



Calculadoras gráficas y precálculo. Efectos en el diseño curricular

Pedro Gómez y Cristina Carulla

Este estudio exploró los efectos en el diseño curricular de la introducción y utilización de las calculadoras gráficas en un curso de precálculo a nivel universitario. Se analizaron diversos documentos que describen el curso antes y después de la introducción de la tecnología, junto con los libros de texto y las tareas que fueron utilizados en cada caso. Se evidencian cambios en las visiones que la institución diseñadora del currículo tiene acerca del conocimiento matemático, de su enseñanza y de su aprendizaje. Este cambio de visiones se expresó explícitamente en el diseño curricular a nivel micro con motivo del diseño y puesta en práctica de situaciones problemáticas novedosas que siguen las pautas del pensamiento de alto nivel. La utilización de estas situaciones problemáticas es una consecuencia de una nueva posición curricular con respecto a los objetivos, el contenido, la metodología y la evaluación.

Calculadoras gráficas y precálculo

El programa de investigación “Calculadoras gráficas y precálculo” fue realizado en la Universidad de los Andes durante 1994 y 1995, con el propósito de explorar los efectos curriculares de la utilización de las calculadoras gráficas en el curso de precálculo de esta universidad. Se analizó el impacto de esta nueva tecnología en el diseño curricular, las creencias del profesor, la interacción en el salón de clase, y las actitudes y la comprensión de los estudiantes. En este artículo se presentan los resultados del estudio que buscaba explorar y caracterizar los cambios, si los hubo, en el diseño curricular con motivo de la utilización de las calculadoras gráficas. Esta exploración se realizó con base en el análisis de diversos documentos que describen el diseño curricular del curso de precálculo antes y después de la introducción de las calculadoras gráficas.

El artículo se divide en cuatro partes. En la primera se presentan elementos generales relacionados con el concepto de currículo en matemáticas. En la segunda se describen las principales características metodológicas de la investigación. En seguida, se describen los resultados obtenidos. Finalmente, se hacen algunas reflexiones sobre los efectos de las calculadoras gráficas en el diseño curricular.

Currículo en matemáticas

El currículo es “el plan operativo que explica en detalle lo que deben hacer los alumnos de matemáticas, cómo deben alcanzar las metas curriculares identificadas, qué deben hacer los profesores para ayudarles a desarrollar su conocimiento matemático y el contexto en el que tiene lugar el aprendizaje y la enseñanza” (Romberg, 1991). Una visión amplia del currículo tiene en cuenta todos los factores que pueden influir en el diseño y la puesta en práctica de este plan operativo. Por esto es necesario considerar, en primera instancia, un *nivel macro* donde intervienen los factores sociales, políticos, económicos y culturales que definen las visiones, valores y tradiciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, como también las necesidades y expectativas de la formación



matemática de los ciudadanos; un *nivel meso* en el que se expresan las visiones que la institución, como colectivo, tiene acerca del profesor, el estudiante y las matemáticas como saber cultural y saber a enseñar; y un *nivel micro* donde se relacionan el profesor y el estudiante en la construcción del conocimiento matemático, a través del desarrollo de un diseño curricular (Rico, 1991).

Los elementos culturales, políticos, económicos y sociales definen las características del entorno educativo en el área de las matemáticas. Estas características se manifiestan en las direcciones que toma la política educativa del gobierno y en la manera como se llevan a la práctica, a través de su influencia en las instituciones educativas. Allí se presentan una serie de concreciones de esas líneas sociales, las cuales se expresan en el diseño de un currículo que no sólo abarca la organización de los contenidos de la enseñanza, sino las posiciones ideológicas de la institución sobre lo que son las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, el perfil del profesor y del estudiante. Este currículo se desarrolla en la relación didáctica que se entabla entre el profesor y el estudiante en la construcción del conocimiento matemático cuando se manifiestan los objetivos a lograr, los principios de evaluación, la metodología de enseñanza y la organización del contenido.

La complejidad del currículo es producto de la interacción, directa o indirecta, entre todos los elementos de los tres niveles. La interacción entre el nivel meso (institucional) y el nivel micro (didáctico) se expresa en la forma como las visiones que la institución tiene (acerca del conocimiento matemático —como saber cultural y saber a enseñar—, de la enseñanza y del aprendizaje) pueden determinar los objetivos, el contenido, la metodología y los principios de evaluación que se espera sean llevados a la práctica dentro del salón de clase. De esta forma, por ejemplo, diferentes instituciones, con visiones diferentes acerca del conocimiento matemático a enseñar, definirán diferentes objetivos acerca de lo que los estudiantes deben saber y propondrán diferentes esquemas para lograr estas metas (tanto en cuanto a la secuenciación del contenido, como en cuanto a lo que debe hacer el profesor y cómo deben ser evaluados los estudiantes). De la misma forma, las visiones de la institución sobre las características de los estudiantes (cómo ellos aprenden matemáticas) y sobre las funciones y capacidades del profesor (cómo ellos deben comportarse en el salón de clase) influyen en la definición de los cuatro elementos que constituyen el nivel micro o didáctico del currículo.

Para una misma área del conocimiento matemático (en este caso el precálculo) es posible definir diferentes diseños curriculares (objetivos, contenido, metodologías y evaluación) y estos diseños curriculares estarán determinados, al menos parcialmente, por las visiones que la institución que forma a los estudiantes tiene acerca del conocimiento matemático, su aprendizaje y su enseñanza.

Visiones institucionales

El diseño curricular, en el sentido utilizado aquí, es el plan operativo que la institución (dentro de la cual se realiza la formación) propone a los profesores (encargados de esta formación) para que sea desarrollado por ellos dentro y fuera del salón de clase. En muchas ocasiones, este plan es definido por una parte o la globalidad del colectivo de profesores de matemáticas de la institución. En otras ocasiones, es el profesor encargado de la asignatura quien define este plan. Es posible que, para instituciones y asignaturas específicas, este plan operativo no se encuentre descrito explícitamente en un documento. En todo caso, al explicar lo que deben hacer los alumnos, cómo ellos deben alcanzar las metas y qué deben hacer los profesores, el diseño curricular es una expresión de las visiones que este colectivo de personas, “la institución”, tiene acerca de la naturaleza del conocimiento matemático (como saber cultural y como saber a enseñar), de la forma en que es posible aprenderlo y de la forma en que se debe enseñar. A conti-

nuación se describen de manera general las principales características de estos tres aspectos.

Conocimiento matemático

El conocimiento matemático como saber cultural puede ser visto de diversas maneras. Por ejemplo, la institución puede considerar que el conocimiento matemático es un conjunto de reglas y procedimientos con valor práctico, un cuerpo estructurado y estático de afirmaciones demostrables formalmente, o un conocimiento en evolución, construido socialmente y abierto a la experimentación, a la formulación y contrastación de conjeturas. La visión que la institución tenga del conocimiento matemático como saber cultural influye en su visión de las matemáticas como saber a enseñar (Dossey, 1992). La institución define entonces, por ejemplo, el tipo de contenidos a enseñar, la manera como se deben utilizar las diferentes representaciones de un objeto matemático dentro de la enseñanza y el aprendizaje (Janvier, 1987), el status (operacional o estructural) de los conceptos que conforman estos contenidos (Sfard, 1991) y el tipo de actividades matemáticas que ella considera relevantes para enseñar y aprender estos contenidos.

El álgebra escolar puede ser enseñada y aprendida en diferentes niveles (Kieran, 1992). Al final de la secundaria y al comienzo del ciclo universitario esta área del conocimiento se ha mirado tradicionalmente desde dos perspectivas. Una en la que se enfatiza la manipulación de expresiones simbólicas y en la que se recorre la tabla N° 1 a través de sus filas (visión de álgebra). Otra en la que se hace una introducción al estudio de funciones y se recorre el contenido a través de las columnas (visión de precálculo). De esta forma, mientras que, de acuerdo a la primera perspectiva, se estudia la problemática de la resolución de ecuaciones para todos los grados de las funciones polinómicas detallando las diferentes técnicas que son necesarias para tener éxito en esta actividad, en la segunda perspectiva se estudian las características y los problemas asociados a cada una de las familias de funciones, pudiendo hacer mayor énfasis en la potencialidad de las funciones como elemento modelador de situaciones reales. Dentro de la segunda pers-

	Lineal	Cuadrática	Polinómica	Racional y radical	Trigonométrica
Manejo Simbólico					
Manejo Gráfico					
Relación entre representaciones					
Ecuaciones					
Inecuaciones					
Aplicaciones					

Tabla N° 1. Álgebra y precálculo

pectiva, es posible aproximarse al estudio de cada familia de funciones y de la relación entre ellas con diversos grados de profundidad dependiendo del tipo de características, conceptos y procesos que se consideren relevantes en relación con cada uno de los objetos matemáticos involucrados.

Comprensión y aprendizaje

La institución tiene también una visión acerca de lo que significa comprender matemáticas y acerca de la manera como los estudiantes aprenden matemáticas. Su visión de la comprensión de los contenidos matemáticos (en términos de los esquemas con los que

el estudiante estructura internamente la información) puede depender de la importancia que ella dé a aspectos como la calidad y la cantidad de representaciones internas y de sus conexiones; de la percepción que ella tenga de los conceptos matemáticos; y de las concepciones que ella espera que los estudiantes construyan de ellos como objetos que pueden ser representados internamente desde múltiples perspectivas (Romberg, 1993; Hiebert y Carpenter, 1992).

Por otra parte, la institución asume también una posición con respecto a las formas como ella, como colectivo, cree que los estudiantes pueden y deben aprender el contenido matemático. En esta dimensión la institución puede ubicarse en algún punto de un espectro que puede ir desde la recepción pasiva de una información que le es transmitida al estudiante, hasta otro extremo en el que se considera que el estudiante construye el conocimiento a partir de la interacción con el profesor y sus compañeros en un proceso de interacción social similar al de las comunidades científicas (Dossey, 1992; Schoenfeld, 1992).

Enseñanza

La institución también asume una posición con respecto a la forma como ella considera que se debe enseñar el contenido matemático y cuál debe ser el papel del profesor en este proceso. La institución, como colectivo, puede considerar que la enseñanza consiste principalmente en la transmisión de una información, o que las matemáticas se deben enseñar a través de situaciones problemáticas con propósitos didácticos que promuevan la construcción social del conocimiento por parte de los estudiantes, o ubicarse en un punto intermedio dentro de este espectro (Ernest, 1985).

El nivel micro del currículo

En este nivel se determinan y se hacen explícitas las metas que se espera que logren los estudiantes y el plan para lograrlas. La complejidad involucrada en este plan se puede simplificar al definir los objetivos que se quieren lograr, caracterizar el contenido matemático que se quiere enseñar, proponer la metodología que se debe utilizar dentro y fuera del salón de clase, y determinar los esquemas de evaluación y valoración que se deben utilizar con los estudiantes. Los objetivos, el contenido matemático, la metodología y los esquemas de evaluación que se definen en el nivel micro del currículo se expresan, en la práctica, en un conjunto de actividades en el salón de clase que determinan la relación entre el profesor y el alumno en la construcción del conocimiento matemático. Estas actividades están determinadas, en la mayoría de las ocasiones, por el tipo de tareas que se asignan a los estudiantes y por el tipo de actividad matemática que se espera que ellos realicen al resolver las tareas. Desde esta perspectiva, resulta relevante presentar la definición que Resnick hace del *pensamiento de alto nivel* y el contraste que esta posición presenta con respecto a los criterios matemáticos tradicionales (1987, citado en Romberg, 1993). La tabla que se presenta a continuación describe estas dos alternativas.

Pensamiento de alto nivel	Esquemas tradicionales
<i>No - algorítmico.</i> El camino para la acción <i>no</i> se encuentra completamente especificado con anterioridad.	<i>Algorítmico.</i> El camino para la acción se encuentra completamente especificado con anterioridad.
<i>Complejo.</i> El camino total no es “visible” (hablando mentalmente) desde un único punto de vista.	<i>Caminos visibles.</i> Se utilizan ejemplos estándar con caminos visibles.

Tabla N° 2. Pensamiento de alto nivel y esquemas tradicionales

Pensamiento de alto nivel	Esquemas tradicionales
<i>Soluciones múltiples.</i> El pensamiento de alto nivel da lugar frecuentemente a soluciones múltiples, cada una con costos y beneficios.	<i>Solución única.</i> Hay una única solución posible.
<i>Criterios múltiples.</i> El pensamiento de alto nivel involucra la aplicación de múltiples criterios que, en ocasiones, entran en conflicto entre ellos.	<i>Criterios sencillos.</i> Se requiere la utilización de criterios sencillos que se encuentran bien definidos.
<i>Incertidumbre.</i> El pensamiento de alto nivel involucra frecuentemente la incertidumbre. No se conoce todo lo que se requiere para desarrollar la tarea.	<i>Certeza.</i> Se tiene certeza porque se ha dado toda la información que se requiere.
<i>Auto-regulación.</i> El pensamiento de alto nivel requiere la auto-regulación del proceso de pensamiento.	<i>Regulación externa.</i> En muchas ocasiones es un tercero quien determina lo que se debe hacer en cada momento.
<i>Asignación de significado.</i> El pensamiento de alto nivel requiere la asignación de significado, encontrando la estructura subyacente a un desorden aparente.	<i>Significado dado.</i> El significado está dado o se supone.
<i>Requiere esfuerzo.</i> El pensamiento de alto nivel requiere de esfuerzo. Se requiere gran cantidad de trabajo mental con el propósito de desarrollar las elaboraciones y los juicios involucrados.	<i>No requiere esfuerzo.</i> El trabajo normalmente involucra ejercicios estándar tan simplificados que requieren de muy poco esfuerzo.

Tabla N° 2. Pensamiento de alto nivel y esquemas tradicionales

Metodología

Con el propósito de explorar y caracterizar los cambios, si los hubo, en el diseño curricular del curso de precálculo de la Universidad de los Andes como consecuencia de la utilización de las calculadoras gráficas se analizaron diversos documentos relativos a este curso, tanto para el semestre anterior a la introducción de las calculadoras (primero de 1993), como para el primer semestre de 1995, tres semestres después de que éstas fueron introducidas. Para obtener información sobre el diseño curricular que existía antes de la introducción de las calculadoras se analizaron los documentos que describían el curso (“una empresa docente” y Departamento de Matemáticas, 1992), el libro de texto que se estaba utilizando (Echeverri et al., 1991) y algunos talleres y pruebas de evaluación. El diseño curricular producto de la introducción de las calculadoras gráficas se dedujo a partir de los documentos de trabajo del programa de investigación, de las actas de las reuniones que durante tres semestres se realizaron con motivo de este programa y de un libro de situaciones problemáticas que se produjo y se utiliza actualmente en el curso (Gómez y Mesa, 1995).

Las categorías que se utilizaron para la recolección y codificación de la información se basaron en el esquema conceptual que se acaba de presentar. Estas categorías se organizaron en dos grupos. En el primero se incluyen aquellas categorías que permiten describir y comparar las visiones de la institución educativa, antes y después de la introducción de la tecnología, con respecto a:

- ▲ El conocimiento matemático como saber cultural

- ▲ El conocimiento matemático como saber a enseñar
- ▲ La comprensión y el aprendizaje
- ▲ La enseñanza

En el segundo grupo se incluyen aquellas categorías que permiten describir el diseño curricular, en el nivel micro, producido después de la introducción de la tecnología. Estas categorías se refieren a:

- ▲ Los objetivos: el conocimiento y las habilidades que se espera que construyan los estudiantes y la visión que se espera que los estudiantes tengan de las matemáticas
- ▲ La metodología: el programa del curso, el papel del profesor y la utilización de situaciones problemáticas
- ▲ El contenido: secuenciación, profundidad y complejidad
- ▲ La evaluación: su papel, su relación con los otros elementos y las estrategias utilizadas

El diseño curricular que existía antes de la introducción de las calculadoras fue producto de un trabajo conjunto que, durante dos años, realizaron dos profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad y dos investigadores de “una empresa docente”. En el momento de la introducción de la tecnología, este diseño curricular se había “estabilizado”, el grupo de trabajo se había desactivado y no se estaban introduciendo nuevos cambios.

El diseño curricular producto de la introducción de la tecnología fue desarrollado por un grupo de cinco profesores - investigadores de “una empresa docente”. Durante cuatro semestres, y siguiendo las principales pautas de la investigación - acción (Kemmis y MacTaggart, 1988), este grupo se reunió semanalmente para discutir tanto los aspectos generales del proyecto, como aspectos particulares del diseño curricular que se estaba desarrollando. Con base en la puesta en práctica de las propuestas y en la discusión que resultaba de la experiencia, estas propuestas fueron modificadas a lo largo del proyecto.

La utilización de las calculadoras gráficas dentro y fuera del salón de clase estuvo caracterizada por tres etapas claramente diferenciadas en el tiempo. En la primera, de *introducción*, las calculadoras se utilizaron como un elemento complementario, pero independiente de los otros elementos del sistema curricular. Las actividades que, en esta etapa, involucraban la calculadora eran esencialmente de carácter operacional y buscaban que los estudiantes desarrollaran su capacidad para manejar la máquina. En la segunda etapa, de *adaptación*, que tuvo lugar un semestre más tarde, los estudiantes hicieron una utilización más intensa de la máquina, pero las actividades que la involucraban no tenían en cuenta todas las potencialidades y funcionalidades de la misma. Además, los estudiantes no podían utilizarla durante las evaluaciones. Finalmente, durante la tercera etapa, de *articulación*, los estudiantes tuvieron la tecnología a su disposición todo el tiempo, por fuera de clase y durante las evaluaciones. En esta etapa, que duró dos semestres, tuvo lugar una articulación entre la tecnología y el currículo que se manifestó en las características de las actividades que fueron propuestas a los estudiantes.

Es posible afirmar que fueron, como colectivos, dos instituciones diferentes las que diseñaron cada uno de los dos currículos objeto de este estudio. El primero fue diseñado dentro de un proceso de innovación al interior del Departamento de Matemáticas. El segundo surgió de otro colectivo, “una empresa docente”, que aparece en la actualidad como ideológicamente independiente del primero. Sin embargo, dos de los investigadores de “una empresa docente” que participaron en el segundo proyecto, también parti-

participaron en el primero. Por otra parte, cuando se introdujeron las calculadoras gráficas los profesores - investigadores de “una empresa docente” que trabajaron en este proyecto utilizaban y participaban del diseño curricular que existía en ese momento. Por estas razones, es posible hablar de cambios en las visiones de la institución (antes y después de la introducción de las calculadoras): quienes participaron en el proyecto, lo iniciaron compartiendo las visiones con base en las cuales se diseñó el primer currículo; dos años después se ofrece un nuevo currículo basado en unas visiones diferentes.

Resultados

Los resultados se presentan en dos partes. En la primera, se describen y comparan las visiones de la institución antes y después de la introducción de las calculadoras gráficas. En la segunda, se describen los elementos más relevantes y distintivos del diseño curricular que se produjo como consecuencia de la introducción de la tecnología.

Visiones institucionales (comparación)

Las tablas que se presentan a continuación describen de manera esquemática (explicadas más adelante) las visiones de la institución antes y después de la introducción de las calculadoras gráficas en el curso. Estas visiones se organizan en cuatro categorías: conocimiento como saber cultural, conocimiento como saber a enseñar, aprendizaje y enseñanza.

Conocimiento como saber cultural

Antes	Después
<ul style="list-style-type: none"> ▲ Se ven las matemáticas como cuerpo estructurado de conocimientos verdaderos 	<p>Se ven las matemáticas como:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▲ Conocimiento en evolución ▲ Abierto a la experimentación y a las conjeturas ▲ Construido socialmente ▲ Que sirve para el modelaje de situaciones reales

Conocimiento como saber a enseñar

Antes	Después
<ul style="list-style-type: none"> ▲ Se introduce el estudio de funciones ▲ Se enfatiza la representación gráfica ▲ Se hace énfasis en los aspectos algorítmicos ▲ Se utilizan las matemáticas en la resolución de ejercicios repetitivos de carácter simbólico ▲ No existe integración de los temas transversales (e.g., ecuaciones) al interior de los diversos temas longitudinales (e.g., cuadráticas y cúbicas) 	<ul style="list-style-type: none"> ▲ Se introduce una mayor complejidad de los objetos matemáticos, particularmente desde el punto de vista de sus múltiples representaciones ▲ Se integran los sistemas de representación y los tipos de conocimiento ▲ Se integran los temas transversales y longitudinales ▲ Se introduce el concepto de familia de funciones

Comprensión y aprendizaje

Antes	Después
<ul style="list-style-type: none"> ▲ Se espera el desarrollo de una capacidad para resolver <i>ejercicios</i> complejos y para demostrar afirmaciones formales ▲ Se espera el desarrollo de una visión de las <i>características</i> de los objetos, pero no de los objetos y de las matemáticas como conocimiento global ▲ Se enfatiza el aprendizaje individual 	<ul style="list-style-type: none"> ▲ Se espera el desarrollo de una capacidad para resolver <i>problemas</i> complejos: pensamiento de alto nivel ▲ Se espera el desarrollo de una visión de los objetos matemáticos como globalidad en sus múltiples dimensiones y de las matemáticas como conocimiento en evolución, con valor práctico, en el que se enfatizan la comunicación, la experimentación y la formulación y contrastación de conjeturas ▲ El aprendizaje se realiza dentro de un esquema de construcción social del conocimiento

Enseñanza

Antes	Después
<ul style="list-style-type: none"> ▲ El programa restringe la actuación del profesor ▲ Se busca la verificación de validez de soluciones a ejercicios ▲ Se hace un seguimiento estricto del libro de texto ▲ Se utiliza el esquema teoría • ejemplos • ejercicios ▲ Se introducen los talleres quincenales ▲ Se utiliza la evaluación exclusivamente como medio de clasificación de los estudiantes 	<ul style="list-style-type: none"> ▲ El nuevo programa le da mayor libertad al profesor y lo induce a asumir mayores responsabilidades ▲ Se utilizan situaciones problemáticas (que se resuelven en grupos) para las actividades en el salón de clase ▲ Se utiliza el libro de texto como referencia ▲ La evaluación también se utiliza como medio de comunicación entre el profesor y los estudiantes

Discusión

Se aprecian diferencias importantes en las visiones sobre las cuales se basan los diseños curriculares propuestos por el Departamento de Matemáticas y por “una empresa docente”, antes y después de la introducción de las calculadoras gráficas. Antes de la introducción de la tecnología, la primera institución percibe las matemáticas como un cuerpo estructurado de conocimientos y enfatiza su utilización para la resolución de ejercicios. Aunque se ha introducido el estudio de las funciones y la representación gráfica juega un papel importante en la presentación del conocimiento a enseñar, los diversos temas y aspectos de este conocimiento aparecen desconectados. Esta visión del conocimiento a enseñar tiene implicaciones en las visiones sobre el aprendizaje. Se espera que el estudiante sea capaz de resolver ejercicios (que enfatizan las características de los objetos matemáticos), construya su conocimiento de manera individual y desarrolle una visión de las matemáticas como un conocimiento verdadero a priori. Finalmente, las visiones anteriores determinan una posición particular con respecto a la enseñanza. El programa del curso (documento que determina la secuenciación de los

temas, el tiempo asignado a cada uno y los ejercicios y problemas que debe resolver el estudiante) define un espacio restringido de actuación del profesor en el que, a través de un seguimiento del libro de texto, se presenta y discute la teoría, y, a continuación, se resuelven ejemplos y ejercicios en los que se enfatiza la validez de las respuestas dadas a ellos. La evaluación tiene como principal propósito la clasificación de los estudiantes.

Después de la introducción de las calculadoras gráficas la visión de “una empresa docente” es diferente a la anterior. El conocimiento matemático se ve ahora como un conocimiento en evolución (y no como un conocimiento verdadero a priori), construido socialmente y abierto a la experimentación y a la formulación y contrastación de conjeturas. Los objetos matemáticos que hacen parte del conocimiento a enseñar se presentan y trabajan dentro de una mayor complejidad. Se busca integrar los sistemas de representación, los tipos de conocimiento, los temas transversales y los temas longitudinales alrededor del concepto de familia de funciones. Desde el punto de vista del aprendizaje, se espera que el estudiante construya socialmente un conocimiento matemático con aplicaciones prácticas, en el que sea posible percibir la globalidad de los objetos matemáticos dentro de sus múltiples dimensiones y que le permita resolver problemas complejos asociados con el pensamiento de alto nivel. La visión sobre la enseñanza también cambia de manera consecuente. El nuevo programa genera un espacio más amplio en el que el profesor debe asumir mayores responsabilidades en el manejo de esta libertad. La interacción entre el profesor y los estudiantes gira alrededor de la resolución de situaciones problemáticas. El libro de texto se utiliza como referencia y la evaluación se transforma en un medio de comunicación entre el profesor y los estudiantes a través del cual el profesor le hace saber a los estudiantes lo que él considera importante y los estudiantes informan al profesor acerca de sus dificultades.

Ejemplo

Con el propósito de mostrar aspectos de la práctica que reflejan parcialmente las ideas expuestas anteriormente, se presenta a continuación una muestra del tipo de tareas que fueron asignadas durante dos pruebas (exámenes parciales). La primera es uno de los puntos de un examen hecho antes de la introducción de las calculadoras gráficas. La segunda es la totalidad de un examen realizado después de la introducción de la tecnología.

Primera prueba

- Trace la gráfica de $y = 2|x - 3| - 1$ usando traslaciones y dilataciones. Muestre sus pasos claramente.
- Resuelva gráficamente la desigualdad $2|x - 3| - 1 < [x]$ (puede usar la gráfica de a.)
- Resuelva algebraicamente $|3x + 2| \geq 1$.

Segunda prueba

De la función f se sabe que:

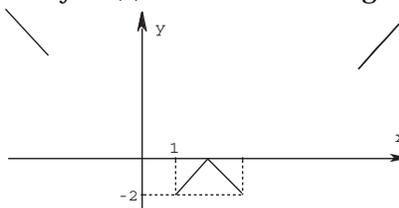
- Es de la forma $f(x) = ||a(x - b)| - c| - d$, con a, b, c y d reales
- Su expresión como función a trozos es de la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \text{si } x \leq 1 \\ \dots & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \dots & \text{si } 2 < x \leq e \\ a(x-4) & \text{si } e < x \end{cases}, \text{ siendo } e \text{ un número real.}$$

c. $f(3) = -2$

d. El conjunto solución de $f(x) < 2$ es $(-1,5)$

e. Una porción de la gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura:



Halle la función f . Para ello, usted debe:

1. Hacer la gráfica completa.
2. Hallar la expresión de f como función a trozos (forma b.).
3. Hallar la expresión simbólica de f en la forma a.
4. Verificar que la afirmación d. es verdadera.

Discusión

Un análisis detallado de estas dos pruebas y de su significado como expresión de los dos diseños curriculares sería demasiado extenso para este artículo. No obstante, vale la pena resaltar algunas de sus principales características teniendo en cuenta los elementos conceptuales que se presentaron anteriormente.

La primera prueba insinúa la existencia de procedimientos (de transformaciones sintácticas (Kaput, 1992)) que están bien establecidos en el curso (graficación por pasos con base en traslaciones y dilataciones, resolución gráfica y resolución simbólica de desigualdades). La prueba le da instrucciones al estudiante para que utilice estos procedimientos y solamente estos. Aparentemente, quien conozca los procedimientos, podrá realizar la tarea de manera algorítmica, con un camino visible, con la utilización de criterios sencillos, sin mucho esfuerzo y dentro de un marco en el que el significado está dado (criterios tradicionales de la descripción de Resnick). Se hace una distinción clara entre lo que se insinúa allí como método gráfico y método simbólico. Las tareas tienen entonces una única forma de realizarse. Las primeras dos tareas tienen una relación aparente (utilización de la primera gráfica en la resolución de la segunda desigualdad), pero son independientes entre sí.

La segunda prueba involucra la construcción de un objeto con base en información parcial proveniente de múltiples dimensiones en las cuales este objeto está involucrado. La tarea no tiene un única forma de ser resuelta y el camino para la acción no se encuentra completamente especificado con anterioridad. Aunque se busca determinar un único objeto, la tarea da lugar a soluciones múltiples en las que se pueden aplicar diversos cri-

terios dentro de un espacio en el que es necesario asignar significado a la información, buscando la estructura subyacente dentro de un desorden aparente. La tarea requiere una buena cantidad de trabajo mental para desarrollar las elaboraciones y los juicios involucrados (criterios del pensamiento de alto nivel). Tanto los diversos sistemas de representación (gráfico, simbólico, tabular), como los tipos de conocimiento (conceptual y procedimental) y las situaciones (desigualdades, representación como función a trozos y con valor absoluto) se encuentran imbricados en una sola problemática.

Diseño curricular después de la utilización de la tecnología

En esta sección se describen los elementos más distintivos a nivel micro del diseño curricular que existe en la actualidad, después de la introducción de las calculadoras gráficas. En cambio de hacer una comparación entre los dos diseños curriculares, se presentan aquí las características que diferencian al diseño curricular producto de la introducción de las calculadoras gráficas, del diseño curricular existente antes de la introducción de la tecnología.

Objetivos

El nuevo diseño curricular resalta algunos aspectos de las metas que se espera que el estudiante logre al final del curso. Se espera que el estudiante construya un conocimiento matemático que sea coherente y holístico en cuanto al reconocimiento de las características comunes de los objetos y las familias estudiados y su capacidad para transferir este conocimiento a otros contextos. Se espera que este conocimiento sea rico en conexiones, tanto desde el punto de vista de los sistemas de representación interna, como desde el punto de vista del status operacional y estructural de los conceptos matemáticos.

Por otra parte, se busca que el estudiante pueda desarrollar un pensamiento de alto nivel con el que se sienta cómodo al enfrentarse a situaciones desconocidas y con el que reconozca la importancia y la utilidad de la investigación en la construcción del conocimiento matemático.

Finalmente, se espera que el estudiante desarrolle una nueva visión de las matemáticas como un conocimiento, con utilidad práctica, compuesto de problemas y soluciones, que se construye socialmente y en el que son necesarias las capacidades de comunicación, discusión, experimentación y formulación y contrastación de conjeturas.

Metodología

El nuevo currículo introdujo un nuevo programa para el curso. Este programa reemplazó los ejercicios (principalmente repetitivos) por problemas complejos para los que los estudiantes no tienen necesariamente una estrategia de solución pre-establecida. El nuevo programa presenta una mayor flexibilidad al no imponer el tratamiento de contenidos día a día, sino a lo largo de periodos de varios días.

Los cambios en el programa y las instrucciones impartidas y compartidas por los profesores presentan una visión y actitud diferente hacia el papel que debe jugar el profesor en la construcción del conocimiento matemático del estudiante. El profesor tiene mayor libertad y responsabilidad para decidir acerca del diseño y realización de las actividades dentro del salón de clase. Estas actividades se centran ahora en la resolución de situaciones problemáticas que son enfrentadas en la mayoría de los casos por grupos de estudiantes y en las cuales el profesor participa como guía y facilitador de las discusiones entre los estudiantes.

El diseño y la utilización de estas nuevas situaciones problemáticas es una de las características que más resaltan en el nuevo diseño curricular. Estas situaciones problemáticas, que siguen los lineamientos del pensamiento de alto nivel, buscan que sean los estudiantes quienes construyan socialmente su conocimiento matemático dentro de un

contexto que simula la comunidad científica en la que se enfatiza la comunicación y la justificación.

Contenido

La secuenciación del contenido del conocimiento a enseñar no presenta diferencias importantes. Sin embargo, el análisis de las situaciones problemáticas utilizadas en el curso evidencia la búsqueda de una mayor profundidad en el tratamiento de los conceptos matemáticos y la intención de presentar este contenido de una manera coherente y conectada que resalte la relación entre los diferentes conceptos y procedimientos involucrados. Aunque se mantiene la misma secuenciación de temas, el programa del curso elimina la resolución de ejercicios e introduce la resolución de situaciones problemáticas como parte de las actividades matemáticas en el salón de clase. Los temas pre-requisito se tratan ahora al comienzo del curso, en cambio de considerarse a lo largo del mismo.

Evaluación

Como se comentará más adelante, la evaluación jugó un papel trascendental en los cambios que se produjeron en el diseño curricular. Por una parte, desde el momento en que los estudiantes pudieron utilizar las calculadoras gráficas en todas las pruebas se comenzó a producir un cambio en las visiones que los diseñadores del currículo tenían acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Por otra parte, la evaluación dejó de ser exclusivamente una herramienta para clasificar a los estudiantes y pasó también a asumir un papel de medio de comunicación entre el profesor y los estudiantes a través del cual el primero informa a los segundos acerca de la importancia relativa de algunos aspectos del curso y los estudiantes informan al profesor acerca de sus intereses y sus dificultades. Además de esquemas tradicionales como las tareas, quices y exámenes parciales, se introdujeron nuevos esquemas de trabajo como las situaciones problemáticas ya mencionadas, los proyectos de investigación, los ensayos escritos, los portafolios y las exposiciones orales.

Conclusiones

La utilización de las calculadoras gráficas tuvo un impacto en el currículo de precálculo en el que se realizó el estudio. Este impacto se expresó en dos dimensiones, relacionadas entre sí. La institución, en este caso el colectivo de profesores - investigadores que desarrollaron el proyecto, evidenciaron una evolución en sus visiones acerca de las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza. Este cambio de visiones se expresó explícitamente en el diseño curricular a nivel micro con motivo del diseño y puesta en práctica de situaciones problemáticas novedosas que siguen las pautas del pensamiento de alto nivel. La utilización de estas situaciones problemáticas es una consecuencia de una nueva posición curricular con respecto a los objetivos, el contenido, la metodología y la evaluación.

A continuación se describen las tres etapas —introducción, adaptación y articulación— que se evidenciaron en el proceso de utilización de las calculadoras gráficas y que tuvieron lugar secuencialmente a lo largo de los tres semestres del proyecto. Por otra parte, se sugieren algunas hipótesis acerca de la influencia de las calculadoras en el proceso de aprendizaje. Finalmente, se describe el papel de la evaluación y de la utilización de las calculadoras en ella como actor determinante en el proceso de cambio que tuvo lugar.

Calculadoras gráficas y currículo

Es evidente que la simple introducción de las calculadoras gráficas dentro de un curso no es condición suficiente para que se den cambios de fondo en la construcción del

conocimiento matemático del estudiante como producto de su interacción con el profesor y sus compañeros. En palabras de Kaput (1994): “Technology without curriculum is worth the silicon it is written on”¹. Sin embargo, la experiencia que se vivió en este proyecto muestra que la relación entre las calculadoras y el currículo es una relación dinámica y compleja, que en este caso, se puede caracterizar por tres etapas claramente diferenciadas en el tiempo.

En una primera etapa se realizó una “introducción” de las calculadoras en el diseño curricular. Las calculadoras se utilizaron como un elemento complementario, pero independiente de los otros elementos del sistema curricular. Las actividades que, en esta etapa, involucraban la calculadora eran esencialmente de carácter operacional y buscaban que los estudiantes desarrollaran su capacidad para manejar la máquina.

En la segunda etapa, se buscó “adaptar” las calculadoras gráficas al diseño curricular existente. Esto implicó una utilización de la tecnología más intensa por parte de los alumnos, aunque ellos no tenían acceso a ella por fuera del salón de clase. Sin embargo, aunque en esta etapa se buscó que los alumnos utilizaran la calculadora para la resolución de las tareas que se le proponían, el diseño de estas actividades no tenía en cuenta todas las potencialidades y funcionalidades de la calculadora. Además los estudiantes no tenían la posibilidad de utilizar las máquinas durante las pruebas de evaluación.

En la tercera etapa se evidencia una “articulación” entre el diseño curricular y la presencia de las calculadoras. En este momento, los estudiantes tenían la tecnología a su disposición todo el tiempo, inclusive en su casa, y podían utilizar las calculadoras en todas las pruebas de evaluación. Esta situación generó el cambio en las visiones de la institución que se describieron con anterioridad y que produjeron un nuevo diseño curricular en el que objetivos, metodología, contenido y evaluación tienen en cuenta las potencialidades de la tecnología.

Calculadoras y aprendizaje

Una misma tarea matemática puede ser realizada de diversas formas: estrategias diferentes producen caminos diferentes para el desarrollo de una solución. La experiencia que se ha vivido en el proyecto hace evidente que un estudiante que puede utilizar la nueva tecnología tiene a su disposición un abanico más amplio de estrategias de aproximación y solución a las tareas que se le proponen. La calculadora favorece y potencia de manera específica algunas de estas estrategias y las actividades matemáticas producto de ellas.

Por una parte, la calculadora ofrece al estudiante un medio y un sistema de representación adicional a los que ya tiene a su disposición. Al poner rápida y “automáticamente” a disposición del estudiante la representación gráfica de los objetos matemáticos que se encuentran involucrados en la tarea a realizar, la calculadora gráfica influye en el tipo de estrategias que él puede seguir para realizar la tarea. El estudiante tiene a su disposición el tiempo de trabajo que habría utilizado produciendo la gráfica por otros medios. El estudiante “ve” el problema, en el sentido de que la solución a éste deja de ser exclusivamente una situación en la que es necesario efectuar una sucesión de procedimientos que transforman unas expresiones simbólicas en otras. Cuando se efectúan manipulaciones simbólicas, éstas tienen sentido, al menos en cuanto a su relación con la representación gráfica. El estudiante puede y tiende a experimentar y a formular conjeturas, dado que la calculadora le permite rápidamente conocer los resultados de estos experimentos (“¿cómo es la gráfica de ...?”) y contrastar estas conjeturas (“¿qué pasa si...?”). El estudiante tiende, de manera natural, a verificar el resultado de su trabajo; a identificar cuándo el resultado no es válido; a reconocer que ha cometido errores; a buscar e identificar estos errores; a reconocer las causas que los produjeron; y a corregirlas. Finalmente, las

1. La tecnología sin currículo tiene el valor de la arena (silicón) en la que ella está escrita.

características físicas (e.g., tamaño) de este nuevo medio de trabajo matemático inducen al estudiante a compartir y justificar sus realizaciones, a criticar el trabajo de sus compañeros y, en general, a generar un espacio más fértil de interacción social.

Calculadoras y evaluación

La posibilidad de utilizar las calculadoras gráficas en las pruebas de evaluación representó un momento clave del proyecto desde el punto de vista del diseño y el desarrollo curricular. Solamente cuando se introdujo este nuevo aspecto metodológico, se produjeron cambios importantes en el funcionamiento del sistema curricular. La utilización de la tecnología en las evaluaciones impone nuevas condiciones sobre el conocimiento a enseñar, los objetivos, la metodología y la evaluación que no se dan de manera tan explícita e intensa cuando la tecnología está presente, pero los estudiantes no la pueden utilizar en las pruebas.

Dadas las posibilidades que la calculadora ofrece al estudiante desde el punto de vista de las estrategias que él puede utilizar para realizar una tarea, los diseñadores del currículo y el profesor tienden a diseñar y utilizar tareas más adaptadas a estas circunstancias. Las tareas de naturaleza algorítmica, de carácter puramente simbólico en las que se conoce con anterioridad el procedimiento para obtener una única respuesta, pierden sentido, al menos desde el punto de vista del profesor. Se hace necesario que las nuevas tareas profundicen en el conocimiento a enseñar (complejidad de los objetos y los procesos matemáticos involucrados) y tengan en cuenta y potencien la multiplicidad de estrategias que el estudiante tiene ahora a su disposición.

Estas nuevas condiciones sobre el sistema curricular indujeron a los diseñadores del currículo a cuestionar sus visiones acerca de las matemáticas, su aprendizaje, su enseñanza y el papel de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los cambios en el diseño curricular son producto de este cuestionamiento y de la evolución en esas visiones.

Referencias bibliográficas

- Dossey, J.A. (1992). *The Nature of Mathematics: its Role and its Influence*. En Grouws, D.A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Echeverri, H., et al. (1991). *Precálculo*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Ernest, P. (1985). The philosophy of mathematics and mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 16, pp. 603-612.
- Gómez, P., Mesa, V.M. (1995). *Situaciones problemáticas de precálculo*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Hiebert, J., Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En Grouws, D.A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J.J. (1994). *Conferencia presentada en la reunión anual del NCTM*. Indianapolis: NCTM.

- Kaput, J.J. (1992). Technology and Mathematics Education. En Grouws, D.A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 515-556.
- Kemmis, S., McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación - acción*. Barcelona: Laertes.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En Grouws, D.A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- Resnick, L.B. (1987). *Education and learning to think*. Washington, DC: National Academy.
- Rico, L. (1991). *Los tetraedros del currículo. Diseño, desarrollo y evaluación del currículo*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.
- Romberg, T.A. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación*. 294, pp. 323-406.
- Romberg, T.A. (1993). How one comes to know: Models and theories of the learning of mathematics. En Niss, M. *Investigations into assessment in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws, D.A. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, pp. 334-369.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, pp. 1-36.
- “una empresa docente” y Departamento de Matemáticas (1992). *Proyecto PreCálculo. Descripción del proyecto*. Documento no publicado. Bogotá: una empresa docente. Universidad de los Andes.