Períodos de números racionales: Un abordaje desde la teoría de números y con nuevos recursos

Marcel David Pochulu
Universidad Nacional de Villa María (Córdoba, Argentina)
mpochulu@arnet.com.ar

Resumen

Una de las dificultades más frecuentes que acarrean los alumnos del Nivel Medio en Teoría de Números – y que persiste aún en estudiantes que ingresan a la Universidad – deviene del hecho de considerar que un número es irracional cuando no se le encuentra con relativa facilidad un período a su expansión decimal. Incluso, subyace la idea de que el período de cualquier número racional debe contener sólo unos pocos dígitos, por lo cual, muchas de las expansiones decimales que efectúan con una calculadora tienden a reforzarles estas hipótesis, en tanto observan que no existe una aparente relación en la secuencia de números que muestra el visor.
Así, con la intención de desterrar estas falsas concepciones introducimos a los estudiantes del segundo año en un micromundo donde pueden conjeturar, explorar y experimentar en Matemática. Vale destacar que este micromundo es un diseño (con correspondiente selección y recorte) que desarrollamos como docentes, el cual apela a facilidades y alternativas habilitadas por un utilitario y/o calculadora científica, y no una oferta objetiva y prevista de un software educativo o marca comercial particular.

Palabras Claves: Números racionales, Período de racionales, Teoría de Números, Nuevos Recursos

Introducción

Una de las dificultades más frecuentes que acarrean los alumnos del Nivel Medio en Teoría de Números – y que persiste aún en estudiantes que ingresan a la Universidad – deviene del hecho de considerar que un número es irracional cuando no se le encuentra con relativa facilidad un período a su expansión decimal. Incluso, subyace la idea de que el período de cualquier número racional debe contener sólo unos pocos dígitos, por lo cual, muchas de las expansiones decimales que efectúan con una calculadora tienden a reforzarles estas hipótesis, en tanto observan que no existe una aparente relación en la secuencia de números que muestra el visor.

Así, con la intención de desterrar estas falsas concepciones introducimos a los estudiantes del segundo año del Ciclo Básico Unificado (8 año de Educación General Básica Argentina) del Instituto Secundario Bernardino Rivadavia (Villa María, Provincia de Córdoba) en un micromundo, tal como lo concibe Balacheff y Kaput (1996). Vale destacar que este micromundo es un diseño (con correspondiente selección y recorte) que desarrollamos como docentes, el cual apela a facilidades y alternativas habilitadas por un utilitario y/o calculadora científica, y no una oferta objetiva y prevista de un software educativo o marca comercial particular.

No obstante ello, asumimos que el utilitario y/o calculadora también determinará, en cierta forma, el tipo de retroalimentación que se producirá como consecuencia de las acciones y decisiones que toma el alumno durante la exploración. Puesto que no están predeterminadas las acciones del estudiante, éste podrá explorar la estructura de los objetos, sus relaciones y registros representacionales que le suministra el micromundo, pudiendo generar nuevos objetos complejos a partir de los primitivos originales.

La actividad que les planteamos inicia cuando requerimos que formulen conjeturas e hipótesis acerca de las regularidades que pudieran encontrar en el período de los números racionales de la forma $\frac{a}{7}$, con 0£a£7, siendo *a* un número natural.

Sabemos de antemano que la consigna es totalmente abierta y resulta ambigua para muchos estudiantes, por lo cual es natural que nos pregunten de inmediato: "*Pero, ¿qué es lo que tenemos que buscar?*". Al respecto, no dejamos de reconocer que para que un alumno se apropie de una situación, es necesario que pueda comprender cuál es la "situación" que se le plantea, entender qué es lo que se busca, e iniciar procedimientos de resolución cuyos resultados puedan ser evaluados, como bien lo expresa Saíz (1996). Pero la decisión de plantear una consigna totalmente abierta pretende "reproducir", por un lado, la verdadera actividad que suele llevarse a cabo en un contexto de investigación en Matemática, donde muchas veces la búsqueda de los procedimientos de solución se relacionan fundamentalmente con el pensamiento intuitivo (*inside*) y formas especiales de la actividad heurística (*"eurekas"*).

Por el otro, pretendemos trascender el enfoque tradicional en que subyace, respecto de estos temas, una representación de la Matemática como ciencia acabada, bellamente ordenada y reducida a teorías y definiciones presentadas tal como han sido expuestas; ocultando condiciones o cuestiones que les dieron origen y dificultades que se presentaron en el camino de construcción.

Frente a estas instancias de aparente desconcierto y desasosiego por parte de los alumnos, se nos hace indispensable lograr, como bien lo sugiere Saíz (1996), que comprendan que pueden decidir individualmente la resolución del problema, los pasos a seguir; que pueden probar, que cuentan con el tiempo suficiente para ello, que pueden buscar distintas estrategias sin preocuparse por la presentación, que pueden borrar, tachar y volver a empezar, que es bueno atreverse a actuar, a arriesgarse e inclusive a equivocarse.

Superados los primeros momentos de "resistencia", comienzan a aparecer las primeras hipótesis, lo que anima y entusiasma a otros grupos a identificar nuevas explicaciones o regularidades. Se establece de este modo un ambiente de cooperación en el aula, donde los alumnos trabajan juntos e interactúan unos con otros, contribuyendo a la construcción de conceptos; principalmente por la estimulación que realizamos como docentes para que sean defendidas las ideas ante las alternativas que presentan los demás.

Así, por ejemplo, una de las regularidades que encuentran con cierta facilidad deviene de sumar sus dígitos y hallar un múltiplo de 3. Posteriormente, orientamos a que dividan al período en partes de igual cantidad de dígitos (Figura Nº 1), y luego sumen las mismas.

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$$

$$1+4+2+8+5+7 = 27 \Rightarrow 2+7 = 9$$

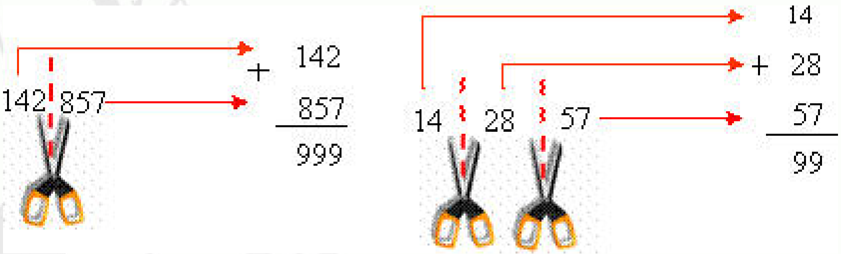

Figura Nº 1

De esta forma, es posible observar que se obtiene una secuencia de nueves, lo cual habría permitido conocer la totalidad del período del número si se hubiesen conocido sólo algunos dígitos iniciales (como máximo la mitad de ellos).

Igualmente, determinan que el período tiene una longitud igual a 6, lo que resulta sugestivo pensando que el denominador es 7 (esta última apreciación generalmente es sugerida por el docente), y que es cíclico si se tiene en cuenta la secuencia reflejada en la Figura Nº 2:

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}, \quad \frac{3}{7} = 0,\overline{428571}, \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714},$$
$$\frac{6}{7} = 0,\overline{857142}, \quad \frac{4}{7} = 0,\overline{571428}, \quad \frac{5}{7} = 0,\overline{714285}.$$

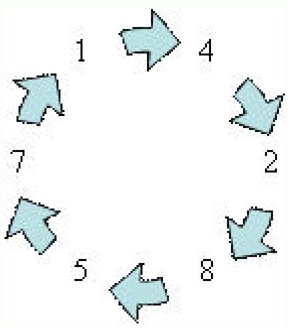

Figura Nº 2

La explicación a estos comportamientos no resulta trivial si no media nuestra orientación como coordinadores de la tarea, ya que puede ser analizado con diferentes niveles de complejidad y profundidad, tales como: restos que arroja la división (para alumnos del Nivel Medio educativo), o congruencias (para alumnos de ciclos superiores).

Como el desafío comporta que los alumnos expongan y pongan a prueba el pensamiento personal, las hipótesis son discutidas, analizadas y consensuadas, lo que hace necesario iniciar el proceso de institucionalización del conocimiento matemático así construido. Aquí, la formalización y generalización de los resultados adquiere relevancia, puesto que entre todos los rigores científicos, el matemático es sin duda el más sutil e imprescindible – como lo expresa Alsina y Guzmán (1996) – porque el propio oficio se hunde si el rigor brilla por su ausencia.

Es en esta etapa donde comienzan a surgir y perfilarse, por parte de los alumnos y después de interactuar con el docente, preguntas como: *¿Cuántos y cuáles son los racionales que comparten estas características en su período? ¿Cómo puedo anticipar la longitud del período de un racional? ¿Cuál es la mínima cantidad de dígitos que requiero conocer del período de un racional para completar la serie restante?* entre otras.

Tratar de arribar, o acercarnos al menos, a respuestas parciales para estas preguntas conduciría a un trabajo tedioso si lo pensamos sólo con el uso de una calculadora o con lápiz y papel, pero sumamente sencillo si disponemos de algún software de Matemática que sea configurable para que muestre en pantalla la cantidad de dígitos que uno desea. En consecuencia, podríamos trabajar con 50, 500 o más dígitos, y determinar el período de una cantidad considerable de números racionales para llegar a “convencernos” de que cierta fenomenología está presente en muchos de ellos.

En estas instancias, el software puede ayudarnos notablemente a efectuar la exploración de estos micromundos, y en el camino de búsqueda de explicaciones a estas regularidades podemos transitar por contenidos matemáticos de los más variados, como la Función j de Euler, Divisibilidad de los Enteros, Congruencias y Restos de Cocientes (Aritmética Modular), Grupos Cíclicos, etc., los que pueden ser readaptados para cada nivel y grupo de alumnos.

Vale aclarar que las operaciones previstas necesariamente se incluyen en el marco de juego propuesto a los alumnos –como configurar para 50 ó 500 dígitos, explorar el 1/49 o el 1/17, analizar patrones secuenciales de determinado modo– ya que no son fenomenologías “espontáneas” o “propias” de la interacción con el utilitario, sino más bien, devienen del diseño de la actividad.

Insistimos en que de no mediar devoluciones, análisis y reflexiones con el grupo de estudiantes, no obra tal fenomenología que no es parte integral del micromundo y si esto no está anticipado y previsto por parte nuestra, pueden no alcanzarse las situaciones descriptas, aún con todas las chances y potencialidad que pudiera tener el software. Incluso, la no “devolución” –en el caso de uno o más grupos– puede obedecer a diversos motivos, entre los cuales mencionamos la necesidad de ajustes del diseño de la actividad, puesto que los estudiantes podrían operar, registrar todos los resultados y ser el docente el único que estuviera llevando la apreciación más allá de una serie de operaciones y actividades realizadas, sin atribución de sentido simétrico para los estudiantes.

Continuando con la exploración de regularidades en las expansiones decimales de los números racionales, sugerimos que se busque algún patrón entre los números la forma $\frac{1}{2^n}$. Si ordenamos los datos en una tabla nos puede ayudar más rápidamente en nuestra búsqueda:

Fracción	*Expresión exponencial*	*Número de dígitos necesarios para su representación decimal*	*Representación decimal*
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0,5
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2^2}$	2	0,25
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2^3}$	3	0,125
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2^4}$	4	0,0625
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2^5}$	5	0,03125

$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2^6}$	6	0,015625
$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{2^7}$	7	0,0078125
⋮	⋮	⋮	⋮
	$\frac{1}{2^n}$	n	$0,\overbrace{\underbrace{0 \ldots 25}_{\text{Dígitos de } 5^n}}^{n \text{ dígitos}}$

Si hacemos lo mismo, pero ahora con las potencias de 5, ¿aparecerá un patrón similar?

Fracción	*Expresión exponencial*	*Número de dígitos necesarios para su representación decimal*	*Representación decimal*
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0,2
$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5^2}$	2	0,04
$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{5^3}$	3	0,008
$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{5^4}$	4	0,0016
$\frac{1}{3125}$	$\frac{1}{5^5}$	5	0,00032
$\frac{1}{15625}$	$\frac{1}{5^6}$	6	0,000064
	$\frac{1}{5^n}$	n	$0,\overbrace{\underbrace{0 \ldots ab}_{\text{Dígitos de } 2^n}}^{n \text{ dígitos}}$

¿Y qué ocurrirá si combinamos fracciones con potencias de 2 y 5 en el denominador? ¿Qué explicaciones se podrían dar a estos patrones?

Fracción	*Expresión exponencial*	*Número de dígitos necesarios para su representación decimal*	*Representación decimal*
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2^1 . 5^1}$	1	0,1
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2^2 . 5^1}$	2	0,05

PROFESORES DE MATEMÁTICAS
NEWTON

$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{2^3.5^1}$	3	0,025
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{2^1.5^2}$	2	0,02
$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{2^4.5^1}$	4	0,0125
$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2^1.5^2}$	2	0,01
$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{2^3.5^2}$	3	0,005
$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{2^2.5^3}$	3	0,002
$\frac{1}{4000}$	$\frac{1}{2^5.5^3}$	5	0,00025
	$\frac{1}{2^n.5^m}$	Máximo $\{n \,;\, m\}$	Varias conjeturas

De la misma manera, debemos anticipar, como una cuestión de diseño, la propia institucionalización del conocimiento matemático, puesto que de este modo favorece al desarrollo de la situación problemática, ya sea por las construcciones que se llevan a cabo, por los propios aprendizajes que se construyen, o por las concepciones que intentamos modificar.

A modo de reflexión final

Si un problema se concibe no como objeto definido por su planteo sino en función del contenido matemático que pone efectivamente en juego, se analizará en correlación a la respuesta que desencadene bajo ciertas condiciones[1]. En síntesis, en lugar de quedar fijado a la propuesta, emblemática y definitiva, el diseño de un buen problema podría considerarse como tarea docente en desenvolvimiento dialéctico.

Diseñar buenos problemas en matemática, con útiles clásicos o modernos, implica todo un desafío que requiere aprendizaje, experiencia, espacio, tiempo y aceptación de la revisión crítica de lo realizado, sin poner en jaque la autoestima profesional.

Al respecto, cabe destacar que pensamos que esta actividad de clase presenta las condiciones sugeridas por Douady, en Saiz (1996) para seleccionar verdaderas situaciones problemáticas para los alumnos, tales como:

- El enunciado tiene sentido en el campo de conocimientos del alumno y de la currícula escolar;

- El alumno puede determinar lo que puede ser una respuesta al problema, siendo independiente de su capacidad para concebir una estrategia de respuesta o la validación de una propuesta;

- El alumno puede iniciar un procedimiento de resolución, aunque la solución no es evidente, puesto que no puede proveer una respuesta completa sin desarrollar una argumentación que lo conduce a preguntas que no sabe responder inmediatamente;

- El problema es matemáticamente rico, en el sentido que involucra una red de conceptos bastante importante, pero no demasiados para que el alumno pueda abarcar su complejidad;

- El problema es abierto por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantearse y por las diferentes estrategias que puede poner en acción; y

- El conocimiento que se desea lograr con el aprendizaje es el recurso científico para responder eficazmente al problema.

Si abandonamos el optimismo objetivo, también a este respecto, convendremos que difícilmente el problema resulte más accesible sólo por contar con nuevas herramientas; ni apreciable tras la lectura de la secuencia de factores o serie de características que lo componen. Insistiendo en que lo observable no emerge del objeto –no es atributo del objeto sino atribución activa del sujeto– los invitamos a conformar espacios que den a este tipo de interacción con colegas, la oportunidad de acercarnos, en aproximaciones sucesivas, a la búsqueda común de buenos problemas.

Estamos convencidos que trabajar la Matemática con éxito implica saber cuándo hay que *explorar*, saber elegir el camino más adecuado, seguirle la pista para ver si da frutos, pero también, lograr que nuestros alumnos estén más dispuestos a intentar lo desconocido, a la hora de trabajar ellos mismos la Matemática. Esto conlleva a buscar actividades que favorezcan la discusión, la reflexión, y que les faciliten los medios de ver cómo se puede conseguir resultados de manera más eficiente y criteriosa. En la medida en que entrenemos a nuestros alumnos a pensar independientemente y a utilizar los conocimientos de que disponen, habremos desarrollado con éxito nuestra tarea como profesores.

Referencias

Alsina, C. y Guzmán, M. de. (1996). Los matemáticos no son gente seria. Rubes. Barcelona.
Bachelard, G. (1991). La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. Siglo XXI. México.
BALACHEFF, Nicolás y KAPUT, Jim. (1996). “Computer-Based Learning Environment in Mathematics”. En Bishop, A.J. et al, International Handbook of Mathematical Education, pp. 469 – 501.
Saiz, I. (1996). “Propuesta de Contenidos Básicos Comunes para la EGB”. En *Fuentes para la transformación curricular – Matemática*. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.

[1] Condiciones estructurales y coyunturales. Algunas de las más relevantes son: edad, nivel, saberes previos y estructura de conocimientos de destinatarios, recursos provistos, medios disponibles, encuadre institucional, concepción didáctica del docente, historia y memoria de la clase, entre otras.