Aspectos educativos de las otras definiciones de la derivada

Félix Martínez de la Rosa.
Departamento de Matemáticas.
Universidad de Cádiz.

Resumen: Se analizan distintas definiciones del concepto de derivada desde un punto de vista didáctico.

Introducción

La definición de Cauchy de la derivada constituye uno de los tópicos más importantes del Cálculo, tanto en la enseñanza secundaria como en la Universidad:
Una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto que contenga a x_0, es derivable en x_0 si existe el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

El valor del límite se designa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de derivada de f en x_0.
La derivada de una función en un punto se interpreta geométricamente como la pendiente de la tangente a la curva definida por la función, en ese punto. Esta interpretación geométrica permite identificar la expresión analítica con la idea visual, y así puede establecerse si una función es derivable en un punto a través del análisis de su gráfica.
Por otro lado, la derivada $f'(x_0)$ se interpreta como la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a *x* cuando $x = x_0$. De acuerdo con lo que representen la función f y la variable *x*, la derivada representará una velocidad, un coste marginal o cualquiera de los otros muchos conceptos que puede significar. Esto hace que su motivación pueda hacerse utilizando contextos más amplios que el analítico y el visual. Las razones de cambio se presentan en todas las ciencias y por tanto, es fundamental asentar el concepto de derivada y la definición de Cauchy en un primer curso de Cálculo de la Universidad, para aplicarlo adecuadamente a los requerimientos que necesitemos.

Pero además de la de Cauchy, existen otras definiciones que aportan nuevas miradas al concepto de derivada. Estas definiciones se obtienen de la de Cauchy de tres formas diferentes:

a) Obteniendo la recta tangente a una curva como el límite de rectas secantes no habituales.
b) Analizando la expresión que aparece dentro del límite en la definición de Cauchy.
c) Reescribiendo la definición de Cauchy.

Como resultado se consiguen tres nuevas definiciones, que resaltan ciertas sutiles cualidades del concepto de derivada, y que además son útiles, cada una de ellas en un apartado distinto: el análisis numérico, la demostración de propiedades de la derivada y el paso de funciones de una a dos variables.
Por tanto, los objetivos de este artículo son:

Primero: Partiendo de la de Cauchy obtener las distintas definiciones de la derivada.

Segundo: Resaltar los aspectos didácticos y la motivación que nos aportan estas otras definiciones.

I) Generalizaciones de la derivada de Cauchy

El concepto geométrico de recta tangente a una curva *f* en un punto P es el de la recta que se obtiene como límite de las secantes por los puntos P y Q, cuando Q se aproxima a P (Figura 1). De esta manera el límite de las pendientes de las secantes da lugar a la pendiente de la tangente cuyo valor es la derivada de *f*.
El proceso visual empleado para obtener la recta tangente a través de las secantes nos permite plantear una pregunta: Si trazásemos las rectas secantes por puntos colocados a ambos lados de P, que se fueran aproximando sucesivamente a P, ¿el proceso se estabilizaría también en la recta tangente? La visualización de este proceso está en la Figura 2.

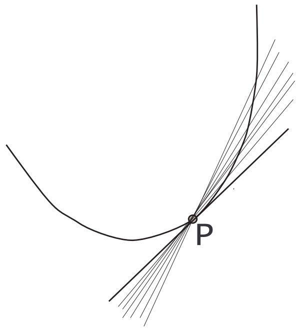

FIGURA 1

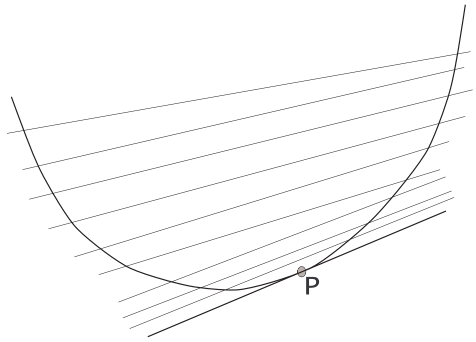

FIGURA 2

I-a) Una primera respuesta parcial consiste en trazar las secantes por puntos de la forma $(x_0 - h, f(x_0 - h))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, que están situados simétricamente a ambos lados de P $(x_0, f(x_0))$ (ver Figura 3)

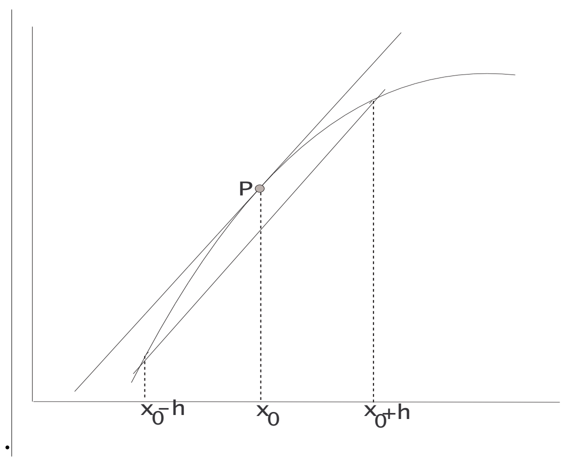

FIGURA 3

Observemos que

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

Por tanto, la derivada $f'(x_0)$ puede definirse a través del límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

El cociente que aparece en la expresión anterior se denomina fórmula de la diferencia central, y en cursos elementales de análisis numérico se utiliza como una aproximación de $f'(x_0)$ mejor que el cociente incremental de la definición de Cauchy.

I-b) La respuesta general a la pregunta planteada se responde afirmativamente en (Simpson, 1993). Tracemos las secantes por puntos de la forma $(x_0-bh, f(x_0-bh))$, $(x_0+ah, f(x_0+ah))$ para valores positivos de a, b (ver Figura 4), y hagamos $h\to 0$.

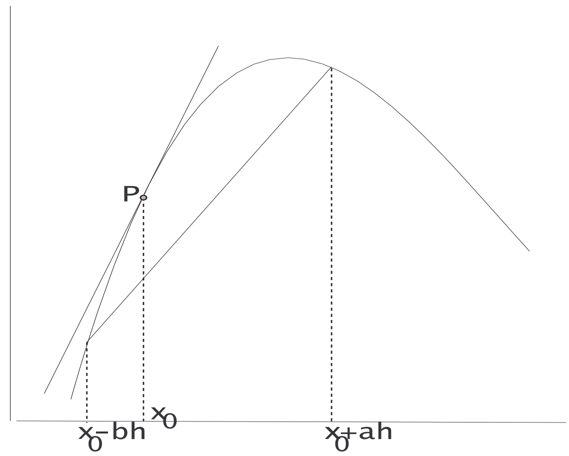

FIGURA 4

La pendiente de las secantes de esta construcción es

$$\frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{(a+b)h}$$

Para comprobar que la tangente se obtiene también como el límite de la secantes anteriores, supondremos que f admite el desarrollo de Taylor de orden uno en x_0. Para los valores x_0+ah y x_0-bh tenemos:

$f(x_0+ah)=f(x_0)+f'(x_0)(ah)+R_1$, siendo $\lim_{x\to x_0}\frac{R_1}{h}=0$

$f(x_0-bh)=f(x_0)-f'(x_0)(bh)+S_1$, siendo $\lim_{x\to x_0}\frac{S_1}{h}=0$

Restando ambas expresiones y simplificando obtenemos:

$$\frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{(a+b)h} = f'(x_0)+\frac{R_1-S_1}{(a+b)h}$$

Por tanto:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{(a+b)h}$$

Como caso particular, para $a=b=1$ se obtiene la fórmula de la derivada de I-a.

Aspectos didácticos destacados

La interpretación geométrica de la definición de Cauchy es el punto inicial para motivar la idea de que es posible definir la derivada usando distintas configuraciones del límite. En el primer caso se motiva la fórmula de la diferencia central aunando la expresión analítica con la idea visual.
En el segundo caso, se engloban la fórmula y el proceso anterior en un contexto más general, mediante la utilización de diferentes familias de secantes, todas con la propiedad común de que convergen a la misma recta tangente.

II) Derivada de Caratheodory

Para motivar esta nueva fórmula para la derivada, expresamos la definición de Cauchy en la forma

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Nos fijamos en la expresión que aparece dentro del límite y denominamos ϕ a la función

$$\phi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Observemos que si $f(x)$ es derivable en x_0 entonces la función ϕ tiene una discontinuidad evitable en x_0. En efecto, bastaría definir ϕ en x_0 con el valor $\phi(x_0) = f'(x_0)$, entonces $\lim_{x\to x_0}\phi(x)=\phi(x_0)$ y por tanto ϕ sería continua en x_0.
Recíprocamente, si ϕ tiene una discontinuidad evitable en x_0, entonces existe $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ y por tanto f sería derivable en x_0 .
En consecuencia, la derivabilidad de f en x_0, está ligada a la continuidad de ϕ en x_0, o dicho de otro modo:

Una función $f(x)$, definida en un intervalo abierto U, es derivable en $x_0 \in U$ si existe una función ϕ continua en x_0 que verifique la relación:

$$f(x) - f(x_0) = \phi(x)(x - x_0) \text{ para cada } x \in U$$

El valor de la derivada de f en x_0 es $\phi(x_0) = f'(x_0)$.
Esta definición fue dada por Caratheodory en 1954, en el contexto de las funciones de variable compleja, en su libro "*Theory of Functions of a Complex Variable, vol. 1*".
Expresando de esta manera el concepto de derivada se aprecia que la continuidad es un paso previo imprescindible para la derivabilidad. En efecto, notemos que si $x \neq x_0$, entonces $\phi(x)$ es la pendiente de la recta secante que pasa por $(x, f(x))$ y por $(x_0, f(x_0))$. Por tanto, la definición de Carathedory pone de manifiesto que las pendientes de las rectas secantes se aproximan a la tangente de una forma continua. O dicho de otro modo, la continuidad es esencial para la derivabilidad.
Una gran cualidad de esta definición, aparece a la hora de obtener los resultados típicos de las funciones derivables. Las justificaciones de las fórmulas de derivación son a veces tediosas y rutinarias, pero hay una en particular que queremos destacar. Se trata de la derivación de funciones compuestas o "*regla de la cadena*". La demostración correcta puede consultarse por ejemplo en (Spivak, 1986), y ciertamente no es sencilla. Como alternativa no es difícil hallar pruebas falsas en libros de uso habitual por los alumnos. Por ejemplo ver (Edwards y Penney, 1996) o (Larson, 1999):
Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$, entonces la derivada de $g \circ f$ en x_0 es

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x_0) + f(x_0 + h) - f(x_0)) - g(f(x_0))}{f(x_0 + h) - f(x_0)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Denominando $f(x_0 + h) - f(x_0) = k$, y suponiendo que $k \neq 0$, al ser f derivable en x_0 será continua en x_0, luego $k \to 0$ cuando $h \to 0$. Por tanto el resultado del límite es $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.
Obviamente si $f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$ la prueba quedaría invalidada. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 sen \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, es derivable en 0, y se anula en puntos tan cerca de 0 como se quiera.
La definición de Caratheodory permite obtener la regla de la cadena de una forma correcta pero muy sencilla:

Teorema: Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $b = f(x_0)$, entonces $h = g \circ f$ es derivable en x_0 y $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Demostración: Por ser f derivable en x_0 existe una función ϕ, continua en x_0 y definida en un intervalo abierto V que contiene a x_0, tal que:

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - b = \phi(x)(x - x_0), \text{ para cada } x \in V.$$

Análogamente, existe una función ψ, continua en b y definida en un intervalo abierto U que contiene a b, siendo:

$$g(z) - g(b) = \psi(z)(z - b) \text{ para cada } z \in U .$$

Entonces:

$$h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x))(f(x) - b) = (\psi \circ f(x))\phi(x)(x - x_0)$$

para cada $x \in V$ tal que $f(x) \in U$. Ya que $(\psi \circ f)\phi$ es continua en x_0 y que su valor en x_0 es $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$, tenemos el teorema.

En el clásico libro (Apostol, 1976) el álgebra de derivadas (tanto de funciones reales como complejas) se obtiene a partir de la definición de Caratheodory. También en el artículo (Kuhn, 1991) se dan las demostraciones de ésta y de otras fórmulas del cálculo de derivadas.

Aspectos didácticos destacados

A partir de la expresión que aparece dentro del límite de la definición de Cauchy, se obtiene la de Caratheodory. Esta definición es, evidentemente, inferior a la de Cauchy en el aspecto computacional, pero presenta dos aspectos didácticos destacados:
Nos muestra que el proceso de acercamiento de las pendientes de las secantes a la pendiente de la tangente es continuo y, por tanto, la continuidad es esencial para la derivabilidad.
Nos permite simplificar las demostraciones de ciertos teoremas básicos de la derivación.

III) Derivada de Frechet

En las asignaturas de primer curso de las carreras de ciencias, se aborda el estudio de las funciones reales de dos variables. Pasar de una a dos variables, o lo que es lo mismo pasar de dos a tres dimensiones, representa un importante reto didáctico al que nos tenemos que enfrentar los profesores de matemáticas.

En el caso concreto de la generalización del concepto de derivada y su interpretación geométrica, nos encontramos con que en una variable la derivada va ligada a la recta tangente, pero en el caso de dos variables aparecen dificultades. Un primer paso para generalizar la derivada consiste en mantener fija una variable y derivar respecto de la otra. Así se obtienen las derivadas parciales de una función $f(x, y)$ en un punto (a,b)

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \qquad f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

La interpretación geométrica de las derivadas parciales como la pendiente de la tangente en $(a,b, f(a,b))$ a la curva que se forma al cortar la superficie $f(x, y)$ con un plano ($x = a$ para el caso de $f_y(a,b)$, e $y = b$ para el caso de $f_x(a,b)$) proporciona una buena intuición geométrica. Por desgracia la relación entre continuidad y derivabilidad que se tiene en una variable, no se verifica aquí. Basta tomar la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \; para \; x = y, x \neq 0 \\ 0 \; en \; otro \; caso \end{cases}$$

Es trivial comprobar que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, pero sin embargo f no es continua en (0,0). Por tanto se impone la búsqueda de un concepto más general. Para ello, regresamos a la definición de Cauchy para funciones de una variable y la reescribimos en la forma:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \qquad (1)$$

O dicho de otra manera:

$f(x)$ es derivable en x_0 si existe un valor, que denominamos $f'(x_0)$, que verifica (1).

Esta es la caracterización de Frechet de la diferenciabilidad para funciones de *R* en *R*. En ella se aprecia que la diferencia entre f y la recta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (recta tangente) se hace cero aún al dividirse entre $(x - x_0)$, cuando x va hacia x_0. En otras palabras, la recta tangente a una curva en un punto se parece mucho a la curva cerca del punto. (De hecho en (Bivens, 1986) se demuestra que de entre todas las rectas que pasan por ese punto, la tangente es la que más cerca está de la curva cerca del punto, y por tanto es la mejor aproximación lineal de *f* cerca del punto).
Si partimos de esta caracterización, el concepto de diferenciabilidad para funciones de R^2 en *R* aparece ahora, de manera natural, como una generalización de la derivada de funciones de *R* en *R*:

Una función $f(x, y)$ es diferenciable en (a,b) si:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x, y) - (f(a,b) + f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b))}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

Este es el concepto de Frechet para la diferenciabilidad de funciones de R^2 en *R* e implica la continuidad de f en (a,b). Además se aprecia que la diferencia entre $f(x, y)$ y el plano $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b)$ (que se definirá como plano tangente) se hace cero aún al dividirse entre $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, cuando (x, y) tiende hacia (a,b), lo que da idea del parecido entre ambos cerca del punto (a,b).
El concepto de diferenciabilidad para funciones de R^n en R^m, y en general para espacios normados, fué dada por Frechet en 1925 en su libro *"La notion de differentielle dans l'Analyse générale"*.

Aspectos didácticos destacados

Una simple reescritura de la definición de Cauchy da lugar a la de Frechet, la cual nos permite:
Expresar analíticamente el hecho de que la tangente a una curva en un punto se parece mucho a la curva en un entorno del punto.
Facilitar y motivar el paso de la derivabilidad en una variable a la diferenciabilidad en dos variables, y el concepto de plano tangente

Referencias

Apostol, T. M. (1976). "Análisis Matemático". 2º ed. Reverté.

Bivens, Irl C. (1986). " What a Tangent Line is When it isn´t a Limit". The College Mathematic Journal, vol 17, nº 2, pp. 133-143.

Edwards, C. H. ; Penney, D. E. (1996). "Cálculo con Geometría analítica". Prentice Hall Hispanoamericana, 4ª ed.

Kuhn, S. (1991). "The derivative a la Caratheodory". American Mathematical Monthly, vol. 98, nº 1, pp. 40-44.

Larson R. ; Hostetler R. ; Edwards B. (1999). "Cálculo y geometría analítica". 6º ed. McGraw Hill.

Simpson, W. A. (1993). "An illuminating generalization of the definition of the derivative". Int. J. Math. Edu. Sci. Tech., vol. 24, nº 1, pp. 152-156.

Spivak, M. (1986). "Calculus". Ed. Reverté.