Competencias, matemáticas y resolución de problemas

J.A. Rupérez Padrón y M. García Déniz
-Club Matemático-

La nueva Ley de Educación expresa con claridad que "el currículo que en ella se presenta opta por una enseñanza y aprendizaje de las matemáticas basados en el desarrollo de **competencias**", y presenta un listado de las mismas:

saber **argumentar**,

saber **cuantificar**,

saber **analizar** críticamente la información,

saber **representar** y **comunicar**,

saber **resolver** y enfrentarse a problemas,

saber **usar técnicas** e instrumentos matemáticos,

saber **modelizar**,

saber **integrar** los conocimientos adquiridos.

Y, además, indica con claridad que "**La resolución de problemas es el mejor camino para desarrollar estas competencias ya que es capaz de activar las capacidades básicas del individuo, como son**
leer comprensivamente,
reflexionar,
establecer un plan de trabajo,
revisarlo,
adaptarlo,
generar hipótesis,
verificar el ámbito de validez de las soluciones, etc.

Y, a su vez, posibilita
experimentar,
particularizar,
conjeturar,
elegir un lenguaje apropiado,
probar una conjetura,
generalizar,
utilizar distintas partes de las matemáticas,
verificar una solución, etc."

Y nos presenta este taxativo mensaje:

> Centrar la actividad matemática en la resolución de problemas es una buena forma de convencer al alumnado de la importancia de pensar en lo que hace y en cómo lo hace.

Pero, ¿cómo funciona todo esto en la resolución de un problema? ¿En qué momento sale cada una de estas competencias? ¿Cómo se identifican? ¿Qué debe hacer un profesor para garantizar que aparezcan y sean bien trabajadas? ¿Qué…? ¿Cómo…? ¿Cuándo…?

Veamos un ejemplo. Vamos a trabajar el siguiente problema tratando de descubrir cómo aparecen las competencias durante el proceso de su resolución.

CENA DE GALA

El restaurante “El glotón” debe preparar la sala para la Cena de Gala de los 122 participantes a un congreso. El restaurador tiene a su disposición 12 mesas de 8 personas y 12 mesas de 6 personas. Los organizadores del congreso han pedido prepararlas de manera que en las mesas utilizadas no queden puestos vacíos.
¿Cuántas mesas de cada tipo pueden ser preparadas para satisfacer la petición de los organizadores?
Indicad vuestras soluciones y explicad cómo las habéis hallado.

En primer lugar, es necesario tener un plan de trabajo para resolver el problema. Dicho plan se estructura en cuatro fases: comprender el problema, buscar una manera de pensar que ayude a resolverlo, ejecutar ese modo de pensar y responder a las preguntas del problema.

En ese plan se contempla **trabajar en equipo**, agrupando a los alumnos de diferentes maneras según la fase en que nos encontremos. En las fases de comprender el problema y responder a las preguntas se debe trabajar en gran grupo (grupo clase) para conseguir una mayor **participación** de los alumnos y favorecer así un **aprendizaje cooperativo**; en las fases de buscar una manera de pensar y de ejecutarla, es conveniente trabajar en pequeño grupo (cuatro o cinco por clase) para propiciar la posibilidad de que cada equipo elija estrategias diferentes y que en la ejecución se puedan poner en juego distintas herramientas lógicas y conocimientos que se correspondan con las diferentes formas de pensar.

Una vez establecido este procedimiento, el profesor da inicio a la primera fase del plan:

I) COMPRENDER
En esta primera fase debemos buscar la información que nos pueda dar el problema, analizarla críticamente, clasificarla, completarla con las informaciones que nos da nuestro propio conocimiento y nuestra experiencia acerca del contexto de la situación problemática.
Mediante la lectura buscaremos la información, la cuantificaremos, la describiremos y la clasificaremos en:

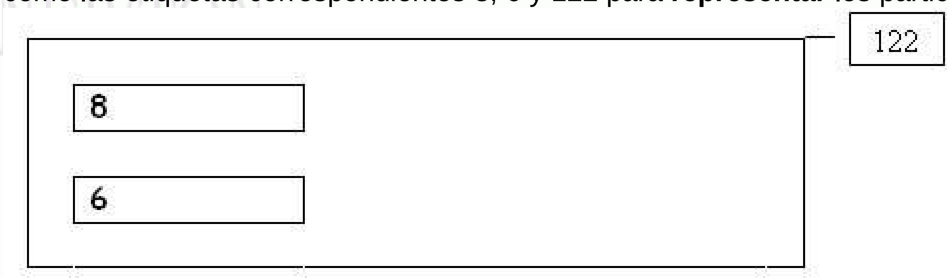
<u>Datos</u> 122 participantes; 12 mesas de 8 personas; 12 mesas de 6 personas.

<u>Objetivo</u> Cuántas mesas de cada tipo deben ser preparadas.

<u>Relación</u> En las mesas utilizadas no pueden quedar puestos vacíos.
Con mesas de una sola clase es imposible cumplir la condición. Podemos utilizar el conocimiento de que 122 no es divisible ni por 8 ni por 6. Por lo tanto, es necesario utilizar mesas de 8 y mesas de 6, simultáneamente.

El alumno no debe limitarse en ningún caso a dar los datos de manera escueta, sino que deberá justificar dónde lo ha encontrado, por qué sabe qué tipo de dato es y cómo ha profundizado en su conocimiento, argumentando de manera conveniente. El profesor ha de cuidar que todo ello se produzca.
A veces es necesario **explorar** o **experimentar** con los datos del problema, haciendo pequeñas **investigaciones** o **particularizando** a partir de los datos, unas veces para encontrar la relación (no siempre clara) y, otras, para comprender mejor la situación en el contexto.
Ahora debemos buscar una representación adecuada para condensar lo comprendido de la manera más matemática posible. Para ello podemos utilizar herramientas lógicas como: dibujos, gráficos, diagramas, gráficas, modelos, etc.

<u>Diagrama</u> Podríamos utilizar 12 **diagramas** cerrados divididos en 8 partes iguales y otros 12 divididos en 6 partes, así como las etiquetas correspondientes 8, 6 y 122 para **representar** los participantes.



<u>Modelo</u> El diagrama puede convertirse en un **modelo** utilizando cajas o tarjetas divididas en secciones más 122 objetos (piedras, boliches, garbanzos, …) que representen a los participantes. Este modelo puede ayudar a comprender y también ser elemento de resolución.

II) PENSAR
Hay nueve maneras de pensar (estrategias o técnicas de pensamiento); tres son de uso general: modelización, ensayo y error, organización de la información; otras cuatro de uso particular: eliminar, ir hacia atrás, buscar patrones, generalización; y otras dos auxiliares: analogía, simplificación.
Se trata, pues, de elegir las más convenientes para conseguir el objetivo a través de la comprensión que hemos obtenido en el paso anterior.

La modelización es una primera opción inmediata. Se ajusta al hecho de que podemos construir un modelo de la situación que podremos manipular más tarde para resolverla.
También podremos realizar un ensayo y error, basado en ir probando diferentes posibilidades para combinar las mesas de los dos tipos (combinatoria) hasta encontrar una distribución que se ajuste a las condiciones.
Parece evidente que cuando utilicemos la modelización habrá que hacer ensayo y error al ejecutar dicha estrategia.
Pero también podremos organizar la información utilizando lenguajes matemáticos diferentes: operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) o lenguaje algebraico (planteamiento de ecuaciones).

III) EJECUTAR
La ejecución va a depender de la estrategia elegida. Los conocimientos matemáticos puestos en juego irán en consonancia a las exigencias del modo de pensar seleccionado.
Si ha elegido modelización deberá proceder de la siguiente manera:
1. Tomará los 122 objetos y los irá distribuyendo de 8 en 8 o de 6 en 6 sobre las cajas o tarjetas según las etiquetas de las mismas.
2. Cuando los haya repartido todos, comprobará si hay una caja o tarjeta que no esté totalmente llena.
3. Tratará de jugar con los últimos objetos cambiándolos de caja o tarjeta hasta ajustar y queden todos los objetos distribuidos en cajas o tarjetas totalmente llenas.
4. Contabilizando las cajas o tarjetas tendrá una **solución** al problema.

Si ha elegido ensayo y error sin sistematizar deberá proceder de la siguiente manera:
1. Proceder entonces por ensayos organizados (**hipótesis**); por ejemplo, considerar que 12 x 8 = 96 y que, por consiguiente, utilizando todas las mesas de 8 plazas, faltarían aún 26 plazas para las cuales 4 mesas de 6 plazas no serían suficientes y una quinta mesa de 6 plazas no sería utilizada completamente.
2. Disminuir entonces el número de mesas de 8 plazas y darse cuenta (**verificar**) que con 10 mesas de 8 plazas y 7 mesas de 6 plazas se consigue instalar la sala según la pregunta.
3. Después de haber hallado una primera solución, es necesario pensar que podría haber otras. Este paso no es fácil que se dé. La búsqueda anterior agota y se dan por satisfechos con una solución.

Si ha elegido ensayo y error procediendo de manera **sistemática** deberá añadir la organización mediante el lenguaje aritmético y proceder de la siguiente manera:
1. Como comprende que ha de realizar muchos cálculos del tipo: productos por 8 y por 6 que den como suma 122, se da cuenta que debe ser sistemático y utiliza una **tabla de doble entrada** como **herramienta lógica** para organizar los distintos cálculos.
2. Diseñar la tabla con las columnas adecuadas para cada concepto y las filas necesarias para los distintos ensayos realizados.
3. Construir y rellenar una tabla del tipo:

Mesas de 8	Personas colocadas	Personas por colocar	Mesas de 6	Personas sobrantes
12	12 x 8 = 96	122 – 96 = 26	26 : 6 = 4	26 – 4 x 6 = 2 Error
11	11 x 8 = 88	122 – 88 = 34	34 : 6 = 5	34 – 5 x 6 = 4 Error
10	10 x 8 = 80	122 – 80 = 42	42 : 6 = 7	42 – 7 x 6 = 0 Correcto
9	9 x 8 = 72	122 – 72 = 50	50 : 6 = 8	50 – 8 x 6 = 2 Error
8	8 x 8 = 64	122 – 64 = 58	58 : 6 = 9	58 – 9 x 6 = 4 Error
7	7 x 8 = 56	122 – 56 = 66	66 : 6 = 11	66 – 11 x 6 = 0 Correcto
6	6 x 8 = 48	122 – 48 = 74	74 : 6 = 12	74 – 12 x 6 = 2 Error
5	5 x 8 = 40	122 – 40 = 82	82: 6 = 13	82 – 13 x 6 = 4 Error
4	4 x 8 = 32	122 – 32 = 90	90 : 6 = 15	90 – 15 x 6 = 0 Correcto

4. Seguir la búsqueda, por ejemplo disminuyendo el número de mesas de 8 y aumentando el de mesas de 6. Se obtienen tres posibilidades: 10 mesas de 8 plazas y 7 mesas de 6 plazas, 7 mesas de 8 plazas y 11 mesas de 6 plazas, o 4 mesas de 8 plazas y 15 mesas de 6 plazas. Alguno puede que incluso llegue a obtener 1 mesa de 8 plazas y 19 mesas de 6 plazas.

Si ha elegido organización mediante el uso del lenguaje aritmético deberá proceder de la siguiente manera:
1. Contar el número total de plazas disponibles (12x8 + 12x6 = 148) y darse cuenta que es necesario eliminar 46 plazas (148-122) por «mesas completas».
2. Hacer esto eliminando 5 mesas de 8 personas y 1 de 6 plazas (8x5+1x6=46) o 5 mesas de 6 plazas y 2 de 8 plazas (6x5+8x2=46).
3. Por tanto concluir que en el primer caso hay 7 mesas de 8 plazas (12-5) y 11 de 6 plazas (12-1), en el segundo caso 10 mesas de 8 plazas (12-2) y 7 mesas de 6 plazas (12-5).

Si ha elegido organización mediante el uso del lenguaje algebraico deberá proceder de la siguiente manera:
1. Elegirá las etiquetas x e y para representar, respectivamente, las cantidades desconocidas de mesas de 8 y 6 plazas.
2. Escribirá la relación que exige completar la etiqueta de 122 comensales al sumar las cantidades sentadas en los dos tipos de mesas. Lo cual dará lugar a la siguiente ecuación diofántica: $8x + 6y = 122$.
3. Utilizará sus conocimientos de este tipo de ecuaciones para encontrar las soluciones ya apuntadas.

Ya vemos como este paso debe acabar con la consecución de la solución o soluciones o, también, la imposibilidad de encontrar una **solución**.

Si no se encuentra solución pero se considera posible, habrá que considerar la **revisión del plan**, encontrar el origen del error y **adaptar el plan** buscando otras estrategias que propicien un nuevo camino de resolución.

IV) RESPONDER
Para transformar las soluciones en respuestas nos queda por hacer, en este último paso del proceso y por parte de los alumnos exponiendo ante sus compañeros, comunicando las conclusiones del trabajo, dos aspectos fundamentales:
Comprobar Hacer la verificación mediante las multiplicaciones y sumas adecuadas con los tipos de mesas de la solución y comprobar en cada caso que da 122 como total
10 mesas de 8 plazas + 7 mesas de 6 plazas = 80 + 42 = 122
7 mesas de 8 plazas + 11 mesas de 6 plazas = 56 + 66 = 122
4 mesas de 8 plazas + 15 mesas de 6 plazas = 32 + 90 = 122
1 mesa de 8 plazas + 19 mesas de 6 plazas = 8 + 114 = 122
Todas ellas verificadas y matemáticamente correctas.

Analizar cada solución en su contexto Mediante la **reflexión** sobre las condiciones del problema, se ve que sólo las dos primeras de estas combinaciones es aceptable, porque no hay más que 12 mesas de 6 plazas y en los otros dos casos se necesitarían 15 o 19, respectivamente.

Concluir, pues, que hay dos maneras posibles de preparar las mesas:
a) 10 mesas de 8 plazas y 7 mesas de 6 plazas, o
b) 7 mesas de 8 plazas y 11 mesas de 6 plazas.

RESPUESTA: **10 mesas de 8 y 7 de 6**; **7 mesas de 8 y 11 de 6**, acompañada de su correspondiente explicación.

Procediendo de esta manera ante cualquier situación problemática presentada, el alumno adquiere soltura y seguridad para **enfrentarse** a cualquier problema real o realista, integrando todos los conocimientos, procesos y actitudes (competencias) adquiridos en su quehacer diario.
Este problema que hemos utilizado como ejemplo se ha tomado de la 15ª edición del Rally Matemático Transalpino.
Hemos destacado en color azul todos los elementos que el alumno ha de aportar en las distintas fases del proceso de resolución.

¿Y qué representan?
Pues las competencias o los elementos de las mismas que deben aparecer para que puedan desarrollarse de una manera natural con su uso frecuente y siguiendo un plan previamente establecido por el profesor. El profesor que sabe, porque así lo ha planificado, todas las competencias (**saber**, **saber hacer** y **saber estar**) que deben ponerse en juego velará porque así suceda, y estará pendiente, si no aparecen o tardan en aparecer, para guiar la acción y, en consecuencia, se produzca lo deseado.

El profesor es, pues, el director del proceso y su animador, interviniendo en los momentos justos para encarrilar la resolución cuando se ha producido un estancamiento, pero dejando siempre que sea el alumno el que aporte las ideas y su concreción posterior. Incluso de las ideas erróneas puede salir un aprendizaje muy fructífero, siempre y cuando se sea lo suficientemente flexible para esperar que los alumnos encuentren los fallos, los analicen, busquen alternativas y reinicien el proceso de resolución.

Ahora es el momento de reconsiderar lo indicado por la Ley de Educación y ver si lo que hemos visto al resolver este problema como ejemplo se ajusta a lo deseable.

¿Pero qué es una COMPETENCIA MATEMÁTICA?

“Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral”.

Esta definición incluye: habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, el conocimiento y manejo de los conocimientos matemáticos básicos, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones. Habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos. Disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento (1ª FASE: COMPRENDER).

Utilizar los elementos y razonamientos matemáticos para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella (2ª FASE: PENSAR).

Saber aplicar las estrategias seguidas para resolver un problema a otras situaciones similares, adoptando las medidas necesarias y adecuadas para solventar las diferencias (3ª FASE: EJECUTAR).

Verificar las soluciones, situarlas en el contexto de la situación problemática inicial, utilizar todos los medios de representación disponibles para comunicar las respuestas obtenidas y poder, si así se cree conveniente, generalizarlas o particularizarlas para cualquier situación real relacionada con el problema resuelto (4ª FASE: RESPONDER).

No sería malo recordar lo que sabíamos con anterioridad acerca de procedimientos, actitudes, valores y normas, con el fin de complementar la parte menos evidente de los listados recompetencias. No olvidemos que toda competencia conlleva un SABER, un SABER HACER y un SABER ESTAR. Si miramos en cualquier catálogo de este tipo (puede servirnos cualquiera de los relacionados con la LOGSE) veremos los siguientes:
Interpretación y utilización de distintos lenguajes: numérico, gráfico, estadístico…
Clasificar, ordenar.
Formular conjeturas: búsqueda de regularidades y relaciones.
Método inductivo.
Utilización de algoritmos.
Resolución de problemas.
Elaboración y utilización en diferentes contextos de estrategias personales.
Reconocer y valorar las formas del lenguaje.
Actitud interrogante y de investigación ante cualquier situación, problema o información.
Valoración de diferentes recursos para resolver diferentes situaciones problemáticas.
Planificación del trabajo.
Flexibilidad.
Interés y respeto ante distintos puntos de vista.
Gusto por la precisión, orden y claridad.
Tenacidad y perseverancia.
Sensibilidad y gusto por la realización sistemática y cuidadosa de todo tipo de trabajos.
Sensibilidad y gusto por la precisión.
Confianza en sus propias capacidades matemáticas.
Sentido crítico.
Esfuerzo en las tareas.
Interés por abordar situaciones problemáticas.
Participación en actividades de grupo.
Buena relación con los demás.
Responsabilidad en las tareas asignadas.
Respeto y valoración de las opiniones de los demás.
Compartir y aportar ideas para el trabajo.
Transmitir la información a los demás de forma ordenada e inteligible.
Pedir ayuda.
Respeto en el trato a los demás.
Ser ordenado en el trabajo.
Actuar de acuerdo con las normas.
Ayudar a los compañeros.
Mantener la atención.
Sentido crítico.
Expresar opiniones.
Fundamentar las opiniones de forma coherente.
Mostrar creatividad.
Mostrar autonomía.

Es un buen listado, pero, como es natural, desordenado e incompleto. Esto nos puede dar una idea de todo lo que hay que poner en marcha y cómo sólo es posible si utilizamos una vía adecuada. Con el proceso que hemos explicado a lo largo de la ejemplificación utilizada se puede apreciar cómo todo esto fluye de una manera natural en la resolución de problemas. Y no parece imposible conseguirlo. De hecho, así se está trabajando en muchos Centros de Primaria

(Proyecto de Enseñanza Activa de las Matemáticas) y también de Secundaria.
Hay que seguir enseñando conocimientos, usando ejemplificaciones, ejercitando a los alumnos en los procesos y técnicas de trabajo, pero también es necesario dedicar tiempo, al menos una vez en semana, a la resolución de problemas como camino recomendado por la propia Ley para desarrollar con equidad TODAS las competencias que se han señalado para TODOS los alumnos de nuestros Centros educativos.

Y será una gran felicidad. Felices nuestros alumnos y felices nosotros porque ellos lo son. Y la matemática dejará de estar en la cola en el aprecio de nuestros alumnos y de la sociedad que ellos, finalmente, protagonizarán.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**

El **Club Matemático** está formado por los profesores
José Antonio Rupérez Padrón, del **IES de Canarias-Cabrera Pinto** (La Laguna), y
Manuel García Déniz, del **IES Tomás de Iriarte** (Santa Cruz de Tenerife).
mgarden@gobiernodecanarias.org / jruppad@gobiernodecanarias.org