatro valores que se codifican con 0, 1, 2 y 3 y que representan un orden. Los valores de la variable se determinan a partir de cuatro descriptores:

(0) El componente no está presente en el discurso

(1) El componente está presente, pero no es necesario en el discurso

(2) El componente es necesario, pero no es suficiente en el discurso

(3) El componente es suficiente en el discurso

Variable de traducción entre sistemas de representación

Se incluye una variable adicional que busca describir el papel de la traducción entre sistemas de representación dentro de la realización de la tarea. Esta variable busca describir uno de los cuatro tipos de actividades matemáticas en las matemáticas escolares propuestos por Kaput (1992):

- "Traducciones entre sistemas de notación [representación], incluyendo la coordinación de acciones a través de estos sistemas" (p. 524)

Este tipo de actividad ha sido también descritas por otros autores (e.g., Janvier, 1987; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993).

Valores de la variable. Esta variable puede asumir uno de tres valores 0, 1 y 2. Estos valores se determinan a partir de tres descriptores:

(0) No hay traducción

(1) Hay traducción, pero ésta no es necesaria para la realización de la tarea

(2) Hay traducción y ésta es necesaria para la realización de la tarea o el significado del discurso

Instrumentos de observación y recogida de datos

Instrumento

El instrumento de observación estaba compuesto de tres planillas. Una para las variables de segmento y para una breve descripción de los sucedido durante éste (incluida su duración); una para las variables de interacción social; y una para las variables de discurso matemático.

Cada fila de una planilla correspondía a un segmento y las columnas correspondían a las variables de acuerdo a la descripción que se acaba de hacer.

Recolección de datos

Dado que el instrumento contiene 24 variables, no era razonable observar cada segmento con respecto a cada variable. Cada segmento fue observado entre dos y cuatro veces. A partir de estas observaciones se registró el valor de cada una de las variables. Se obtuvieron 52 segmentos para el grupo de control y 35 segmentos para el grupo experimental. La figura 6 muestra una porción de una de la planilla de variables de segmento correspondiente a una clase del grupo experimental.

Duración				Segmento		
Nº Segmento	Com. Min	Com. Seg	Duración	Tema	Formato	Ritmo
4_1	0	0	90	Resumen de la situación	EP	P
4_2	1	30	840	Factorización	AT	P
4_3	15	30	360	Sacar raíz cuadrada sin calculadora	EP	P
4_4	21	30	420	Sacar una raíz	AT	P
4_5	28	30	270	Otra raíz	AT	P
4_6	33	0	390	Resumen de Carlos	AT	AT
4_7	39	30	600	Resumen de la profesora	EP	P
4_8	49	30	570	Qué pasa cuando dan la gráfica	AT	P

Figura Nº 6. Porción de una planilla de datos

Análisis de datos

Los datos

La recolección de datos genera entonces un conjunto de tablas para los dos grupos. Cada tabla está compuesta, en sus filas, por los segmentos. Para cada segmento, hay un conjunto de 24 registros, correspondientes los valores que fueron asignados a las variables en ese segmento.

El análisis de datos busca identificar aquellas variables para las cuales se aprecian diferencias relevantes entre los dos grupos

Resumen de los datos

Es necesario hacer un "resumen" de los datos correspondientes a cada variable. Se utilizaron dos esquemas:

- Frecuencia relativa de segmentos para los cuales la variable toma cada uno de sus valores
- Proporción del tiempo total que la variable toma cada uno de sus valores.

En el primer caso, el procedimiento produce un conjunto de cuatro valores v_0, v_1, v_2 y v_3, donde v_i es la proporción (porcentaje) de segmentos (del número total de segmentos válidos para la variable[3]) en la que la variable tomó el valor *i*.

En el segundo caso, el procedimiento produce un conjunto de cuatro valores v_0, v_1, v_2 y v_3, donde v_i es la proporción (porcentaje) de tiempo total de los segmentos válidos para la variable en el que la variable tomó el valor *i*.

3. Un segmento es válido para una variable si ésta tomó algún valor durante el segmento.

Los dos procedimientos pueden dar resultados diferentes dado que los segmentos son de longitud variable. Dadas estas diferencias, los porcentajes fueron utilizados de acuerdo a los siguientes criterios.

Variables de interacción social. Para estas variables se utilizaron los valores correspondientes al porcentaje de tiempo, dado que estas variables pretenden tener en consideración esta dimensión de la interacción.

Variables de discurso matemático. Para estas variables se utilizaron los valores correspondientes al porcentaje de segmentos, dado que estas variables identifican los segmentos en los que tiene lugar o no una o más características del discurso.

El problema

El análisis anterior produce un conjunto de 21 parejas de cuádruplas y 3 parejas de triplas de valores. Cada cuádrupla corresponde a los porcentajes (ya sea de segmento o de tiempo) de una de las variables. Cada pareja corresponde a las cuádruplas del grupo de control y del grupo experimental para la variable.

Resulta evidente que no es posible identificar aquellas variables que presentan diferencias relevantes a partir de un análisis de las parejas de cuádruplas correspondientes. Se utilizan entonces tres criterios:

A.- El máximo de los valores absolutos de las diferencias entre los valores correspondientes de la variable para el grupo de control y el grupo experimental

B.- La suma de los valores absolutos de las diferencias

C.- El *tamaño del efecto*. Para una variable dada, el tamaño del efecto (entre el grupo de control y el grupo experimental) es igual a:

$$TE = \frac{\overline{X_E} - \overline{X_C}}{\sqrt{\dfrac{S_E{}^2(N_E - 1) + S_C{}^2(N_C - 1)}{N_E - N_C + 2}}}$$

Criterios de selección

Se considera que una variable presenta diferencias relevantes entre el grupo de control y el grupo experimental si por lo menos uno de los tres criterios siguientes tiene lugar:

A.- El máximo de los valores absolutos de las diferencias para esta variable es mayor que 30

B.- La suma de los valores absolutos de las diferencias es mayor que 65

C.- El tamaño del efecto es mayor que 0.7

Los valores 30 y 65 se determinaron analizando las variables para las cuales era posible hacer una interpretación clara de las diferencias entre el grupo de control y el grupo experimental.

Un estudio más profundo debería haber utilizado procedimientos estadísticos más sofisticados para resolver este problema.

Resultados

La figura 7 muestra los resultados obtenidos con los tres procedimientos que se utilizaron.

	Control				Experimental				|Exp-Cntl|				Max	Σ	TE	*Mx	*Σ	*TE
	IP	EP	AT		IP	EP	AT		IP	EP	AT					30	65	0.70
F	2	26	72		0	26	74		2	1	1		2	4		0	0	
	P	AT	GA		P	AT	GA		P	AT	GA							
R	98	0	2		85	12	3		13	12	1		13	26		0	0	
	GA	RE	DC		GA	RE	DC		GA	RE	DC							
T	2	80	19		0	51	49		2	28	30		30	60		0	0	
	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3						
P -> AT	26	68	6	0	8	34	39	19	18	34	33	19	34	104	1.03	1	1	1
P -> GA	50	48	2	0	8	54	17	21	42	6	14	21	42	84	0.95	1	1	1
AT -> P	27	67	5	2	0	15	78	7	27	52	74	5	74	158	1.69	1	1	1
GA -> P	50	50	0	0	1	28	68	4	49	22	68	4	68	143	2.11	1	1	1
AT <-> GA	70	30	0	0	28	17	30	25	42	13	30	25	42	109	1.29	1	1	1
GA <-> GA	96	4	0	0	13	23	45	19	83	19	45	19	83	166	1.96	1	1	1
SR - GRAF	21	4	67	8	35	6	41	18	14	2	26	10	26	52	-0.20	0	0	0
SR - SIMB	12	4	65	19	9	26	35	29	3	23	30	10	30	66	-0.08	1	1	0
SR - TABL	100	0	0	0	91	0	0	9	9	0	0	9	9	18	0.49	0	0	0
SR - TRAD	31	8	61	0	44	21	35	0	13	13	25	0	25	51	-0.42	0	0	0
TC - CONC	40	31	21	8	17	34	23	26	23	4	2	18	23	46	0.60	0	0	0
TC - PROC	4	6	23	67	3	23	23	51	1	17	0	16	17	34	-0.37	0	0	0
MED - VBL	0	6	83	11	0	0	91	9	0	6	8	3	8	17	0.08	0	0	0
MED - TBL	11	0	83	6	9	3	89	0	3	3	6	6	6	17	-0.05	0	0	0
MED - PPL	100	0	0	0	91	6	3	0	9	6	3	0	9	17	0.45	0	0	0
REC - LBR	25	6	6	64	71	0	3	26	47	6	3	38	47	94	-0.96	1	1	1
REC - CAL	100	0	0	0	77	6	17	0	23	6	17	0	23	46	0.82	0	0	1
REC - RET	100	0	0	0	97	3	0	0	3	3	0	0	3	6	0.27	0	0	0
APO - PROF	6	8	25	62	3	31	46	20	3	24	21	42	42	90	-0.72	1	1	1
APO - AT	27	33	27	14	7	7	50	36	19	26	23	21	26	90	0.89	0	1	1
APO - GA	74	25	2	0	40	31	26	3	34	7	24	3	34	67	0.93	1	1	1

Figura Nº 7. Diferencias de las variables

El valor 1 en una casilla perteneciente a una de las tres últimas columnas indica que la variable correspondiente (fila) satisfizo el valor mínimo del criterio respectivo (columna).

Resultados

Introducción

Se presentan aquí los resultados obtenidos a partir de las observaciones y de la sistematización y análisis de los datos que se describió en el apartado de diseño metodológico. No sobra aclarar que estos resultados son el producto de la observación de dos grupos de alumnos particulares dentro de un contexto específico y que no se pretende, de ninguna manera, sugerir que las situaciones aquí expuestas puedan generalizarse a otros grupos dentro de otros contextos.

La presentación que se hace a continuación se divide en tres partes que corresponden al análisis de tres grupos de variables:

- ▲ Variables de segmento
- ▲ Variables de interacción social
- ▲ Variables de discurso matemático

Variables de segmento

La tabla 1 muestra los porcentajes correspondientes a la frecuencia relativa de los valores de las variables de segmento. Aunque ninguna de las variables satisfizo los criterios,

Formato	**IP**	**EP**	**AT**
Control	2	26	72
Experimental	0	26	74
Ritmo	**P**	**AT**	**GA**
Control	98	0	2
Experimental	85	12	3
Tarea	**GA**	**RE**	**DC**
Control	2	80	19
Experimental	0	51	49

Tabla Nº 1. Valores de variables de segmento

presentamos un breve análisis de cada una de ellas.

Formato

Se observa que, aunque hay una disminución del formato *alumno en el tablero* y un aumento del formato *instrucciones de la profesora*, la variable *formato* no presenta diferencias entre el grupo de control y el grupo experimental.

Ritmo

En esta variable se observan cambios relevantes. Se pasó de una situación, en el grupo de control, en la que la profesora determinó la mayoría de las ocasiones la tarea que se debía realizar, a una situación, en el grupo experimental, en la que durante 15% de los segmentos, fueron los estudiantes quienes decidieron qué tarea se realizaba y determinaron la actividad del segmento.

Tarea

En la variable *tarea* también se aprecian diferencias relevantes entre el grupo de control y el grupo experimental. Hay un aumento importante de las tareas en las que se desarrolla conceptualmente un tópico y una consecuente disminución de las tareas en las que se resuelve un ejercicio.

Variables de interacción social

Todas las variables de interacción social presentaron diferencias que satisfacen los criterios. Estas variables se agrupan de acuerdo a las categorías que fueron utilizadas en su definición:

- ▲ Profesora → alumnos

- ▲ Alumnos ➞ profesora
- ▲ Alumno ↔ alumno

Variables Profesora ➞ alumnos
El comportamiento de estas variables se aprecia en la figura 8 en la que se presentan los porcentajes de tiempo, del tiempo total, que asumieron cada uno de los valores de cada variable, tanto en el grupo experimental, como en el grupo de control.

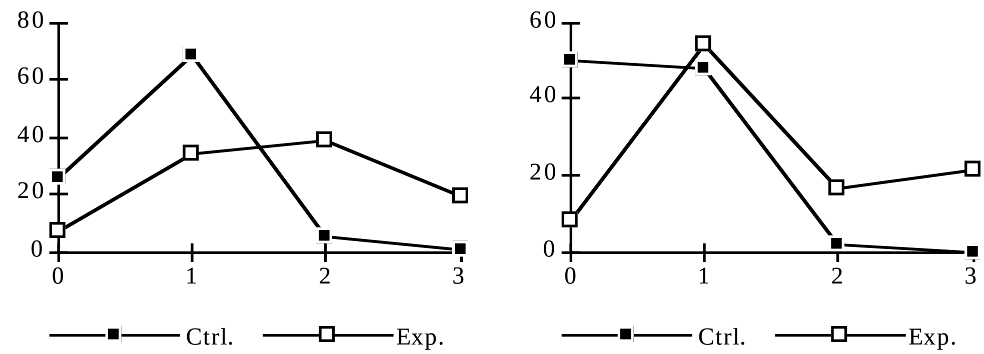

Figura Nº 8. Valores de variables profesora ➞ alumnos

Se observa un cambio sustancial en el rol que la profesora asumió durante la interacción social, tanto con el alumno en el tablero, como con el grupo de alumnos. De acuerdo a la definición que se hizo de estas variables en el marco metodológico, se puede afirmar que el rol de la profesora en el grupo de control era uno en el que ella:

- ▲ Hacía presentaciones literales del contenido
- ▲ Corregía inmediatamente los errores
- ▲ No inducía a los estudiantes a presentar, desarrollar y justificar sus iniciativas
- ▲ Imponía su propia autoridad ante los alumnos

Por otra parte, el rol de la profesora en el grupo experimental es tal que por lo menos tiene lugar una de las siguientes situaciones y posiblemente la conjunción de varias de ellas:

- ▲ Generó situaciones problemáticas con propósitos didácticos
- ▲ Dio oportunidad a que el estudiante corrigiera sus errores y permitió que estos existieran durante un tiempo
- ▲ Indujo a los alumnos a que desarrollaran y justificaran sus iniciativas

Variables alumnos ➞ profesora
La figura 8 muestra el comportamiento de las variables *alumnos ➞ profesora.*

Alumno en el tablero ➞ Profesora　　　Grupo de alumnos ➞ Profesora

Figura Nº 9. Valores de variables alumnos ➞ profesora

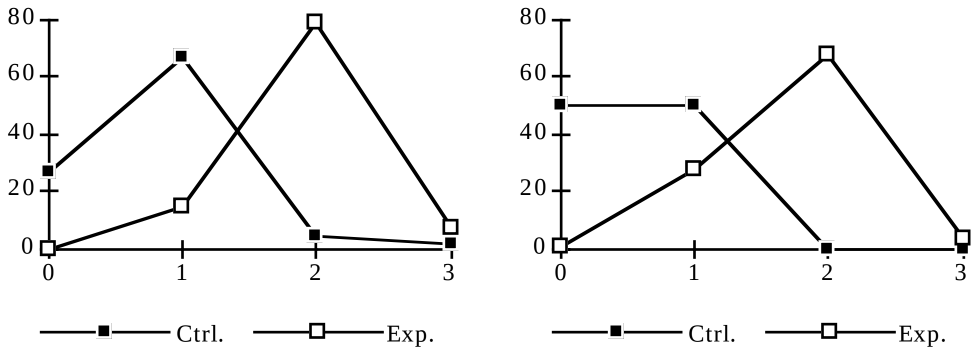

Figura Nº 9. Valores de variables alumnos → profesora

A partir de la definición de esta variable, se puede afirmar que hay una disminución importante de las interacciones en las que los alumnos:

- ▲ Esperan instrucciones o desarrollo literal del tópico
- ▲ Requieren de la autoridad de la profesora
- ▲ No exponen iniciativas propias

Por otra parte, se puede afirmar que se da por lo menos una de las siguientes situaciones y posiblemente alguna conjunción de ellas:

- ▲ Los alumnos presentan iniciativas propias diferentes de las de la profesora, sin tener necesariamente en cuenta la intervención de ésta
- ▲ Los alumnos cuestionan la autoridad de la profesora, basándose en múltiples fuentes de autoridad

Variables alumno ↔ alumno

Estas son las variables que describen la interacción entre el grupo de alumnos y el alumno en el tablero y la interacción al interior del grupo de alumnos. El comportamiento de estas variables se presenta en la figura 8.

Alumno en el tablero ↔ grupo de alumnos   Grupo de alumnos ↔ grupo de alumnos

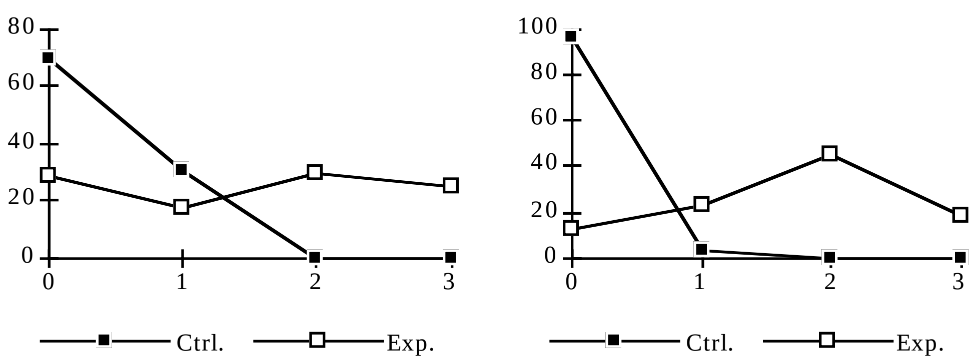

Figura Nº 10. Valores de las variables alumno ↔ alumno

Se observan comportamientos similares para las dos variables en los que se manifiesta un cambio sustancial entre el grupo de control y el grupo experimental. Se pasa de una situación en la que no hay casi ninguna interacción entre los alumnos a otra en la que se da discusión entre los alumnos y estos justifican y explican sus aportes al discurso.

Variables de discurso matemático

Se presentan aquí los resultados correspondientes a las variables que describen el discurso matemático. Las variables que satisficieron los criterios son las siguientes:

- Sistema de representación simbólico
- Utilización de libro de texto y calculadora
- Aportes de los tres actores al discurso

Se analizan a continuación estas variables.

Sistema de representación simbólico

La figura 11 muestra el comportamiento de esta variable. Se observa que, en el grupo de

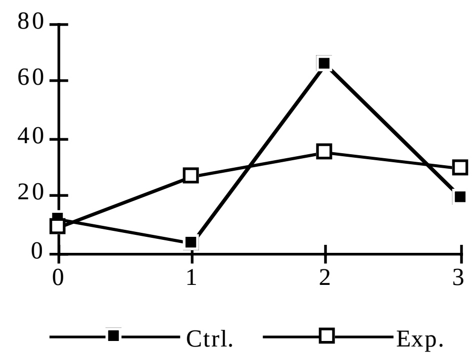

Figura Nº 11. Sistema de representación simbólico

control, el sistema de representación simbólico fue necesario en el discurso, mientras que solamente en reducidas este sistema de representación no fue necesario o fue suficiente. Por otra parte, en el grupo experimental se observa que las ocasiones en las que el sistema de representación simbólico estuvo presente, fue necesario o fue suficiente estuvieron todas en el rango 20% - 30%. Hay que señalar que esta variable no satisface el criterio *tamaño del efecto* al 1%.

Recursos

Libro de texto. La figura 12 presenta el comportamiento de la variable correspondiente a la utilización del libro de texto. Es importante anotar que esta variable denota específicamente la utilización del libro de texto por parte de la profesora. Se observa que, en el grupo de control, el libro de texto fue suficiente como recurso en una gran cantidad de oportunidades, mientras que, en el grupo experimental, este recurso no estuvo presente en más de 70% de los segmentos.

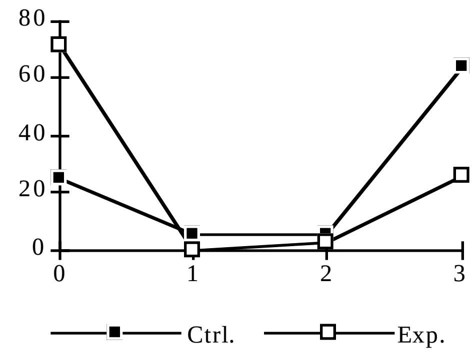

Figura Nº 12. Recursos: libro de texto

Calculadora

La figura 13 muestra el comportamiento de la variable que describe la utilización de la calculadora en el grupo experimental. El grupo de control no tenía acceso a este recurso. Se observa que la calculadora nunca fue suficiente como recurso y que fue necesaria en menos de una quinta parte de los segmentos.

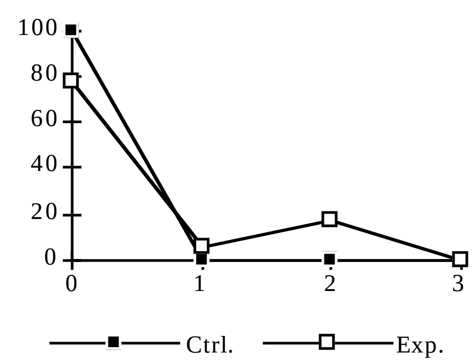

Figura Nº 13. Recursos: calculadora

Es importante anotar que esta variable denota especialmente la utilización de la calculadora que se encontraba conectada al retroproyector[4].

4. Dado que se utilizó una única cámara para hacer las grabaciones, resultó muy difícil determinar la utilización de la calculadora por parte del grupo de alumnos, tanto en su participación en el discurso general que se desarrollaba al realizar una tarea, como en el desarrollo de sus discursos privados y semi - privados.

Aportes

Aporte de la profesora. La figura 14 muestra el comportamiento de la variable que describe el aporte de la profesora al discurso matemático. Se observa, en el grupo experi-

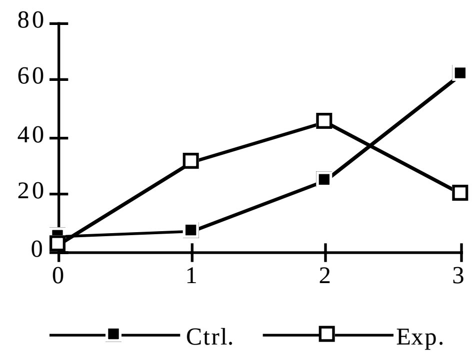

Figura Nº 14. Aportes: profesora

mental, una disminución importante del porcentaje de segmentos en los que el aporte de la profesora fue suficiente, con el consecuente aumento en el porcentaje de segmentos en los que el aporte de la profesora estuvo presente, pero no fue necesario.

Alumno en el tablero. El aporte del alumno en el tablero al discurso matemático está representado en la figura 15. En este caso se observa una aumento importante en el por-

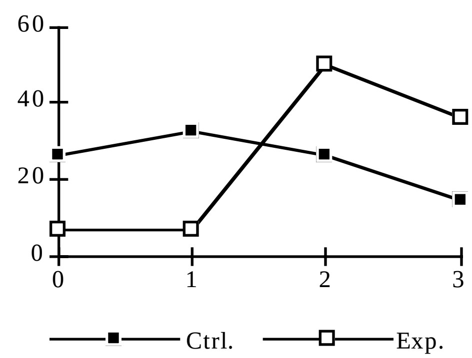

Figura Nº 15. Aportes: alumno en el tablero

centaje de discursos para los cuales el aporte del alumno en el tablero fue necesario o suficiente.

Grupo de alumnos. El comportamiento de esta variable se presenta en la figura 16. Se percibe un aumento importante del porcentaje de segmentos en los que el aporte del grupo de alumnos estuvo presente en el discurso, particularmente para aquellos casos en los que este aporte fue necesario.

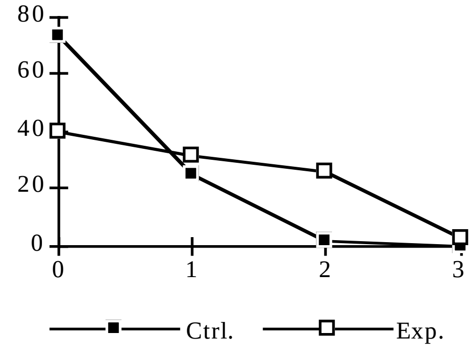

Figura Nº 16. Aportes: grupo de alumnos

Resumen

Interacción social

Se aprecia un cambio relevante entre el grupo de control y el grupo experimental en los roles que tanto profesora, como alumnos asumieron en la interacción. Por una parte, en el grupo experimental, los alumnos participaron activamente en la determinación de las tareas que se realizaron en el salón de clase, situación que fue inexistente en el grupo de control. Por otra parte, la profesora pasó de una situación en la que hacía presentaciones literales del contenido, corregía inmediatamente los errores de los alumnos, no inducía a los estudiantes a presentar, desarrollar y justificar sus iniciativas e imponía su propia autoridad ante los alumnos a otra en la que generó situaciones problemáticas con propósitos didácticos, dio oportunidad a que el estudiante corrigiera sus errores, permitió que estos existieran durante un tiempo e indujo a los alumnos a que desarrollaran y justificaran sus iniciativas. Desde el punto de vista de los estudiantes, se pasó de una situación en la que ellos esperaban las instrucciones o el desarrollo literal del tópico por parte de la profesora, requerían de la autoridad de ella y no exponían iniciativas propias a otra en la que cuestiona ron la autoridad de la profesora y presentaron iniciativas propias. Finalmente, la interacción entre los alumnos también presentó diferencias relevantes. En este caso, se pasó de una situación en la que no hay casi ninguna interacción entre los alumnos a otra en la que se da discusión entre los alumnos y éstos justifican y explican sus discursos.

Discurso matemático

El discurso en el grupo de control y en el grupo experimental fue similar en la mayoría de sus dimensiones. Las únicas diferencias relevantes se aprecian en las variables de aporte de cada uno de los actores. En esta dimensión, se aprecia una participación menos intensa de la profesora en la construcción del discurso y el correspondiente aumento de la participación de los alumnos en este proceso. Esta situación parece ser consistente con el comportamiento de las variables de interacción social.

Finalmente, es importante resaltar que la calculadora gráfica fue muy poco utilizada en los discursos de los tres actores.

Análisis microetnográfico

Introducción

En este apartado se presenta un análisis microetnográfico de la interacción (Voigt, 1985). Para estos efectos, se transcriben dos segmentos contenidos en las grabaciones de video que se realizaron. Un segmento corresponde al grupo de control y el otro al grupo experimental[5]. A partir de esta transcripción, se hace una interpretación de lo sucedido en los segmentos.

Metodología

El análisis que se hace a continuación sigue las pautas metodológicas utilizadas por Voigt (85).

Grupo de control

El segmento

Se acaba de hacer un pequeño repaso sobre gráficas de funciones cuadráticas partiendo de los conceptos de foco y directriz. La profesora está sentada en una mesa al lado del tablero y tiene el libro de texto en la mano[6].

1 P: Ya con este repaso acá; este recordatorio. Entonces vamos a empezar a trabajar con las gráficas de las funciones y vamos a empezar a hacer ya (pasa las páginas del libro mientras habla). Entonces por favor recuerden bien (…) el concepto de foco, directriz. A ese concepto geométrico, porque también lo vamos a ir poniendo con el concepto de rectas perpendiculares, de distancias entre rectas, todo esos conceptos geométricos que vimos hasta ayer, ya los vamos a trabajar con parábolas y vamos a poder hacer más ejemplos de geometría.

2 P: Entonces vamos a trabajar con los ejercicios de la sección 2.2 que tocaba para hoy. Necesito tres voluntarios. Para el 1, para el 2 y para el 4.

3 EE (Los estudiantes no hablan entre ellos. Hay una pausa y un silencio. Algunos estudiantes abren sus libros de texto).

4 E (Después de 15 segundos, una estudiante se levanta, pasa adelante y borra el tablero. Una vez ha borrado el tablero, toma una tiza y mira a la profesora).

5 P: Vamos a ir haciendo… Vamos a hacer tres gráficas a partir de (…) $y = x^2$. (Mientras que la profesora habla, la estudiante mueve la cabeza afirmativamente) Entonces, vamos a hacer rápidamente la gráfica de $y = x^2$.

6 E: (Escribe en el tablero $y = x^2$ y dibuja un plano cartesiano). Entonces $y = x^2$ es la parábola así (Sin pintar con la tiza, pasa la mano sobre el plano cartesiano y mira a la profesora buscando su aprobación).

7 P: Ajam…

8 E: ¿(…) queda el vértice? (Indica el origen en el plano cartesiano y mira a la profesora. Esta hace un movimiento afirmativo con la cabeza) Y el eje de simetría es el mismo, la misma… la misma y (Continua mirando a la profesora. Ella sonríe y aprueba).

9 E: (Se voltea hacia el tablero y dibuja la parábola).

10 P: Bueno. Determinemos el punto 1. Cuando x vale 1 y y vale menos 1, entonces tenemos el punto 1 para poder ahoritica hacer fácilmente las otras variantes (mueve la mano en forma de parábola).

11 E: Cuando x vale 1, y vale 1 (Aunque lo dice con cierta autoridad, mira a la profesora).

12 P: (Hace un signo de aprobación con la cabeza)

5. Se utilizaron dos criterios para la selección de los segmentos: su duración (debían ser cortos, siendo que ésta no es la situación más común) y su representatividad con respecto a los resultados que se presentaron en el apartado anterior.

6. Se utilizan las reglas de transcripción utilizadas por Voigt (85). P: profesor; E: estudiante en el tablero; EE: grupo de estudiantes; *bastardilla*: énfasis; (…): intervención incomprensible; (? afirmación): posible afirmación.

13 E: Uno, (…) Uno (Ubica el punto (1,1) en la gráfica. Se voltea hacia la profesora, esperando la siguiente instrucción).

14 P: Bueno. (Mira el libro de texto) Ahora nos piden que hagamos, basada en esa gráfica, que hagamos la gráfica de y igual a x menos uno, pero todo, el x menos uno está elevado al cuadrado.

15 E: (Mientras escribe en el tablero va diciendo) ¿$y = (x - 1)^2$?

16 P: Ajúm (afirmativamente).

17 E: Entonces…

18 P: (Inmediatamente, sin ninguna pausa) ¿Cómo harías esa gráfica?

19 E: (Mira el tablero. Se pone la mano en la boca en actitud de pensar. Dice algo inaudible en tono de interrogación hacia la profesora, mirándola e interrogándola con la mirada).

20 EE: (Los estudiantes habían estado completamente callados hasta el momento) Primero, ¿no lo corre? (Hay otro estudiante que también interviene. No se comprende).

21 E: Ah. Menos uno, lo corro (Hace un gesto con la mano y mira a la profesora buscando aprobación. Mueve la cabeza enfatizando que espera la aprobación).

22 P: Ajúm (afirmativamente).

23 E: (Dibuja la parábola $y = (x - 1)^2$ en el mismo plano cartesiano de la parábola anterior).

24 P: A ver. ¿Por qué? Tú habías dicho que era la misma. Es decir…

25 E: Esto va a funcionar como cuando hacíamos las gráficas lineales.

26 P: Ajúm… (afirmativamente)

27 E: El menos uno indica que se va a trasladar hacia la derecha y el más uno hacia la izquierda (Hace gestos con las manos. Al finalizar su frase hace un gesto claro con la cabeza esperando la confirmación de la profesora).

28 P: Pero, ¿por qué?

29 E: (2 segundos. Mira el tablero y vuelve a mirar a la profesora).

30 P: Ahí porque ya no (?necesitamos) la memoria…

31 E: Porque…(4 segundos)

32 E: Hay (…) Es decir, si yo tabulo, después de desarrollar el polinomio me da eso (Mirando todo el tiempo a la profesora).

33 P: Y, ¿para tabular, necesitas desarrollar?

34 E: (Hace un gesto con la cabeza indicando que no sabe) ¿Tabulo? (Hace varios gestos repetidos con la cabeza, mirando a la profesora y esperando alguna instrucción de parte de ella. Sigue esperando, hasta que se sonríe y mueve su cuerpo en signo de “desesperación”). Es que no sé qué hacer…

35 P: A ver. Ahoritica ya no importa el orden de los conceptos. Yo hablé de unos… Tú misma me ayudaste a determinar una forma equivalente.

36 E: (Mueve la mano en señal de que ya sabe) Ya. Este número me va a decir en qué vértice va a estar (Indica el 1 de la expresión que había escrito en el tablero).

37 P: ¿En qué vértice?

38 E: Dónde va a estar… uno de los puntos del vértice (2 segundos. Espera reacción de la profesora). Es decir, dónde está el vértice.

39 P: Cuál es el vértice.

40 EE: (Hay algún estudiante que dice algo incomprensible).

41 P: Cuál es el vértice, dónde está el vértice, bueno… (Menea la cabeza).

42 E: (Iba a decir algo).

43 P: (No permite que la estudiante hable). Es decir, esa cuestión que tú tienes ahí. No necesitas desarrollarla para averiguar cuál es el vértice de la parábola. Recuerda que nosotros ya vimos el concepto… Dado que tú misma fuiste la que me ayudaste a reconstruir esa parte de los conceptos que recordamos. Tú misma

me dijiste, cuando yo logro poner la expresión en una forma equivalente y le digo que yo que y es igual a un cuadrado, en esa forma, hay una forma de determinar el vértice (La profesora mueve la cabeza y las manos con autoridad. La estudiante mueve la cabeza afirmativamente, aceptando). Entonces si nosotros utilizamos ese concepto como válido,

44 E: Aquí (indica en la expresión el espacio después del cuadrado). Aquí tendríamos más cero…

45 P: Sí…

46 P: Entonces aquí tendríamos las (?coordenadas) de un punto. El vértice…

47 P: El vértice.

48 E: El vértice.

49 P: Y nosotros aceptamos eso como un concepto ya dado y probado y entendido (Mueve las manos y la cabeza, mirando hacia el grupo de alumnos).

50 E: (Mueve la cabeza afirmativamente, sin decir nada).

51 P: Ahora. Si yo estoy trabajando con la parábola $y = x^2$ y a esos puntos les voy haciendo (hace gestos con las manos) la transformación y vamos a ir mirando qué vamos a hacer, pues una idea sería lo que tú dices, ir haciendo una tabulación. El método más elemental o más sencillo, y es hacer la tabulación. Entonces nos vamos dando cuenta que hay que movernos…

52 E: De la derecha para la izquierda.

53 P: Ajúm (afirmativamente).

54 P: Bueno, ahora qué pasa con la gráfica de $(x -1)^2 +3$.

Interpretación

Aunque en su introducción la profesora habla de “conceptos”, es más o menos evidente que su intención se encuentra centrada en la resolución de ejercicios (“vamos a poder hacer más ejemplos de geometría”, (1)). Ella sigue estrictamente lo que propone el libro de texto e inicia la interacción con el primer ejercicio de la lista que corresponde al tema del día (2). Ella establece el ritmo del segmento al determinar el tipo de tarea que se va a realizar y al indicar que desea tres “voluntarios” para que resuelvan los ejercicios en el tablero (2).

La demora de 15 segundos para que un estudiante se proponga como “voluntario” y pase al tablero a resolver el primer ejercicio es significativa: no existe necesariamente un “ambiente de participación” y los estudiantes prefieren evitar una situación de interacción con la profesora (3).

Una vez que la estudiante pasa al tablero y lo ha borrado, su actitud natural es esperar la instrucción del profesor (4). Las instrucciones que vienen de la profesora son del tipo “*Vamos* a ir haciendo… *Vamos* a hacer tres gráficas a partir de”. La conjugación del verbo es significativa. Ella no está diciendo “*Vas* a hacer”, sino que indica que el proceso se va a realizar conjuntamente entre las dos (5). De esta forma, la profesora está determinando una de las reglas centrales de la interacción: el proceso se hará conjuntamente.

Por otra parte, aunque el problema consiste en realizar las gráficas de unas funciones cuadráticas a partir de una función base, la profesora no le da a la estudiante el problema que hay que realizar. Por el contrario, le indica que lo primero que debe hacer es dibujar la gráfica de $y = x^2$. De esta forma, la profesora no sólo está asumiendo una clara actitud procedimental, sino que también está restringiendo la posibilidad de que la estudiante realice el razonamiento completo a partir de la situación problemática propuesta (5).

En este momento aparece la primera acción del estudiante. Obsérvese cómo la estudiante, en cambio de dibujar la gráfica de la función que se le indica, primero dibuja los ejes del plano cartesiano y después hace un gesto con la mano (*sin* dibujar) sobre este plano, indicando la forma que ella cree que puede tener la gráfica y espera la aprobación del profesor, antes de dibujar en el tablero (6).

La profesora acepta este esquema de interacción. Ella reacciona a la demanda de aprobación por parte de la estudiante y emite un “Ajam” afirmativo (7).

La estudiante quiere dar un par de características acerca de la parábola, antes de dibujarla en el tablero. Es evidente que ella no comprende completamente qué es el vértice de la parábola y no sabe expresarse con respecto al eje de simetría y el eje y. Sin embargo, ella busca la aprobación de la profesora. La profesora aprueba de nuevo (8) y solamente en este momento la estudiante dibuja la parábola (9).

La siguiente intervención de la profesora es importante. Su forma de expresarse es incorrecta (“determinemos el punto 1”) y, además, comete un error “cuando x vale 1 y y vale menos 1”. Sin embargo, la anotación importante aquí es que la profesora sabe a dónde quiere ir en el futuro y está ya dándole al estudiante indicaciones acerca de lo que puede hacer para resolver el ejercicio (10).

La estudiante corrige el error de la profesora, pero no puede entender el propósito de esta acción. Simplemente sigue la instrucción de la profesora (buscando su aprobación que ésta da, 11, 12).

La profesora regresa al libro de texto. Utiliza la frase “nos piden que hagamos”. Esta frase se puede interpretar, por un lado, como una aceptación tácita acerca de la “autoridad” del libro de texto y, por el otro, como una reafirmación del aspecto esencialmente procedimental de la tarea (14). La profesora le da la instrucción a la estudiante.

Aunque la instrucción era aparentemente clara, la estudiante escribe la expresión simbólica y vuelve a pedir la aprobación de la profesora, aprobación que obtiene por medio de un “Ajúm” afirmativo (15, 16).

La siguiente interacción es particular. Por primera vez la estudiante toma la iniciativa y desea comenzar un razonamiento “Entonces…” (17). No obstante, la estudiante es interrumpida por la profesora: “¿Cómo harías esa gráfica?” (18).

En este punto se da un período de interacción en el que la estudiante no sabe qué hacer (19), el grupo de estudiantes interviene por primera vez, ellos dan una indicación procedimental “correr la gráfica” (20), la estudiante sigue esta indicación sin estar segura de que está correcta y busca la aprobación de la profesora (21). Esta da su aprobación y la estudiante dibuja la gráfica (22, 23).

En este momento, la profesora se interesa en el “por qué” (24). La estudiante hace una conexión con otro tema (las funciones lineales) y cree haber respondido la pregunta (25 - 27). Sin embargo, la profesora insiste (28). La estudiante duda, piensa un momento y tiene una idea: pasar a otro sistema de representación y tabular. No obstante, la profesora no acepta esta idea (que habría podido resolver el problema). Aparentemente, la profesora tiene su propia idea de cuál es la respuesta que ella espera y, de hecho, el problema de la estudiante consiste en descubrir esa respuesta específica. La profesora le indica a la estudiante que en el pasado ellas dos tuvieron una interacción que se puede relacionar con este problema(29 - 35).

La estudiante recuerda aquella interacción y da una respuesta parcial. Se da una discusión acerca de la forma de indicar dónde está el vértice en el plano cartesiano, que la profesora no resuelve (36 - 41). La estudiante quiso tomar la iniciativa de nuevo (42), pero fue interrumpida por la profesora quien da una “explicación”: “hay una forma de determinar el vértice” (43).

La estudiante reacciona a esta indicación, descubre que “hay un cero” (44), la profesora aprueba (45) y, con la intervención (interrupción) de la profesora, determina la ubicación del vértice de la parábola a partir de la expresión simbólica de la función cuadrática (46 - 48).

En este momento, la profesora dice “Y nosotros aceptamos eso como un concepto ya dado y probado y entendido” (49). Es evidente que éste era el “por qué” que ella estaba buscando y que lo que ella esperaba de la estudiante era que ésta fuese capaz de recordar esta regla y de aplicarla en la situación que se estaba considerando. Sin embargo, la pregunta del “por qué” obtuvo, por parte de la profesora, una respuesta débil que le confirma a los estudiantes la necesidad de registrar unas reglas y procedimientos para resolver los ejercicios. La estudiante acepta la explicación (50).

La profesora da una explicación (51) y la estudiante confirma que reconoce el procedimiento (52). Esta reacción es, a su vez, confirmada por la profesora (53).

Se pasa a una nueva tarea (54).

Grupo experimental

El segmento

Al comenzar la hora de clase, la profesora hace un resumen de la clase anterior. Enseguida pasa a un alumno al tablero a resolver un ejercicio en el que se busca relacionar la factorización de un polinomio cuadrático con la fórmula cuadrática. Este ejercicio genera una discusión acerca de los diferentes procedimientos para hallar raíces cuadradas y se da una interacción intensa entre el profesor y el grupo de estudiantes. La profesora pasa al tablero a otro estudiante a hallar la raíz cuadrada de 387. El grupo de alumnos interviene constantemente. Una vez que se ha discutido acerca de varios métodos para hallar la raíz cuadrada sin calculadora, un estudiante, sin ser invitado, pasa al tablero deseando continuar la discusión sobre la factorización, las raíces de una función cuadrática y su relación con el discriminante de la fórmula cuadrática. En el tablero se encuentra todavía una gráfica con un plano cartesiano y tres parábolas: dos con dilatación positiva, donde una de ellas no corta el eje x y otra con dilatación negativa que corta dos veces el eje x.

1 E (Dentro del grupo de alumnos): (? Profesora, tenemos que regresar al problema de la parábola)

2 EE: Risas.

3 P: Ah…, pero es que como tengo que encontrar los valores acá y me dijeron que esto era más rápido que eso.

4 EE: Intervención incomprensible de varios estudiantes.

5 E (Se pone de pie y pasa al tablero) es que vea profesora, si nosotros llegamos…

6 EE: (Hay varios estudiantes discutiendo. Cuando el estudiante comienza a hablar, algunos de los estudiantes invitan a sus compañeros a hacer silencio).

7 E: Esta gráfica. Tenemos tres casos.

8 P: Usted va a hacer un resumen.

9 E: Sí.

10 P: Menos cháchara. Ya dejemos eso.

11 E: No, porque todo es importante.

12 P: Ay…

13 EE: Ah… (risas)

14 E: (Borra el tablero) Entonces tenemos que hay tres casos de la fórmula $ax^2 + bx + c = 0$.

15 P: Una ecuación cuadrática.

16 E: Sí (continua escribiendo sin mirar a la profesora).

17 E: Entonces en el primer caso… Vamos a mirarlo gráficamente.

18 E: (Dibuja un plano cartesiano en el tablero).

19 P: ¿Qué vas a hacer?

20 E: (Moviendo las manos y la cabeza con autoridad) El ejercicio que aparece en el libro, para ir acorde con el libro para que nosotros entendamos bien (Y comienza a escribir la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$).

21 P: (2 segundos) Eso se llama un jalón de orejas que me acaba de dar el costeño, ¿no es cierto? (E continua escribiendo en el tablero).

22 EE: Hay algunas risas y comentarios incomprensibles.

23 E: (Se sonríe pero no hace caso al comentario) Entonces nosotros tenemos esta gráfica (muestra la ecuación con la mano). Vamos a graficarla. Lo podemos hacer… Tenemos $(x + 1)^2 = 0$ (y lo escribe en el tablero).

24 E: (Mira a la profesora. Sin embargo, no busca su aprobación. Parece más bien como si buscara verificar que la profesora y sus compañeros comprenden lo que está haciendo).

25 E: Bueno entonces al (? realizar) este término queda $x + 1 = 0$, $x = -1$ (Lo escribe en el tablero).

26 P: Ajá…

27 EE: Reacción del grupo. Oh… Varios hablan (No se entiende).

28 E: Vamos a graficar esto (Dibuja la parábola en el plano cartesiano).

29 E: En este caso, la parábola tiene *una* solución. Entonces, el primer caso es cuando la parábola tiene *una* sola solución (Indica con énfasis el número 1 con la mano, mirando fijamente a la profesora).

30 P: Que ya habíamos dicho que la (? primera) cuando ¿qué?

31 EE: (Varios estudiantes reaccionan y hablan. El estudiante también habla. Se entiende que un estudiante del grupo dice:).

32 EE: Yo tengo otro método para poder hacer la misma cosa.

33 E: (Le responde al estudiante que acaba de hablar. Levanta la voz. Se entiende “cuadrado perfecto”. Varios estudiantes hablan al mismo tiempo).

34 E: (Le habla tanto a la profesora, como al estudiante que intervino) Esto es un binomio cuadrado perfecto… Raíz de esto y raíz de esto… Entonces esto es igual a cero. y es igual a cero. O sea…(Mueve las manos, buscando que le entiendan lo que quiere decir).

35 P: Acabas de encontrar el punto de corte con el eje x.

36 EE: Hay varios estudiantes hablando entre ellos (No se entiende).

37 E: Exacto.

38 P: Entonces (? …) llevar el cero. Pero ahí lo hicimos… Bueno… Simple y llanamente despejando la factorización. Pero acabábamos de decir… Acabábamos de decir que si yo tengo la ecuación $x^2 + 2x + 1$.

39 E: (Mientras escucha a la profesora comienza a escribir en el tablero $x^2 -2x - 6$. Escribe más arriba la ecuación que le dicta la profesora).

40 P: Acabábamos de decir que había otras formas de hacerlo y era analizando el discriminante. ¿Cierto?

41 E: Sí, pero eso sería después (Regresa a la ecuación que había escrito antes de la interrupción de la profesora).

42 E: O sea, encontremos esta… Me parece que también es la que aparece en el libro. ¿Cierto? (Mira a los compañeros, los señala con el dedo y busca que le confirmen que esa es la ecuación que aparece en el texto).

43 E: Entonces aquí. (Intenta completar cuadrados, pero se siente inseguro).

44 P: ¿Qué es lo que vas a hacer? Cuéntanos qué es lo que vas a hacer. Coges otra ecuación cuadrática.

45 E: Necesitamos completar cuadrados (Mueve una mano enfatizando su afirmación. Más tarde se verá que el motivo de su incertidumbre es porque quiere partir de una ecuación que le produzca un resultado particular: que la ecuación no tenga raíces reales).

46 P: Ah. Vas completar cuadrados.

47 E: O sea, resolvemos esta ecuación.

48 EE: Varios estudiantes en el grupo están hablando (No se comprende).

49 P: Ahí no hay ecuación. Ahí hay polinomio, primero que todo.

50 E: (No le hace caso a la profesora y continua buscando un *c* en el polinomio. Se nota que los comentarios de la profesora lo "desconcentran" para lo que quiere hacer).
51 EE: (Alguien del grupo le dice a E:) Menos seis…
52 P: Ahí no hay ecuación. Yo lo que veo es un polinomio.
53 E: (Iguala el polinomio a cero).
54 EE: (Dos estudiantes) Menos seis.
55 E: (Sonríe y le hace una seña con la mano a sus compañeros, dando las gracias por la indicación).
56 E: Nosotros… (Mira lo que ha escrito –continua tratando de hacer una completación de cuadrados– pero se da cuenta que no le sirve lo que tiene. Mueve la cabeza con signo negativo y abre los brazos en signo de interrogación hacia lo que tiene escrito).
57 P: Ah. Le sumó uno y le restó uno. ¿Qué pasa?
58 E: (No hace caso al comentario de la profesora. Termina de escribir $x^2 - 2x +1 - 1 -6 = 0$).
59 E: Esto lo vamos a llevar a la forma (escribe más arriba) $a(x - h)^2 + k$.
60 P: La forma general.
61 EE: Varios estudiantes están hablando (No se comprende).
62 E: Sí (Mueve la cabeza afirmativamente).
63 E: Entonces nos queda (escribe) x -
64 EE: Menos uno.
65 E: (Habla y escribe) $(x - 1)^2 - 4$. ¡Más cuatro! Comencé mal (Mira a sus compañeros). Borra y escribe + 4.
66 P: A ver. ¿Por qué más cuatro?
67 EE: (Varios) ¿Más cuatro?
68 P: $x^2 - 2x +1$ es $(x - 1)^2$. ¿Cuánto es -1 -6? ¿Cuánto es -1 -6?
69 EE: (Varios hablan. Se alcanza a entender:) Menos siete.
70 P: (Mira lo que tiene escrito sin hacer caso a lo que está sucediendo en la discusión. Borra algo en el tablero. Mira a sus compañeros dice algo inaudible y hace una seña con la mano, indicando que no lo interrumpan. Frunce el ceño amigablemente).
71 P: Que cuánto es -1 -6, -7. (...)
72 EE: (Varios hablan a la vez. No se comprende).
73 P: Completó cuadrados. La transformó…
74 EE: Y se enredó…
75 EE: Por eso sí.
76 P: Igual a cero, ¿cierto?
77 E: (No ha hecho caso a los comentarios. En este momento, hace un gesto con la mano y cambia la ecuación original escribiendo + 6. Arregla las demás ecuaciones que tenía escritas de acuerdo a este cambio y se voltea hacia la profesora, moviendo las manos).
78 E: (Moviendo con énfasis las manos) Es que… Es que esto necesito que esto sea un más para poderle explicar lo que le quiero decir. Entonces vamos a cambiar el ejercicio.
79 P: Seis menos uno, cinco.
80 EE: (Alguien habla fuerte al mismo tiempo que la profesora) Qué, qué. ¿Cómo va a utilizar el menos uno?
81 E: (Escribe $(x - 1)^2 + 5 = 0$). Entonces, lo resolvemos. Pasamos el cinco para acá. ¿Cierto? (Hace movimientos con las manos sobre lo que tiene escrito y mira a la profesora, viendo a ver si ella entiende).

82 E: Entonces nos quedaría (escribe y dice) $(x - 1)^2 = -5$. En este caso, vemos que en los reales, no hay un número que elevado al cuadrado, dé un número negativo (Mueve la mano sobre lo que tiene escrito).
83 P: Negativo.
84 E: En el libro aparece como el tercer caso.Que es… El tercer caso de, de ecuaciones (Mueve las manos).
85 EE: El hombre estudió.
86 EE: Risas.
87 E: En este caso tenemos (Pasa al plano cartesiano y, mientras habla, dibuja una parábola con dilatación positiva que no corta el eje x. No corresponde a la ecuación cuadrática con la que estaba trabajando). Podemos decir.(…) Nosotros tenemos tres parábolas (pinta una tercera parábola que corta el eje x en dos puntos). Una que corta en dos puntos al eje x, una que corta en uno y una que no corta el eje x.
88 P: Cierto…
89 E: Pero que nos da los tres casos, a su vez, que hay tres soluciones posibles para las parábolas. Una parábola tiene tres soluciones. Que tenga dos soluciones, o sea, dos puntos de corte en el eje x. Un punto de corte en el eje x. Y que no tenga ninguno. Cuando no tiene ninguno, entonces podemos decir que no tiene solución en los reales. Que es este caso (muestra la ecuación con la que estuvo trabajando). Entonces de ahí es donde aparece (…). ¿Hago la demostración?
90 EE: No (reaccionan muchos, jocosamente).
91 E: (Se sonríe ante la reacción de sus compañeros).
92 E: Entonces ahí es donde viene a jugar la fórmula cuadrática.

El estudiante cambia ahora de tarea (termina el segmento) y comienza a explicar la relación de lo que ha hecho con el discriminante de la fórmula cuadrática.

Interpretación

El comienzo de la interacción en este segmento es significativa. La clase había comenzado discutiendo acerca de la relación entre la factorización de la función cuadrática y las características de la gráfica. Sin embargo, la discusión se desvió (y la profesora lo permitió y participó) a una discusión sobre diferentes formas de hallar la raíz cuadrada de un número. No obstante, el segmento comienza con la intervención de un estudiante quien sugiere que se debe regresar al problema inicial y, *sin ser invitado y de manera natural*, se pone de pie y pasa al tablero (1-5). Es por tanto el estudiante quien determina el ritmo del segmento. Cuando el estudiante pasa al tablero, hay todavía mucha discusión entre los estudiantes. El estudiante comienza a hablar y algunos estudiantes invitan a sus compañeros a hacer silencio (6). Esta situación nos muestra un acuerdo *entre* los estudiantes (sin la intervención del profesor) sobre normas de comportamiento en el salón de clase.

El estudiante comienza a hablar, sin decir qué es lo que quiere hacer: “tenemos tres casos” y la profesora lo interrumpe en dos ocasiones. El estudiante le “sigue el juego” a la profesora, pero continua concentrado en el punto que él quiere mostrar. De cierta forma, la profesora quiere imponer un esquema de interacción, pero el estudiante, de manera diplomática, determina otro y, como se verá, el resultado de esta “negociación” favorece al estudiante. El grupo de estudiantes participa de esta negociación al reírse de la reacción del estudiante “todo es importante” (7 -13).

El estudiante define el problema a resolver para efectos de hacer lo que quiere mostrar. La profesora sigue sin saber qué es lo que el estudiante quiere hacer y lo interrumpe, de nuevo, en dos ocasiones. La reacción del estudiante es significativa “el ejercicio que aparece en el libro, para ir acorde con el libro para que nosotros entendamos bien” (20).

Con esta intervención el estudiante hace explícita otra norma de la cultura: el propósito es que *todos* entendamos y, aunque es evidente que su comentario lo hace sin intención de criticar a la profesora, ella lo toma parcialmente de esta forma (21). Los estudiantes del grupo vuelven a reírse, reacción que se puede interpretar como de apoyo a la actitud del estudiante y confirmación de esta norma (22). Por su parte, el estudiante sigue concentrado en su actividad y hace caso omiso a estos comentarios. Aquí es posible identificar otra característica de la interacción: lo importante es el contenido matemático. Es éste, junto con el propósito de que todos entiendan, lo que define la actividad. La profesora no está decidiendo qué es lo que se hace, ni por qué se hace.

En la línea 24 aparece una interacción significativa. El estudiante mira a la profesora, pero él no busca la aprobación de ésta. Por el contrario, lo que busca es comprobar que ella está entendiendo lo que él está haciendo. Por su parte, el "Ajá…" de la profesora, no es una reacción de confirmación de lo que ha hecho el estudiante; es, más bien, una expresión de sorpresa o de admiración. El grupo vuelve a reaccionar y se da una pequeña interacción interna entre ellos (25 - 27).

En las siguientes líneas se da una interacción intensa entre la profesora, el estudiante y el grupo de estudiantes, con motivo de que el estudiante ha llegado a un primer resultado. Es importante anotar como otro estudiante interviene y quiere mostrar que él tiene otro método para llegar a lo mismo y el hecho de que se da una interacción entre el estudiante en el tablero y este segundo estudiante con motivo del problema que se está abordando. Esta es otra norma que regula tanto la forma como interactuan los tres actores, como las razones que pueden generar esta interacción (28 - 34). Por otra parte, es importante resaltar la autoridad con la que el estudiante enfatiza el hecho de que hay *una* sola solución. Esto es lo que él quiere mostrar aquí (29). Finalmente, aunque no es posible entender qué es lo que se dice, se da una interacción entre los estudiantes del grupo, con motivo del resultado propuesto (31 y 36).

La profesora quiere inducir al estudiante a que él haga una conexión entre lo que acaba de obtener y el discriminante de la fórmula cuadrática (38 y 40). Sin embargo, el estudiante ya ha decidido cuál es el siguiente paso y hace caso omiso de los comentarios de la profesora. De hecho, él ya tiene decidido en qué momento se debe hablar del discriminante "Sí, pero eso sería después" (39 y 41).

El estudiante comienza a buscar una ecuación cuadrática que no tenga raíces reales. Quiere recordar el ejercicio del libro, pero no está seguro. Trata de hacer en su cabeza las operaciones de completación de cuadrados, antes de escribirlas, para comprobar que sí puede obtener lo que desea. La profesora no sabe qué es lo que él quiere hacer. Los estudiantes del grupo discuten entre ellos y hay alguien que quiere ayudarlo al decirle que es "menos seis…" (42 - 51).

La profesora insiste en que lo que él tiene no es una ecuación y el estudiante arregla el problema sin darle mucha importancia (52 y 53). De nuevo, el grupo de estudiantes interviene, para ayudar al estudiante con el término que él está buscando. El grupo de estudiantes y el estudiante están concentrados en la tarea que este último quiere realizar y hacen, por lo menos parcialmente, caso omiso de los comentarios de la profesora. Se da una reacción de agradecimiento por parte del estudiante hacia sus compañeros. Es evidente que el estudiante en el tablero y sus compañeros están construyendo conjuntamente el problema, con un propósito específico, sin la participación de la profesora. (54 - 56).

Durante unos segundos, la profesora interviene, aunque el estudiante no le pone atención y hay discusión entre el grupo de estudiantes. En un momento dado, el estudiante se da cuenta de su error y lo corrige "¡Más cuatro! Comencé mal". Además mira a sus compañeros en una interacción no verbal que ratifica la comunicación que existe entre ellos y que es independiente de la relación con la profesora (57 - 65).

Hay sorpresa por parte de la profesora y los estudiantes "¿Por qué más cuatro?". Tanto profesora, como estudiantes hablan entre ellos, mientras que el estudiante continua reflexionando sobre su problema, haciendo caso omiso de estos comentarios (66 - 76).

El estudiante ha encontrado su error y lo corrige (77). En este momento se siente seguro y se lanza a explicar a la profesora y a sus compañeros. Con autoridad dice "Es que… Es que esto necesito que esto sea un más para poderle explicar lo que le quiero decir. Entonces vamos a cambiar el ejercicio" (78). El está construyendo la tarea con un propósito específico. De nuevo, tanto profesora, como estudiantes intervienen (79 - 80).

El estudiante resuelve el problema y lo explica, haciendo referencia a lo que hay en el libro de texto, actitud que genera reacción por parte de sus compañeros (82 - 86). Finalmente, presenta los tres casos posibles (con la aprobación de la profesora) y hace la conexión con la fórmula cuadrática. Los compañeros reaccionan jocosamente a su propuesta de hacer una demostración (87 - 92).

Análisis

Introducción

Siguiendo el esquema propuesto en el marco conceptual (figura 17), este análisis pretende identificar algunas de las normas y acuerdos implícitos que se pueden intuir a partir de los segmentos que se han transcrito y que se acaban de interpretar. Estas nor-

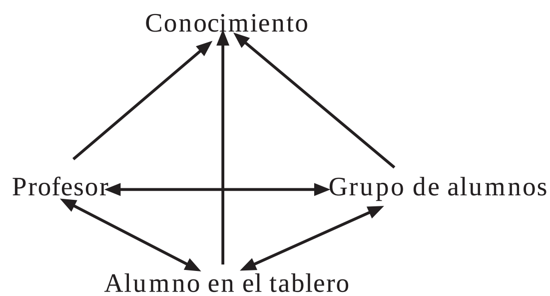

Figura Nº 17. Interacciones

mas han sido descritas de diversas maneras. Cobb las describe como "supuestos normativos o compartidos, suposiciones e interpretaciones que hacen posible la comunicación" (Cobb, 93, p. 575). Por su parte, Nickson (92) habla de aquellos significados invisibles y compartidos que gobiernan la interacción. Finalmente, Voigt (85, p. 85) afirma que "las obligaciones son responsables del carácter normativo de los patrones de interacción y, por consiguiente, de su estabilidad". No se pretende aquí, como lo hace Voigt en su trabajo, identificar y caracterizar patrones de interacción particulares. Aunque, el análisis detallado de las varias horas de grabación de video de ambos grupos permitiría, en principio, caracterizar algunos de estos patrones y se considera, a partir de un análisis superficial que no se presenta aquí, que los dos segmentos transcritos se pueden considerar como representativos de la interacción que se dio en los dos grupos, nos interesa, más bien, hacer una reflexión acerca de la relación entre las normas de comportamiento que se perciben en los dos segmentos y su relación con una cultura del salón de clase y la manera como la visión que los participantes tienen acerca de las matemáticas, de su aprendizaje y de su enseñanza se pueden expresar en la conformación y consolidación de esta cultura y, por consiguiente, en los posibles patrones en los que se organiza la interacción.

El grupo de control

La profesora. El segmento que se ha transcrito de este grupo muestra una profesora que impone el ritmo y que decide qué es lo que se hace en clase. Ella tiene una idea preestablecida de lo que debe suceder dentro del segmento y busca que el estudiante en el tablero realice los pasos necesarios para satisfacer esta idea. Su intención es que el estudiante le "va a ayudar" a resolver el ejercicio y, de hecho, el segmento muestra una situación que no sería muy diferente a aquella en la que la profesora hubiese resuelto ella misma el problema. La profesora es consciente de su autoridad e impone un esquema dentro del cual toda acción debe ser confirmada por ella. El proceso es entonces uno en el que la profesora indica cada uno de los pasos a realizar e interrumpe al estudiante repetidamente, particularmente cuando éste puede tomar caminos diferentes a los que ella tiene previstos. La profesora no interactúa con el grupo de estudiantes. Su centro de interés es el estudiante en el tablero.

El estudiante en el tablero. La estudiante en el tablero también aporta y acepta una situación en la que ella debe seguir las instrucciones de la profesora y buscar la confirmación de ésta para cada una de sus acciones. La estudiante sabe que lo que debe realizar en el tablero es lo que la profesora está esperando de ella.

El grupo de estudiantes. Resulta evidente que no existe un "ambiente de participación" en el grupo. Los estudiantes participan muy poco de la interacción y asumen, más bien, una actitud de "receptores" de la información que se está dando en el tablero. Ellos tienen una actitud pasiva en la interacción.

Discursos. Tanto la profesora, como los estudiantes tienen una actitud procedimental hacia la resolución del problema. Ellos están buscando la "receta" por medio de la cual se puede obtener la respuesta. Aunque la profesora intenta inducir a la estudiante a que dé razones para el procedimiento que ella misma ha propuesto, resulta evidente, al final del segmento, que la razón que la profesora estaba buscando era también un procedimiento que explica con muy poca profundidad la situación en cuestión. Aunque la tarea que se realiza requiere necesariamente de la interacción entre el sistema de representación simbólica y el sistema de representación gráfica, los sistemas de representación juegan un papel aparentemente secundario. Esto se evidencia en la renuencia de la profesora a considerar un nuevo sistema de representación propuesto por la estudiante.

El libro de texto juega un papel importante en la interacción. Es este el que determina las tareas a realizar y la profesora lo sigue de manera estricta, independientemente de la situación en la que los estudiantes se pueden encontrar en relación con su comprensión del tema.

Conclusión. Es posible afirmar que este segmento presenta una situación en la que tanto profesora, como alumnos se aproximan al proceso de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva cercana a un contexto social en el salón de clase en el que predominan la transmisión y la imposición por parte del profesor y la aceptación por parte del estudiante. Como lo insinúa Nickson (92) esto es producto de una visión particular tanto de parte de la profesora, como de los estudiantes, con respecto a la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

El grupo experimental

La profesora. El segmento muestra una situación en la que la profesora es abierta a las iniciativas de los estudiantes. Ella permite, con renuencia, que sean los estudiantes quienes definan qué tarea se va a realizar y de qué manera se va a realizar. Aunque en repetidas ocasiones la profesora intenta definir un camino particular para la interacción, acepta la reacción negativa por parte de los estudiantes y les permite continuar de la manera que ellos desean. La profesora permite que exista un cierto "desorden" en el salón de clase, en el sentido de la participación simultánea de varios estudiantes. Ella reconoce que el estudiante en el tablero considera que se deben hacer actividades consideradas más importantes que las que se venían realizando y lo hace explícito en la interacción. La profesora no interactúa únicamente con el estudiante en el tablero. Ella también busca la interacción con el grupo de estudiantes independientemente de lo que esté sucediendo en el tablero.

El estudiante en el tablero. Es el estudiante quien determina el ritmo del segmento, al decidir que hay tareas más importantes que la que se venía realizando, al pasar al tablero sin haber sido invitado y al insistir, a pesar de las interrupciones de la profesora, en la tarea que él quiere realizar y en la manera como la quiere realizar. Esta actitud es sustentada por sus compañeros. Por otra parte, el estudiante negocia la interacción con la profesora, imponiendo su posición al final. El estudiante no está buscando la aprobación de la profesora. Por el contrario, sus actitudes de interrogación hacia ella tienen que ver más con la confirmación de que la profesora comprende qué es lo que él está haciendo. El estudiante es consciente de su "autoridad" frente al conocimiento y a la profesora. Aun en los momentos en que se siente inseguro, él no flaquea en este sentido y persiste en realizar la tarea de la manera como el considera que se debe hacer. El estudiante mantienen una interacción continua con sus compañeros. Como él mismo lo dice explícitamente, su preocupación central es que "todos entendamos bien".

El grupo de estudiantes. Hay una participación intensa por parte del grupo de estudiantes. Ellos interactuan tanto con la profesora, como con el estudiante en el tablero y entre ellos mismos. La comunicación que se da entre el grupo de estudiantes y el estudiante en el tablero es independiente de la intervención de la profesora y, en algunas ocasiones, es contraria a las sugerencias de ésta. Existe claramente un "ambiente de participación" en el que son los mismos estudiantes quienes regulan el "orden" dentro del salón de clase. El grupo de estudiantes participa en la negociación que el estudiante tiene con la profesora acerca de la manera como se debe dar la interacción y apoyan la posición de su compañero.

Discursos. Aunque la insistencia de la profesora en conectar rápidamente lo que se está haciendo con el problema del discriminante se puede interpretar como una intención de llegar a un procedimiento, esta posición no es aceptada por los estudiantes. El estudiante en el tablero ve que hay tres registros dentro de los cuales puede trabajar el problema y quiere resolver completamente la tarea en uno de esos registros (relación entre el sistema simbólico de la ecuación cuadrática y las gráficas de las funciones cuadráticas correspondientes), antes de hacer la conexión entre dos situaciones simbólicas (la ecuación cuadrática, su correspondiente discriminante y el número de raíces). La actitud de los estudiantes al buscar conjuntamente la comprensión es significativa y resalta como la característica más importante del segmento.

Conclusión. Es posible afirmar que, aunque la profesora tiene sus propias ideas acerca de cómo deberían suceder las cosas e intenta imponer su posición, también permite que la interacción se desarrolle de acuerdo a lo que los estudiantes han decidido que se debe hacer. Son los estudiantes quienes asumen el liderazgo del segmento dentro de un esquema de construcción conjunta del conocimiento. Esto permite percibir una situación que representa aparentemente una visión de crecimiento y cambio de las matemáticas que implica una posición de participación y negociación por parte de la profesora y una posición de cuestionamiento por parte de los estudiantes.

Comparación

Como se describió anteriormente, el grupo de control y el grupo experimental son grupos de estudiantes de la misma asignatura, en diferentes semestres. Ambos grupos tuvieron la misma profesora. El grupo control siguió el diseño curricular oficial. El grupo experimental siguió el mismo diseño curricular, pero con la presencia de las calculadoras.

A partir de los segmentos que se han transcrito, se puede afirmar que existen diferencias en la cultura del salón de clase entre los dos grupos. Estas diferencias pueden ser producto de diferencias en las actitudes, las creencias y los valores de los estudiantes.

La posición de la profesora con respecto al conocimiento matemático parece mantenerse estable. Sin embargo, se aprecian diferencias evidentes con respecto a su visión del proceso de enseñanza y aprendizaje. Aunque en el grupo experimental ella parece desear mantener el control y la autoridad en la interacción, también está dispuesta a permitir que sean los estudiantes quienes determinen la tarea a realizar, los caminos que hay recorrer para ello y la forma en que se desarrolla la interacción.

Las diferencias son más patentes en los estudiantes. En el grupo experimental, los estudiantes parecen tener una visión y una actitud diferente hacia el conocimiento matemático. Tanto el estudiante en el tablero, como el grupo de estudiantes, expresan como propósito central entender y parecen buscar este propósito desde una perspectiva de construcción conjunta del conocimiento en la que la autoridad de la profesora tiene poca relevancia. Por otra parte, los estudiantes parecen haber asumido una mayor responsabilidad en el proceso y su relación con el conocimiento matemático es aparentemente más compleja: se buscan razones que involucran la conexión entre diferentes dimensiones (representaciones) de las ideas matemáticas. El análisis insinúa que los estudiantes tienen una actitud más investigativa y de experimentación.

Conclusiones

Calculadoras gráficas y currículo

“Technology without curriculum is worth the silicon is written on” (Kaput, 1994)

¿Cuál es la relación entre el currículo y las calculadoras gráficas? Esta es una pregunta muy amplia que aquí solamente se puede responder desde una perspectiva restringida a partir de la experiencia que ha vivido el grupo de investigadores que, desde agosto de 1993, se encuentra trabajando en el programa *Calculadoras gráficas y precálculo* en la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia.

Se pueden identificar tres grandes fases por las que ha pasado el proyecto desde el punto de vista de la relación entre las calculadoras gráficas y el diseño curricular[7]:

1.- Introducción de las calculadoras en el diseño curricular. En esta fase, que tuvo lugar durante el segundo semestre de 1993, las calculadoras fueron introducidas tardíamente en el salón de clase como un elemento complementario, pero independiente del diseño curricular que se estaba desarrollando. La mayor parte de las actividades que se desarrollaron involucrando las calculadoras eran de carácter operacional desde el punto de vista de la tecnología: buscaban que los estudiantes conocieran la máquina y fueran capaces de utilizar algunas de sus funcionalidades.

7. Agradezco esta observación al doctor Luis Moreno (Moreno, 94).

2.- Adaptación de las calculadoras al diseño curricular. Esta segunda fase, que tuvo lugar durante el primer semestre de 1994, estableció una nueva relación entre las máquinas y el diseño curricular. El problema de la capacidad de los alumnos para utilizar la calculadora fue relegado a dos o tres actividades particulares que, en todo caso, involucraban la realización de una tarea matemática. Sin embargo, la presencia de las calculadoras fue más patente en el sentido de que éstas eran utilizadas dentro de la realización de buena parte de las tareas matemáticas que tenían lugar en el salón de clase. No obstante, una proporción de las situaciones problemáticas que se le proponían al estudiante no tenían en cuenta las potencialidades de la calculadora como medio de interacción entre el estudiante y el conocimiento matemático. Estas tareas matemáticas no se diferenciaban de manera clara con las actividades que se venían realizando antes de la introducción de las calculadoras gráficas. Más aún, por diversas razones que aquí no se exponen, durante este semestre no se le permitió a los estudiantes utilizar las calculadoras gráficas en ninguna de las pruebas de evaluación. Adicionalmente, muy pocos estudiantes tenían a su disposición una calculadora gráfica por fuera del salón de clase.

3.- Adaptación del diseño curricular a la presencia de las calculadoras. En esta fase, que comenzó durante el segundo semestre de 1994, se evidenciaron cambios cualitativos en el desarrollo del currículo dentro y fuera del salón de clase. Por una parte, la utilización de las calculadoras gráficas fue permitida en todas las pruebas de evaluación y todos los estudiantes tuvieron a su disposición una calculadora tanto dentro como fuera del salón de clase. La evolución del sistema curricular hacia un nuevo estado de equilibrio es evidente si se analizan las opiniones de los profesores que lo llevaron a la práctica, quienes afirman que, tanto la interacción social, como los discursos matemáticos de profesor y estudiantes sufrieron cambios importantes. Sin embargo, se podría analizar la secuenciación de los contenidos, las situaciones problemáticas y las pruebas de evaluación que fueron diseñadas durante este semestre para evidenciar una aproximación de una nueva naturaleza del diseño curricular hacia el conocimiento matemático: las tareas tuvieron un contenido matemático más profundo, se hizo una conexión más estrecha entre el contenido matemático y los problemas prácticos y se evidenció una conexión mucho más coherente entre los sistemas de representación.

La figura 18 muestra gráficamente la evolución de la relación entre las calculadoras gráficas y el diseño curricular en estas tres etapas.

Calculadoras	Calculadoras	Calculadoras
+	↓	↓↑
Diseño curricular	Diseño curricular	Diseño curricular
Fase 1	*Fase 2*	*Fase 3*

Figura Nº 18. Calculadoras → currículo

La observación del grupo experimental para este estudio tuvo lugar en la fase 2. Aunque en esta fase no se dio una adaptación del diseño curricular a las calculadoras en el sentido descrito anteriormente, fue evidente que la presencia de las calculadoras afectó, de alguna manera, los componentes del sistema curricular. Los efectos de la presencia de las calculadoras gráficas deben entonces mirarse como los efectos del nuevo estado de equilibrio en el que se situó el sistema curricular. Por esta razón, resulta entonces importante describir el estado de los diferentes componentes del sistema curricular al hacer esta observación.

Estado del currículo

Componentes "estables"

Los siguientes componentes curriculares tuvieron algún grado de estabilidad durante la observación del grupo experimental, con respecto a su estado durante la observación del grupo de control:

La profesora. La profesora del grupo de control y del grupo experimental fue la misma persona. Puesto que tanto en el grupo de control, como en el grupo experimental, se hicieron grabaciones de video, es posible suponer que la presencia de la cámara no jugó un papel relevante en las diferencias entre los dos grupos.

Los estudiantes. Los estudiantes de ambos grupos fueron seleccionados al azar a partir del conjunto total de estudiantes que toman este curso dentro de la Universidad.

La institución. La observación de los dos grupos se realizó al interior de la misma institución y, por tanto, los aspectos curriculares que dependen de este elemento no sufrieron variaciones relevantes.

Los objetivos y el contenido. Los objetivos y el contenido del tema que se observó fueron los mismos para ambos grupos.

Evaluación. Como ya se comentó, no se permitió el empleo de las calculadoras gráficas en las evaluaciones que se realizaron en el grupo experimental.

Componentes que pudieron ser afectados

Los siguientes son algunos de los componentes que pudieron ser afectados por la presencia de las calculadoras gráficas con su consecuente posible efecto en la interacción social y el discurso matemático dentro del salón de clase.

La profesora. La profesora pudo ser afectada por dos factores:

- ▲ La presencia del investigador que realizó una observación no participante durante todas las clases correspondientes al grupo experimental
- ▲ La invitación que se le hizo a la profesora para que "formara parte del grupo de investigación" durante el semestre en que se hizo la observación del grupo experimental. La profesora participó en buena parte de las reuniones del grupo de investigación

Metodología y situaciones problemáticas. Durante el semestre en el que se observó al grupo experimental se diseñaron y realizaron diversas situaciones problemáticas que involucraban el uso de la calculadora y que no fueron utilizadas en el grupo de control.

Visión y actitud de los investigadores. Durante el semestre de observación del grupo experimental, el grupo de investigación comenzó a desarrollar una nueva visión del currículo con motivo de la presencia de las calculadoras gráficas. Algunas de estas actitudes y visiones pudieron ser transmitidas a la profesora durante las reuniones de coordinación del proyecto.

Discusión

Las siguientes reflexiones se presentan a manera de hipótesis que no han sido contrastadas en este estudio. Se consideran tres componentes del sistema curricular:

- La profesora
- Los alumnos
- El diseño curricular

Profesora

Los resultados indican que se dieron cambios en el comportamiento de la profesora. Las calculadoras pudieron tener alguna influencia en estos cambios. Sin embargo, el hecho de que la profesora no utilizó la calculadora que estaba a su disposición durante las horas de clase observadas y tampoco permitió o incitó al alumno a utilizarla, sugiere que la influencia de las calculadoras en el comportamiento de la profesora fue indirecta. Por un lado, la profesora tuvo que aprender a manejar la tecnología y tuvo que reflexionar acerca de la manera como ésta puede ser utilizada en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por el otro, los resultados sugieren que la profesora se adaptó a un comportamiento no acostumbrado por parte de los alumnos. Finalmente, el hecho de haber invitado a la profesora a participar como investigador en el proyecto pudo tener también alguna influencia. Es posible que la profesora haya querido experimentar y haya sido más abierta y permisiva con situaciones a las cuales ella no estaba acostumbrada.

Alumnos

Los cambios observados en el comportamiento de los alumnos parecen ser los más importantes y es en ellos en los que la presencia de las calculadoras gráficas pudo haber tenido una influencia más directa. Estos cambios pueden ser producto, por un lado, de un mayor interés del alumno por el contenido, como consecuencia de una forma nueva de interactuar con éste. Por otro lado, el comportamiento más activo del alumno en la interacción con la profesora y sus compañeros puede ser la consecuencia de un cambio en la visión que éste tiene acerca de la autoridad en el aprendizaje de las matemáticas. La profesora pudo haber dejado de ser la única autoridad válida para dirimir dudas en el salón de clase y el libro de texto pudo haber perdido al menos una parte de su rol por fuera del salón de clase. Es posible que la calculadora gráfica haya llenado estos espacios en un proceso en el que el estudiante se pudo sentir más cómodo para tener ideas, desarrollarlas, verificarlas e intentar justificarlas ante la profesora y sus compañeros.

Diseño curricular

Algunos de los cambios que se introdujeron en el diseño curricular del grupo experimental, con motivo de la presencia de las calculadoras gráficas, pudieron influir en la interacción. Entre ellos vale la pena mencionar un mayor número de actividades de grupo en las que los estudiantes enfrentan una situación problemática nueva y en las que es necesario conjeturar y experimentar. Estas actividades se diseñaron teniendo en cuenta la presencia de la calculadora. De otro lado, hubo una mayor conciencia por parte del grupo de investigadores (del cual hacía parte la profesora) de la necesidad de modificar, al menos parcialmente, la visión del grupo acerca de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza.

Experiencias posteriores al momento en que se hicieron las observaciones correspondientes a este estudio y que se mencionaron anteriormente indican que estas observaciones se hicieron en una etapa intermedia del proceso de introducción de las calculadoras gráficas en el currículo. Como se mencionó anteriormente, los alumnos del grupo experimental podían utilizar las calculadoras en todo momento *excepto* en las evaluaciones. La experiencia posterior en la que los alumnos pudieron utilizar las calculadoras en las evaluaciones generó una situación curricular sustancialmente diferente en la que se ha observado intuitivamente que las diferencias obtenidas en este estudio se corroboran e intensifican y, además, aparecen diferencias que no existieron en la experiencia objeto de este estudio.

Referencias bibliográficas

Amidon, P. (1973). Nonverbal Interaction Analysis. A Method of Systematically Observing and Recording Nonverbal Behavior. *ERIC Nº: ED071925*,

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, construction, and knowledge: Alternative perspectives for mathematics education. En Grouws, D., Cooney, T. y Jones, D. (Eds.). *Perspectives on research on effective mathematics teaching*. Reston: LEA - NCTM.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), pp. 33-115.

Burns, R. B., & Lash, A. A. (1987). A Comparison of Activity Structures During Basic Skills and Problem-Solving Instruction in Seventh-Grade Mathematics. *American Educational Research Journal*, *23*(3), pp. 393-414.

Cobb, P. A. O. (1993). Characteristics of Classroom Mathematics Traditions: An Interactional Analysis. Conventional Instruction. *American Educational Research Journal*, *29*(3), pp. 573-604.

Dossey, John A. (1992). The Nature of Mathematics: its Role and its Influence. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Dunham, P., & Dick, T. (1994). Research on graphing calculators. *The Mathematics Teacher, 87*(6), pp. 440-445.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education. Studies in Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Fennema, E., & Peterson, P. L. (1987). Teacher-Student Interactions and Sex-Related Differences in Learning Mathematics.*Teaching and Teacher Education*, *2*(1), pp. 19-42.

Fey, James T. (1994). Technology and mathematics education at ICME-7. En Dossey, J. A. (Ed.). *American perspectives on the seventh international congress on mathematical education*. Reston: NCTM.

Fey, J. T. y Hirsch, C. R. (Eds.). (1992). *Calculators in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Flanders, N. A. (1974a). Interaction Analysis and Inservice Training.*ERIC Nº:D088854*

Flanders, N. A. (1974b). Interaction Analysis: A Technique for Quantifying Teacher Influence. *ERIC Nº:ED088855*

Hart, L. E. (1989). Classroom Processes, Sex of Student, and Confidence in Learning Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), pp. 242-260.

Hart, L. E. (1990). Teacher-Student Interaction and Achievement in a Seventh-Grade Mathematics Class. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (Boston, MA, April 16-20, 1990),*

Heger, H. K. (1980). How to Analyze Verbal and Nonverbal Classroom Communication. *ERIC Nº: ED183616,*

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En Hiebert, J. (Ed.). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Huang, S. L., & Waxman, H. C. (1993). Stability of Teachers' Classroom Instruction across Classes and Time of Observation. *Educational Research Association (San Francisco, CA, April 20-24, 1992),*

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Johnson, D. L. (1974). A Conceptual Model Of Teacher And Student Classroom Interaction And Observed Student Verbal Creativity. *Psychology in The Schools*, *10*(4), pp. 475-481.

Kaput, J. (1994). *Conferencia presentada en la reunión anual del NCTM*. Indianapolis: NCTM.

Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 515-556). New York: Macmillan.

McDermott, M. (1984). The Impact of Classroom Interaction Patterns on Students' Achievement-Related Beliefs and Behaviors. *ERIC Nº: ED237206,*

Miller, S. D. (1984). Differences in Teacher-Student Interactions at the Elementary and Junior High School Levels. Early Adolescence: Attitudinal and Environmental Changes. *Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (68th, New Orleans, LA, April, 1984),*

Moreno, L. (1994). Comunicación personal.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: on multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. En Romberg, T., Fennema, E. y Carpenter, T. (Eds.). *Integrating research on the graphical representation of functions.* Hillsdale: LEA.

Nickson, Marilyn (1992). The culture of the mathematics classroom: An unknown quantity? En Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan.

Rico, Luis (1990a). Diseño curricular en educación matemática: elementos y evaluación. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (Eds.). *Teoría y práctica en educación matemática.* Madrid: Alfar.

Rico, Luis (1990b). Diseño curricular en educación matemática: una perspectiva cultural. En Llinares, S. y Sánchez, M. V. (Eds.). *Teoría y práctica en educación matemática.* Madrid: Alfar.

Schoenfeld, A. H., Smith, J. y Arcavi, A. (1994). Learning: The microgenetic analysis of one student's understanding of a complex subject matter domain. En Glaser, R. (Ed.). *Advances in instructional psychology.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Stodolsky, S. S. (1991). *La importancia del contenido en la enseñanza*. Barcelona: Paidós.

Voigt, J. (1985). Patterns and routines in classroom interaction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6*(1), pp. 69-118.

Voigt, J. (1989). The social constitution of the Mathematics province — A microethnographical study in classroom interaction. *The Quaterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, *11*(1 & 2), pp. 27-34.

Webb, N. M. (1982a). Group Composition, Group Interaction, and Achievement in Cooperative Small Groups. *Journal of Educational Psychology*, *74*(4), pp. 475-484.

Webb, N. M. (1982b). Group Interaction and Learning in the Mathematics Laboratory and the Regular Classroom. *ERIC Nº:ED213600,*