Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática

Julio Cesar Barreto Garcia
Universidad Nacional Abierta. Centro Local Yaracuy. Área de Matemática.
Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". Departamento de Matemáticas.
juliocbarretog@hotmail.com

Resumen

Las deducciones que a lo largo de la historia se han realizado en torno al Teorema de Pitágoras pueden ayudar en el proceso de enseñanza-aprendizaje que realmente necesitan nuestros estudiantes, con el fin de que comprendan los conceptos a través de la reconstrucción de un método, de tal manera que no mecanicen reglas sino mas bien se logre aumentar y relacionar los conceptos adquiridos previamente de tal manera que se logre una mejor comprensión. Usaremos el enfoque histórico como una propuesta metodológica que actué como motivación para el alumno, ya que por medio de ella el estudiante descubrirá como generar los conceptos a través de métodos que aprenderá en clase. Discutiremos los conceptos y propiedades fundamentales de magnitudes, tales como la longitud y el área de figuras geométricas dadas en una y dos dimensiones, repasaremos los conceptos del producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades desde el punto de vista geométrico lo cual nos ayudara a inducir la demostración del Teorema de Pitágoras a través de triángulos rectángulos notables e isósceles rectángulos, tomando en consideración el área de los cuadrados que se encuentra en los lados de dichos triángulos. Esto nos ayudara a recalcar la generalización del Teorema de Pitágoras a través de figuras regulares. Las deducciones se harán pasando de la rama de la matemática llamada Algebra, conjugándola o dándole soporte con otra que muestra la forma estructural, como lo es la Geometría.

Palabras clave: Magnitud, Longitud, Área, Producto Notable, Teorema de Pitágoras.

Introducción

El desarrollo de los *procesos cognitivos* en el campo de la *Didáctica de la Matemática* es capaz de ayudar a nuestros estudiantes en la resolución de problemas de geometría, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por Duval (1998) y desarrollados por Torregrosa, G. y Quesada, H (2007) en la ultima referencia, en donde el *proceso cognitivo* de *visualización* está íntimamente relacionado con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente.
La coordinación de estos procesos cognitivos les permitirá *construir* una teoría para *deducir* el Teorema de Pitágoras desde una acepción geométrica, tomando en consideración los cuadrados que se coloquen sobre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera, tomando en consideración la idea de área, esto es, si A y B son las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y C es el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa, entonces se debe cumplir que $A+B=C$.

Relevancia Del Trabajo Para La Educación Matemática

En la *Historia de la Matemática*, se le atribuye a Bhaskara una demostración del Teorema de Pitágoras en el siglo XII en donde asocio la formula $a^2+b^2=c^2$ con el área de los cuadrados que estaban sobre los lados de un triángulo rectángulo (a y b sobre las longitudes de los catetos y c sobre la longitud de la hipotenusa) y operando con los cuadrados que estaban sobre las longitudes de los catetos logro formar el cuadrado que esta sobre la longitud de la hipotenusa.
Esta nueva forma de *deducir* el Teorema de Pitágoras, diferente a la de Bhaskara, permitirá a nuestros estudiantes divertirse operando con figuras geométricas junto a sus compañeros fomentando la unión grupal y les servirá para ir conociendo un poco lo que en matemática significa el concepto de *deducción*, pasando por *procesos inductivos* que pueden general una desconfianza acerca del Teorema de Pitágoras, tomando en consideración que el método usado en triángulos rectángulos notables no es el mismo para triángulos rectángulos isósceles (triángulos isorrectángulos), lo cual de una manera geométrica puede crear una confusión visual en nuestros estudiantes, los cuales les hará pensar que los Teoremas matemáticos algunas veces fallan.

Marco Teórico Y Calidad Bibliográfica

El campo de la *Didáctica de la Matemática* ha tomado un auge en los últimos años, debido al estudio que ella ha realizado en relación a los *procesos cognitivos* que deben desarrollar nuestros estudiantes al resolver los problemas de geometría en los cuales estén envueltos.
En este articulo usaremos el modelo propuesto por Duval, en el cual se restringe un poco el concepto de *visualización* al de *aprehensión* en el cual "Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar" según el Diccionario de la Real Academia Española (2001). En estas *aprehensiones*, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante ve intuitivamente el Teorema de Pitágoras y la cual es llamada *aprehensión perceptiva* e iremos hacia una que conlleva a modificar la configuración inicial y es llamada *aprehensión operativa*, esto nos llevara a un *razonamiento configural*

de un *anclaje visual* (ver los cuadrados) a un *anclaje discursivo* (Teórico: Usar los productos notables).

Metodología Y Resultados

Se trata de un estudio del Teorema de Pitágoras visto desde una acepción geométrica realizado en diversos eventos de *Educación Matemática* tanto nacionales como internacionales donde participaron diferentes estudiantes y profesores en esta área. Se diagnostico mediante una serie de actividades en torno a la *deducción* que se ha realizado en torno a este Teorema tan importante para la matemática en general, los cuales parten de nociones de *áreas de figuras geométricas elementales* y sus propiedades, el estudio de los *productos notables de la suma y de la diferencia del cuadrado de dos cantidades* desde un punto de vista geométrico para luego usarlas en la *intuición* del Teorema de Pitágoras en triángulos rectángulos notables y triángulos isorrectángulos hasta llegar a una demostración geométrica.
El estudio se inicio con una ponencia en Trujillo (IV Congreso Internacional Trujillano de Educación en Matemática y Física) y continúo con diferentes talleres en Barquisimeto (VIII Jornada Centroccidental de Educación Matemática), Maracaibo (XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), Maracay (VI Congreso Venezolano de Educación Matemática) y Brasil (IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática). En los cuales se obtuvieron los siguientes resultados:

	S	P	N
Los conceptos como: congruencia, semejanza, simetría, traslación son útiles para entender las nociones de área	75%		25%
El trinomio cuadrado perfecto es útil en el Teorema de Pitágoras	100%		
Los triángulos rectángulos notables son útiles en la explicación del Teorema de Pitágoras	65%	35%	
Los triángulos isorrectángulos son útiles en la explicación del Teorema de Pitágoras	50%	50%	

Tabla 1: Porcentaje tomados de un instructivo de las respuestas obtenidas en las Actividades de acuerdo a varios eventos. Donde abreviamos de la siguiente forma Suficiente (S), Poco (P), Nada (N).

Inducción del Teorema de Pitágoras

"La diagonal de un rectángulo produce, por si sola, lo que los lados del rectángulo producen en conjunto".

Hindú Apastamba.

Vamos a ver los siguientes *procesos de inferencia inductiva*[2] para tratar de encontrar una forma de demostrar el Teorema de Pitágoras, apelando a los *procesos cognoscitivos*[3] que intervienen en la *resolución de un problema*[4].

El área de una región se define a veces como el número de cuadrados de longitud unidad que caben en la región, por eso nuestra primera *inducción* viene dado por triángulos rectángulos notables.

Cuando el triángulo rectángulo es notable

Tomemos sin pérdida de generalidad un triángulo rectángulo cuyos lados miden $a = 4 \text{ unidades}$, $b = 3 \text{ unidades}$ y $c = 5 \text{ unidades}$ de magnitud, según la **Figura 1** de abajo y a la izquierda:

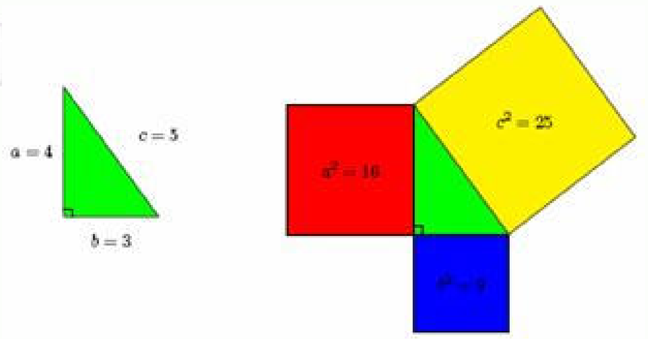

Figura 1: A la izquierda se muestra un triángulo rectángulo notable de longitudes 3, 4 unidades en los catetos y 5 unidades en la hipotenusa. A la derecha tenemos el mismo triángulo rectángulo notable con unos cuadrados *construidos* sobre sus lados.

Dibujemos ahora en cada lado del triangulo rectángulo unos cuadrados de igual tamaño de lado, esto es, tres cuadrados de 3, 4 y 5 unidades de lado, veamos la **Figura 1** de arriba y a la derecha. Luego, si dividimos cada cuadrado en tantos cuadraditos como unidades tenga los cuadrados originales aplicando una *aprehensión operativa de cambio figural*[5], tenemos lo siguiente de acuerdo con la **Figura 2** de abajo y a la izquierda:

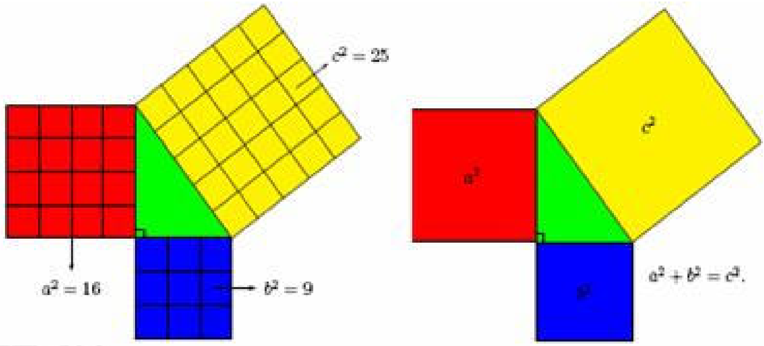

Figura 2: A la izquierda mostramos la *aprehensión operativa de cambio figural* realizada en el triángulo rectángulo notable dado anteriormente. Y a la derecha el mismo triángulo rectángulo notable con la conclusión obtenida en este caso.

Y nos podemos dar cuenta que la suma de los cuadraditos del cuadrado de lado a mas los cuadraditos del cuadrado de lado b nos dan la cantidad de cuadraditos que esta en el cuadrado de lado c. Así, mediante un *razonamiento como un proceso configural*[6], coordinando la *aprehensión discursiva*[7] y *operativa*[8] nos queda que se cumple lo mostrado en la **Figura 2** dada arriba y a la derecha. Luego, cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo*[9], se obtiene esa *conjetura sin demostración*[10] mostrada también en la **Figura 2** dada arriba y a la derecha. Según Apastamba, existen otros Triángulos Pitagóricos que son los formados por los lados: 12, 16, 20; 5, 12, 13; 8, 15, 17, los cuales se pueden hallar usando el Corolario del Teorema de Pitágoras dado abajo. Estos se usaron para realizar las Actividades, como lo vemos la **Figura 3** de abajo:

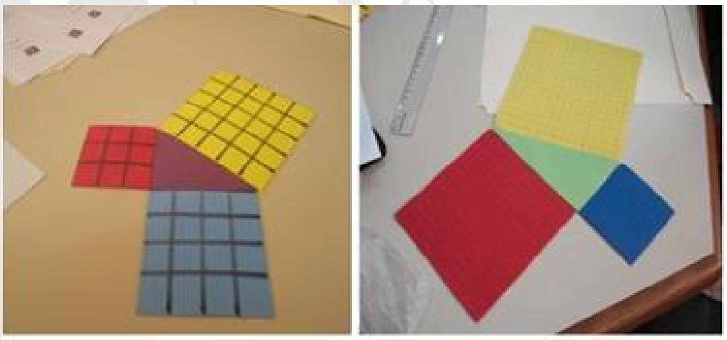

Figura 3: A la izquierda mostramos unas figuras hechas con foami, para ver de una manera didáctica la parte realizada arriba de una manera geométrica-algebraica con el triángulo rectángulo dado anteriormente. A la derecha se muestra la Actividad realizada por los participantes[11] con un triángulo rectángulo de lados 8, 15 unidades en los catetos y 17 unidades en la hipotenusa hechas también en foami.

Corolario del Teorema de Pitágoras

- **Números impares**

  Sea un número x impar, entonces los números correspondientes a la Terna Pitagórica asociadas a este número son:

  $$a = x, \quad b = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad c = \frac{x^2 + 1}{2}.$$

  La demostración de las expresiones anteriores corresponde al desarrollo de la siguiente igualdad:

  $$x^2 + \left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + 1}{2}\right)^2.$$

- **Números pares**

  Sea un número y par, entonces los números correspondientes a la Terna Pitagórica asociadas a este número son:

  $$a = y, \quad b = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1, \quad c = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1.$$

La demostración de las expresiones anteriores corresponde al desarrollo de la siguiente igualdad:

$$y^2 + \left(\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 1\right)^2 = \left(\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1\right)^2.$$

Ø Según cuenta José Hernández [12]en su Reporte de Investigación presentado en la XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (XXI RELME): Durante su investigación en Ternas Pitagóricas menciono que descubrió un modelo para formular Ternas Pitagóricas Primitivas que no se ha visto reproducido en ningún documento y le sirvió de base para elaborar la tabla de hipotenusa Pitagórica y es la siguiente: Sean $m, n \in N$ continuos, entonces:

$$a = m + n, \quad b = 2mn, \quad c = 2mn + 1.$$

Pero la definición dada en la *inducción* anterior es totalmente inadecuada para todas las regiones con excepción de las simples. Tomaremos en cuenta en triángulo isorrectángulo cuyos lados son iguales a la unidad y el cual genero muchas polémicas.

Cuando el triángulo es isorrectángulo

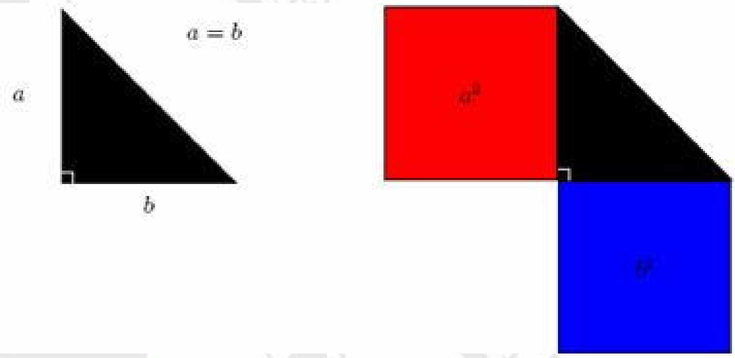

Figura 4: A la izquierda mostramos un triángulo isorrectángulo de lados de lados igual a la unidad de medida en los catetos y sobre la hipotenusa tiene longitud K. Y a la derecha el mismo triángulo isorrectángulo con los dos cuadrados de lados igual a la unidad de medida *construido* sobre la magnitud de los catetos.

Como el triángulo anterior es isorrectángulo, entonces tiene los lados perpendiculares llamados catetos de igual longitud, tomemos como medida la unidad y las denotaremos con a y b respectivamente como veremos en la **Figura 4** de arriba y a la izquierda.

Ahora, dividamos los dos cuadrados, siguiendo las diagonales, para obtener ocho piezas de forma triangular, aplicando una *aprehensión operativa de cambio figural*, tenemos que estos también son triángulos isorrectángulos, como veremos en la **Figura 5** de abajo.:

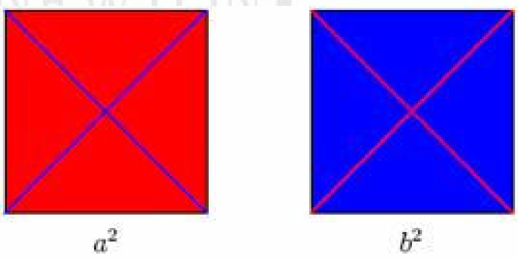

Figura 5: División de los cuadrados mediante sus diagonales.

Con dos triángulos isorrectángulos formamos un cuadrado por ejemplo con el de lado a, aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración*[13], esto es mostrado en la **Figura 6** de bajo y a la izquierda:

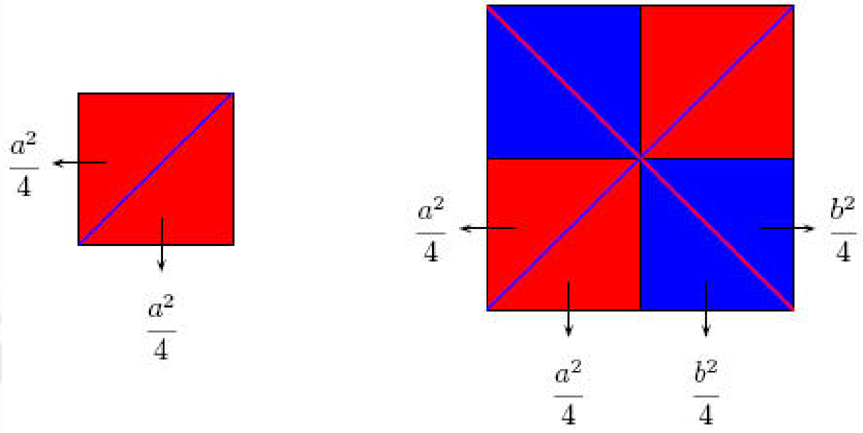

Figura 6: A la izquierda se muestra un cuadrado formado mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración* con 2 triángulos isorrectángulos rojos. Y en la derecha un cuadrado formado con otra *aprehensión operativa de reconfiguración* usando los 8 triángulos isorrectángulos (4 rojos y 4 azules).

Lo mismo ocurre con el cuadrado de lado b, y en total son cuatro nuevos cuadrados que unidos nos dan el cuadrado mostrado en la **Figura 6** de arriba y a la derecha, mediante una nueva *aprehensión operativa de reconfiguración*.

Si ahora colocamos los cuadrados de otra manera, obtenemos el mismo cuadrado pero de la siguiente forma como veremos en la **Figura 7** de abajo y a la izquierda:

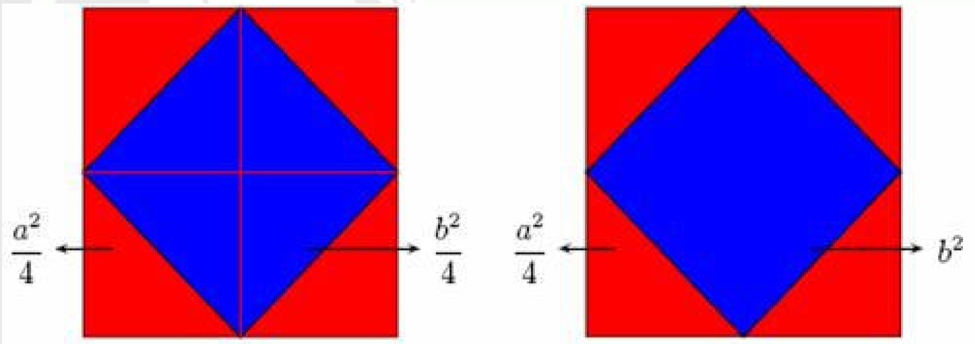

Figura 7: A la izquierda el cuadrado mostrado de otra forma diferente a la anterior y con los mismos triángulos isorrectángulos. Y en la derecha el mismo cuadrado mostrándonos geométricamente una propiedad muy importante ($1 < K$).

Notemos que el cuadrado que esta en el medio del cuadrado más grande tiene la misma área del cuadrado original, o en su defecto igual al área de cualquiera de los dos cuadrados que están sobre los catetos del triángulo isorrectángulo, como vemos en la **Figura 7** de arriba y a la derecha. Esto nos dice mediante un *razonamiento como un proceso discursivo natural*[14] que efectivamente esta área del cuadrado de lado K que esta sobre la longitud de la hipotenusa es mayor que la unidad de medida tomada, así la longitud de la hipotenusa que es la recta que se opone al ángulo recto es mayor que esta unidad. Luego veamos la **Figura 8** de abajo:

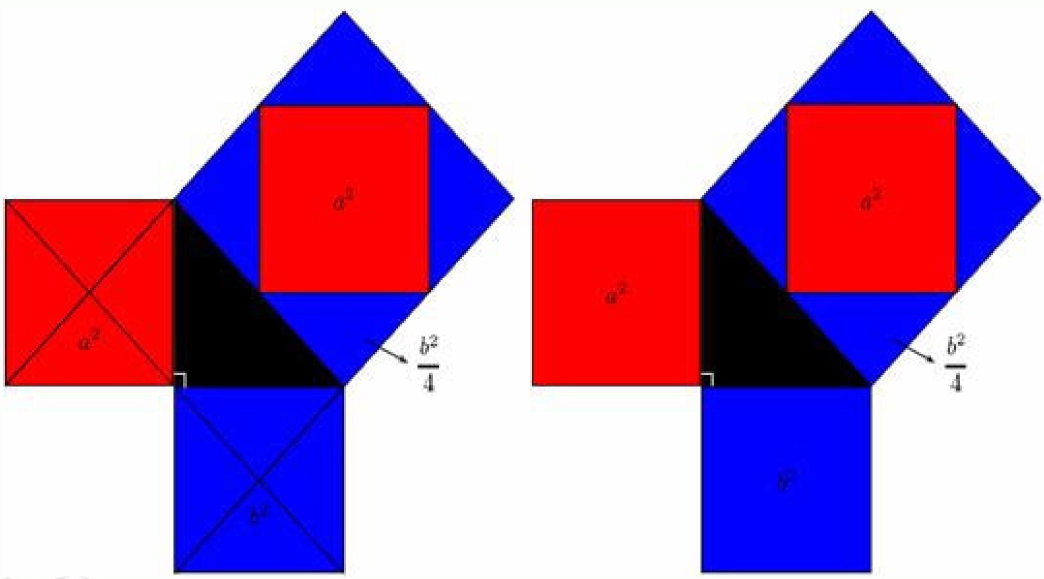

Figura 8: A la izquierda vemos el triángulo isorrectángulo en una acepción geométrica mostrando que los triángulos isorrectángulos que se generan en los cuadrados que están sobre la longitud de los catetos lo cuales forman el cuadrado grande que esta sobre la longitud de la hipotenusa. Y a la derecha volvemos a mostrar geométricamente el mismo triángulo isorrectángulo, el cual nos puede general la conclusión buscada para el Teorema de Pitágoras en este caso particular.

Y además tenemos que, la misma forma del cuadrado es menor que el doble de ella, como veremos en la **Figura 9** de abajo:

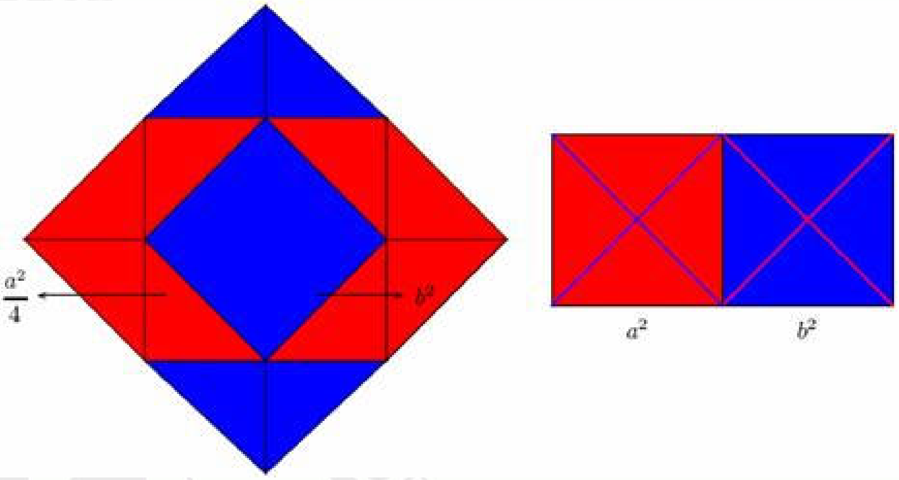

Figura 9: A la izquierda tenemos el cuadrado que nos indica geométricamente la siguiente desigualdad $K < 2.$ Además, tenemos en el centro de este cuadrado un cuadrado azul de lado la unidad de medida, así tenemos la otra desigualdad $1 < K.$ Por tanto, tenemos que se cumple $1 < K < 2.$ A la derecha se muestra un rectángulo de lados $a+b,$ el cual nos indica que el Teorema de Pitágoras efectivamente nos permite cuadrar este rectángulo, ya que lo podemos transformar en un cuadrado colocando tanto el cuadrado rojo como el cuadrado azul en los catetos de un triángulo isorrectángulo y hallar este cuadrado que contenga a los dos cuadrados en uno solo. Este cuadrado esta sobre la longitud de la hipotenusa.

Así, cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo* tenemos lo siguiente en la **Figura 10** de abajo:

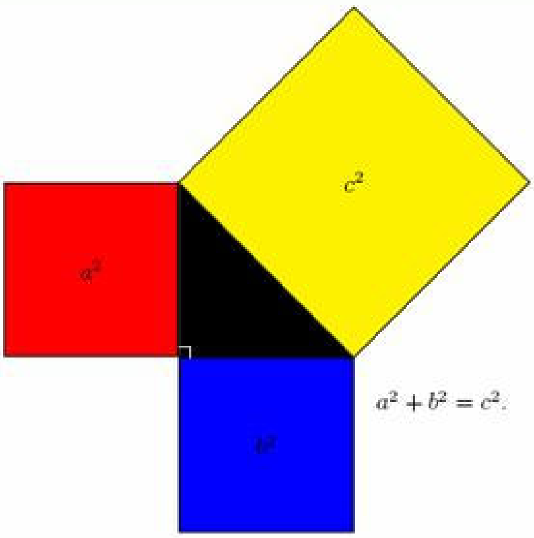

Figura 10: Conclusión hallada para el Teorema de Pitágoras en el caso donde el triángulo isorrectángulo tiene en los lados del cateto iguales a la unidad de medida.

En conclusión tenemos que si K es la longitud de la hipotenusa entonces geométricamente se cumple que $1 < K < 2.$ Así, si como sabemos $K = \sqrt{2}$ entonces $1 < \sqrt{2} < 2$ como se esperaba. Veamos la **Figura 11** de bajo:

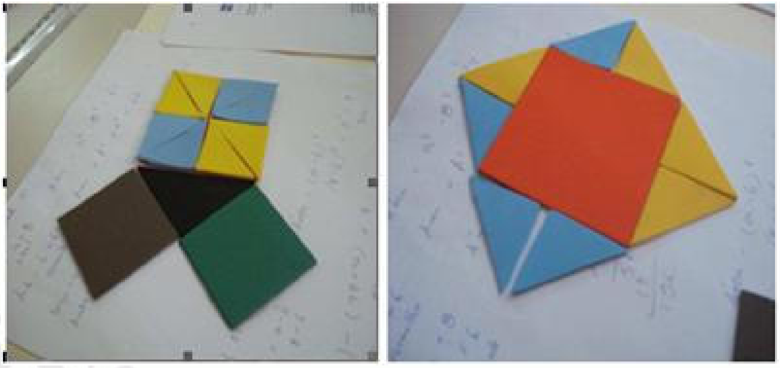

Figura 11: A la izquierda vemos una figuras hechas en foami para ver la parte realizada arriba con el triángulo isorrectángulo de lados iguales a la unidad de medida en los catetos y sobre la hipotenusa hallaremos cual es el valor de K (aquí están realizadas en foami tanto el triángulo isorrectángulo (color negro) como los cuadrados correspondientes a cada cateto (colores marrón y verde) y sobre la hipotenusa (color anaranjado). A la derecha se muestra geométricamente la desigualdad $K < 2$. Estas figuras hechas en foami son realizadas para efectuar las Actividades realizadas manualmente por los participantes[15] que asistieron a los respectivos talleres efectuados en diferentes eventos.

Nota Histórica (Demostración de Platón: el Menon)

"Un conocimiento profundo de las cosas no la obtendremos ni ahora ni nunca, en tanto que no las contemplemos desde el principio."

Aristóteles. Filosofo griego. "En política" (Siglo IV a.c.).

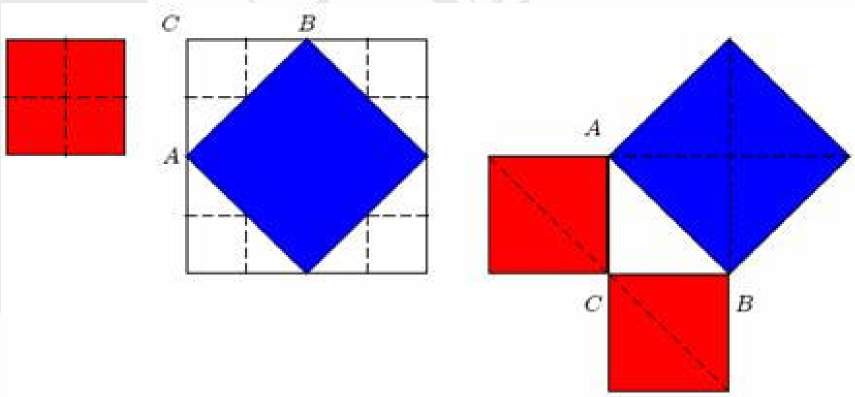

Figura 12: Platón construyo un cuadrado cuyo lado es de dos unidades (izquierda, rojo). Su área vale cuatro unidades cuadradas. Trazando un nuevo cuadrado ahora sobre su diagonal AB, se obtiene un cuadrado de ocho unidades cuadradas (centro, azul), doble superficie de la del primero. Hasta aquí la duplicación del cuadrado.

La solución que elabora Platón encierra inesperadamente una demostración del Teorema de Pitágoras (**Figura 12**, arriba y a la derecha), si bien referida exclusivamente a los triángulos isorrectángulos[16].

Deducción del Teorema de Pitágoras

" ... No aceptar nunca ninguna cosa como verdadera si yo no la conociera ser tan evidentemente, es decir, evitar cuidadosamente la precipitación y la prevención; y no incluir en mis juicios nada mas que lo que se presente tan clara y distintamente a mi espíritu que no tuviese ninguna ocasión de ponerlo en duda".

Descartes, R. Discurso del método, p. 30.

Vamos a ver los siguientes *procesos de inferencia deductiva[17]* para tratar de encontrar una forma de demostrar el Teorema de Pitágoras, apelando a los *procesos cognoscitivos* que intervienen en la *resolución de un problema*.

Deducción a través del trinomio cuadrado perfecto

Esto lo haremos a partir del producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades:

Sea, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Despejando tenemos que:

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Es decir, cambiando del *anclaje discursivo* al *visual*[18] según la **Figura 13** de abajo, tenemos que:

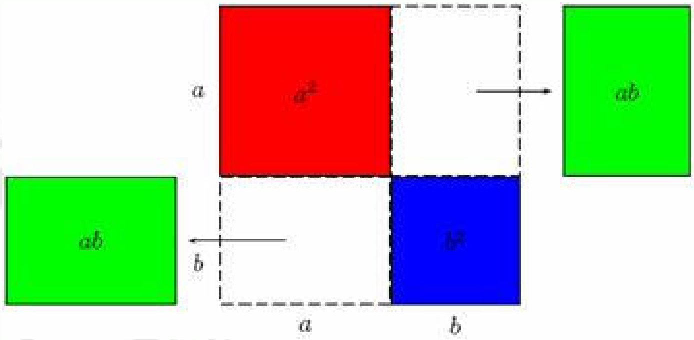

Figura 13: Producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades visto desde una perspectiva geométrica.

Notemos que $a^2 + b^2$ se formara con los dos rectángulos que se le han quitado al cuadrado de lado $(a + b)$ los cuales tienen de largo a y ancho b y sumándole un cuadrado de lado $(a - b)$. Es decir, aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración*, veamos la **Figura 14** de abajo:

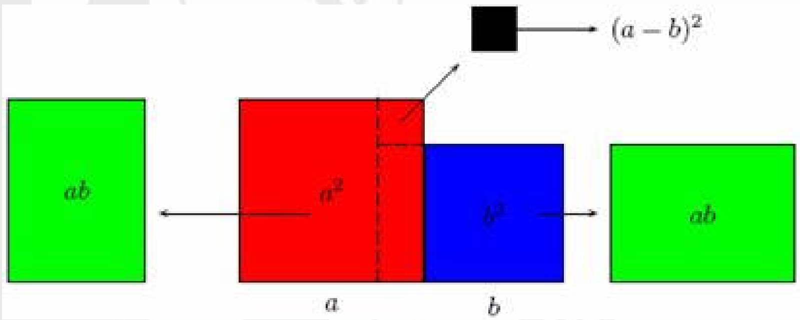

Figura 14: Producto notable del cuadrado de la diferencia de dos cantidades visto desde una perspectiva geométrica.

Los dos rectángulos se pueden convertir mediante una *aprehensión operativa de cambio figural* en cuatro triángulos rectángulos de longitud en la base b y longitud de altura a, es decir veamos la **Figura 15** de abajo:

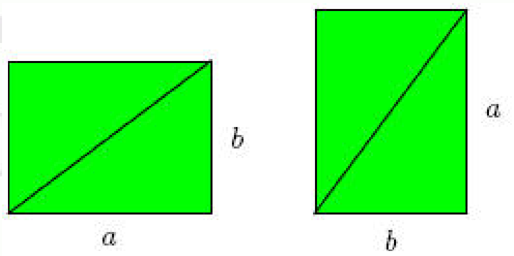

Figura 15: Rectángulos que están sobrando en el producto notable de la suma de dos cantidades (**Figura 13**) los cuales son los mismos que están en el producto notable de la diferencia de dos cantidades (**Figura 14**), y que los dividimos mediante una *aprehensión operativa de cambio figural* colocándoles la línea en sus diagonales en este par de rectángulos (formando 4 triángulos rectángulos).

Si llamamos,

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab. \qquad (2)$$

Veremos que efectivamente c^2 es otro cuadrado de lado c y cumple el producto notable del cuadrado de una suma, es decir, se puede formar de la suma de estas dos áreas. Veamos como se forma, desarrollando algebraicamente tenemos que:

$c^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab$ (Desarrollando).

$c^2 = (a^2 - 2ab + b^2) + 2ab$ (Asociando).

$c^2 = (a - b)^2 + 2ab$ (Producto Notable).

De aquí que, tomando $2ab = 4\left(\frac{ab}{2}\right)$, es decir 4 triángulos rectángulos más un cuadrado en el *cambio dimensional*[19] de lado $(a - b)$ como en la siguiente **Figura 16** de abajo y a la izquierda, tenemos:

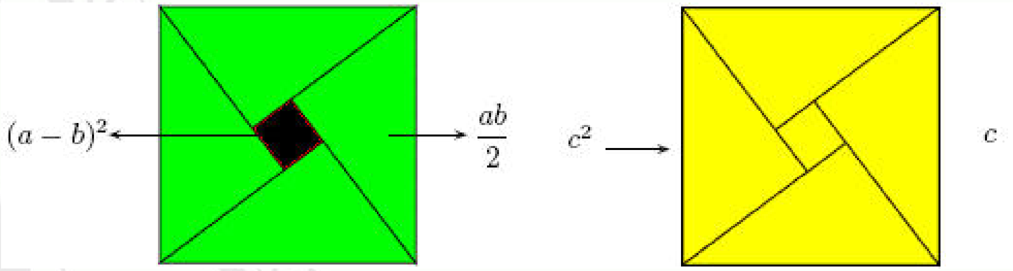

Figura 16: A la izquierda se muestra como se forma este cuadrado de lado c usando los 4 triángulos rectángulos verdes y el cuadradito negro. En la derecha vemos que efectivamente este es el cuadrado de color amarillo de lado c buscado.

Es decir, de (1) y (2) tenemos el siguiente *Discurso*:

$c^2 = a^2 + b^2$.

Y este también es un cuadrado de lado c, mediante la *construcción* que se realizo, como lo vemos en la **Figura 16** de arriba y a la derecha.
Y además, esa es la longitud del cuadrado que esta en el triángulo rectángulo y tiene en la hipotenusa longitud igual a c, así por el *razonamiento como un proceso configural*, nos queda el siguiente *truncamiento*[20], como veremos en la **Figura 17** que tenemos allá abajo:

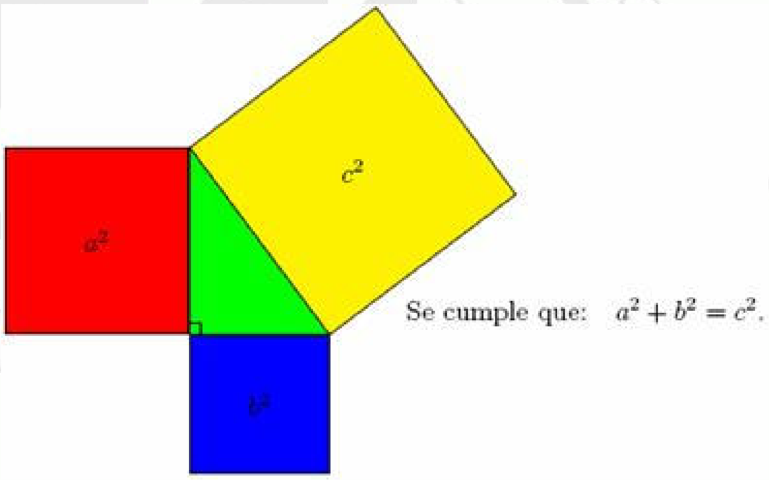

Figura 17: Conclusión hallada para el Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica para un triángulo rectángulo cualquiera.

"Ninguna investigación merece el nombre de ciencia si no pasa por la demostración."

Leonardo da Vinci (1452-1519). Pintor, arquitecto, ingeniero, célebre artista y genio del Renacimiento Italiano.

Observaciones:

- En el caso de un triángulo rectángulo cualquiera como los triángulos rectángulos notables el cuadrado de lado c se origina con 4 triángulos rectángulos (como el original) mas un cuadrado de longitud igual a la diferencia de las longitud de los catetos.
- En el caso del triángulo isorrectángulo el cuadrado de lado c se origina nos dan con los 4 triángulos isorrectángulos (como el original) ya que en este caso $a = b$ implica que $a - b = 0$, o sea no existe el cuadrado de longitud $(a - b)$

Nota Histórica (Demostración de Bhaskara)

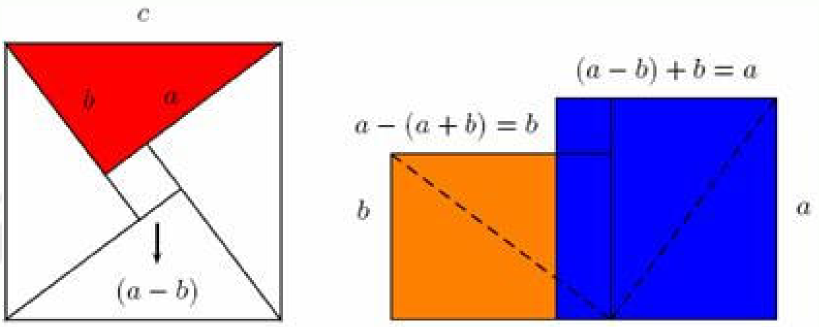

Figura 18: Bhaskara[21] desarrolla una demostración gráfica y algebraica del Teorema de Pitágoras. Con cuatro triángulos rectángulos de lados a, b y c se construye el cuadrado de lado c (de arriba y a la izquierda), en cuyo centro se forma otro cuadrado de lado $(a - b)$. Redistribuyendo los cuatro triángulos y el cuadrado de lado $(a - b)$, construimos la figura de la derecha, cuya superficie resulta ser la suma de la de dos cuadrados: uno de lado a (azul) y otro de lado b (anaranjado)[22].

“Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar en forma errónea es mejor que no pensar”.

Hipatia de Alejandría, Egipto, 370-415 d.C.

Interpretaciones Y Conclusiones

En el estudio de estas *deducciones* del Teorema de Pitágoras, nuestros estudiantes aprenderán partiendo de situaciones netamente *intuitivas* como son el caso de triángulos rectángulos notables y triángulos isorrectángulos a general posibles *demostraciones geométricas* del Teorema de Pitágoras, a la vez que “cuadraran” figuras geométricas a partir del *proceso inductivo*, los cuales se harán usando regla y compás, según lo hacían los griegos de acuerdo con lo estudiado en la *Historia de la Matemática.*

Bibliografía

- C, Oliveira. (2002): “EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU PELA VOLTA AO QUADRADO PERFECTO”. IV simposio de educación matemática. Universidad Luterana Do Brasil. Canoas, Brasil.
- D, Duran. (2004). Geometría Euclideana. V Talleres de Formación Matemática. Maracaibo, Venezuela: Asociación Matemática Venezolana.
- D. Jiménez. (2004): “π la letra griega que los griegos no usaron”. Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 9 (1), 103-117.
- D, Mora. (2002): Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana. (Ediciones Biblioteca-EBUC). Caracas, Venezuela.
- Enciclopédia Del Estudiante Larousse. (1999): Matemática e Informática. Edición especial en lengua española de la Encyclopédie des Jerines. Larousse S.A.
- F, González. (1987): “Trascendencia de la resolución de problemas de matemáticas”. Paradigma, 8 (2), 247-259. Junio-Diciembre. Venezuela.
- F, González. (2005): “Resolución de Problemas”. Editor: Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática. Colección Aula. ULA. Mérida, Republica Bolivariana de Venezuela, Agosto.
- G. Torregrosa, H. Quesada (2007): “Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría”. Relime 10 (2), 273-300. Impreso en México. Publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- J, Barreto. (2007): “Otras deducciones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia de la matemática, como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje." F González (Presidente). Memorias del VI Congreso Venezolano de Matemática. (pp. 537-546). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
- J, González,; J, Ortiz,; A, Acosta,; A Azocar. (1995): Matemática I. Estudios Generales. Tomo II. Sexta Edición. UNA. Caracas, Venezuela.
- Ministerio de Educación. (1987): Programa de estudio y Manual del Docente, Tercera etapa de educación básica. Asignatura: Matemática-Física. Caracas, Venezuela.

[1] Son las afirmaciones que se aceptan sin ser demostradas.
[2] Se produce cuando, luego de una enumeración de casos particulares, se concluye algo acerca del caso general.
[3] De acuerdo con Heller (1989), son mecanismos de naturaleza intelectual que una persona utiliza para adquirir, procesar y organizar información en su estructura cognoscitiva.
[4] Permite la adquisición de enfoques generales que ayudan a enfrentar situaciones matemáticas diversas, posibilitan la realización de descubrimientos originales y ayudan a "aprender a aprender".
[5] Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos (creando nuevas subconfiguraciones).
[6] Es la coordinación entre la aprehensión discursiva y la operativa.
[7] Es la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas).Tal vinculo puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se denomina cambio de anclaje.
[8] Es la modificación de la configuración inicial para resolver un problema geométrico.
[9] Es la asociación de un dibujo a una afirmación matemática.
[10] Esta permite resolver el problema aceptando las conjeturas simples (aprehensión operativa de cambio figural). Conduce a la solución de un problema.
[11] Foto tomada por los compañeros participantes del IV Congresso Internacional de Ensino da matemática efectuado en la ULBRA Canoas/RS, los días 25, 26 e 27 de outubro de 2007.
[12] Instituto Loyola. Managua, Nicaragua.
[13] Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle.
[14] Es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación.
[15] Foto tomada por los compañeros participantes del IV Congresso Internacional de Ensino da matemática efectuado en la ULBRA Canoas/RS, los días 25, 26 e 27 de outubro de 2007.
[16] Tomada de http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras
[17] Se da cuando a partir de dos o más proposiciones dadas, se obtiene como consecuencia otra proposición (sin entrar a considerar lo que en esta última se afirma o se niega). En la base de la Inferencia por deducción están un conjunto de principios (reglas de inferencia, proposiciones válidas previamente aceptadas, definiciones, conceptos, etc.) que sirven para vincular la manera forzosa los antecedentes (proposiciones dadas) con el consecuente (proposiciones que se derivan de las anteriores).
[18] Es la asociación de una afirmación matemática a un dibujo.
[19] Es cuando cambio la información desde una perspectiva unidimensional o tridimensional, ya que son dados siempre bidimensionalmente sobre el papel o la pantalla de un ordenador.
[20] Es cuando la coordinación proporciona la "Idea" para resolver deductivamente el problema (conjeturando afirmaciones que se prueban). Conduce a la solución de un problema.
[21] Bhaskara II, el matemático y astrónomo hindú del siglo XII, nos da la siguiente Demostración del Teorema de Pitágoras.
[22] Tomada de http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras