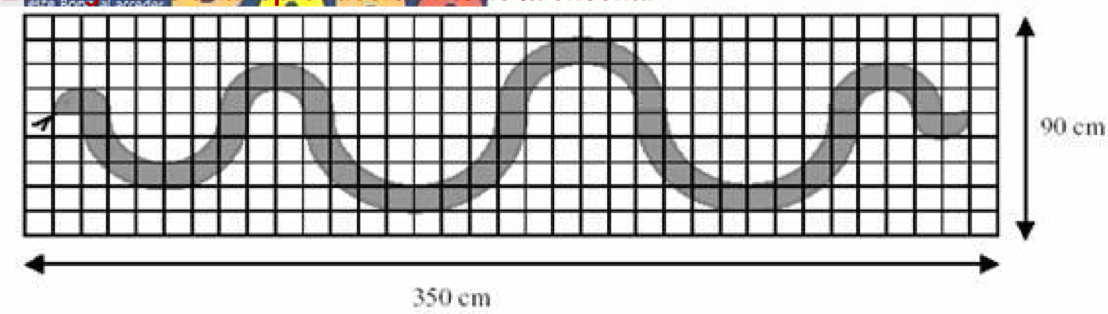
Problemas Comentados (XX)

J.A. Rupérez Padrón y M.García Déniz
-Club Matemático-

Los tres problemas que vamos a comentar los hemos extraído de las pruebas correspondientes al 12º RALLY MATEMÁTICO TRANSALPINO, Prueba I, enero-febrero 2004. Ya hemos traído varios problemas de este origen a nuestras páginas. Están muy bien concebidos y con pequeñas adaptaciones pueden ser utilizados en muy diferentes niveles educativos. En el Torneo de la Sociedad hemos utilizado algunos, como es el caso del primero que proponemos hoy:

EL RESTAURANTE CHINO
La enseña del restaurante chino « La serpiente roja » es una larga serpiente roja en el interior de un rectángulo dorado.
Esta figura es una reproducción fiel de la enseña:



¿Cuánto mide la superficie ocupada por la serpiente?
Dad vuestra respuesta y explicad vuestro razonamiento.

Comentarios y Solución:

Se trata de un problema que une Geometría (círculo y corona circular) y Medida de una forma muy interesante, permitiendo distintas maneras de abordar la resolución y el uso de diferentes estrategias de pensamiento.

Es curioso cómo los chicos y chicas de pensamiento más elemental enseguida ven como una buena salida la idea de "estirar" la serpiente y utilizar las medidas que aparecen adosadas al dibujo para dar una "estimación" de la longitud de la serpiente y, como consecuencia, de su superficie.
Otros tratan de ver la cantidad de "cuadraditos" que cubre el cuerpo de la serpiente y utilizar el cuadradito como unidad de medida de superficie. Generalmente hacen también una estimación. En el mejor de los casos, componen los cuadraditos incompletos unos con otros para tener cuadraditos completos.
Otros, los que poseen más conocimientos, tratan de ver figuras geométricas cuyas superficies calculan con las fórmulas conocidas y , con una suma final, obtener la superficie total.

¿Cuál será la mejor forma de proceder? La de siempre, utilizar el proceso de resolución que estamos exponiendo una y otra vez, la estrategia general de cuatro fases: **Comprender**, **Pensar**, **Ejecutar** y **Responder**.

I)
En primer lugar, la bandera en sí es un rectángulo de 350 cm x 90 cm que está dividido en cuadrados. Al contarlos sobre el dibujo, encontramos 35 cuadrados a lo largo y 9 cuadrados a lo ancho lo cual nos indica que tienen unas dimensiones de 10 cm de lado, o sea, de 10x10 = 100 cm^2 = 1 dm^2 .
El cuerpo de la serpiente está formado por dos semicírculos equivalentes (cabeza y cola) y por seis medias coronas circulares, equivalentes dos a dos. Los dos semicírculos tienen un radio de 10 cm. Las medias coronas circulares de menor tamaño tienen radio interior de 10 cm y exterior de 20 cm; las medianas tienen radio interior de 20 cm y radio exterior de 30 cm; las de mayor tamaño tienen radio interior de 30 cm y exterior de 40 cm.
El objetivo es averiguar la superficie ocupada por la serpiente.
La relación observable, a partir de la estructura indicada anteriormente, es que al unir adecuadamente todas las partes de la serpiente podemos obtener una figura nueva completa y reconocible: un círculo.

II) Organizando la información de manera conveniente y utilizando los conocimientos sobre el círculo podremos abordar la resolución del problema.

III) Tenemos, pues, un nuevo círculo obtenido colocando el círculo pequeño y las coronas circulares alrededor de él de manera sucesiva, cuyo radio coincide con el exterior de la corona de mayor tamaño, es decir, 40 cm.
Recurriendo a la expresión que determina el área del círculo a partir del valor de la medida de su radio, tendremos: $S = p R^2$

cm^2 = p · 40^2 cm^2 = 1600 p cm^2 = 16 p dm^2 .

IV) Podemos comprobar el resultado a partir de la comprobación con las estimaciones hechas contando cuadraditos y completándolos. Para ello es preciso también aproximar el resultado obtenido mediante el uso de decimales y la aproximación p = 3,14 (S ˜ 50,24 dm^2, es decir, algo más de 50 cuadraditos.
También se puede proceder a calcular las áreas de las coronas y el círculo pequeño, para sumarlas después. Es más complejo, pero puede servir para ver otras maneras de trabajar y apreciar el valor del camino elegido.
Hay un buen análisis que hacer con los chicos y chicas. Las aproximaciones que hagan serán siempre muy diferentes al cálculo exacto y será bueno reflexionar sobre la importancia del conocimiento cuando tratamos de averiguar la exactitud de las medidas y la casi absoluta imposibilidad de obtenerla a partir de observaciones, aproximaciones, estimaciones o medidas directas. E, incluso, meditar sobre la aparición del valor p y la necesidad de su aproximación decimal en la realidad, pero no así sobre el papel, donde podemos manejar su valor "exacto" hasta el final.

En cualquier caso podemos concluir que la respuesta es: **la superficie ocupada por la serpiente es de 1600 p cm^2 = 16 p dm^2 ˜ 50,24 dm^2**.

¡QUÉ FAMILIA!
Los señores Bernier tienen 5 hijos cuyas edades son números pares diferentes. La suma de las edades de las tres hijas es igual a 30 años. La suma de las edades de los chicos es igual a 14 años. La suma de las edades de los dos hijos mayores es igual a 26 años. La suma de las edades de los dos hijos más jóvenes es igual a 10 años.
Indicad la edad de cada hijo y precisad si se trata de un varón o una hembra.
Explicad vuestro razonamiento e indicad todas las respuestas posibles.

Comentarios y Solución:

En este problema va a aparecer la Aritmética (adición), pero también la Lógica (deducciones) y la Combinatoria.

I) Comprender que es necesario tomar en cuenta todas las condiciones y deducir que, si la suma de las edades de los dos mayores y de los dos más jóvenes vale 36 el niño « del medio » tiene 8 años (30 + 14 - 36 = 8).
Deducir que los dos más jóvenes tienen 4 y 6 años.
- Hacer la hipótesis (I) que el niño de 8 años es un varón, el otro niño tendría entonces 6 años y la hija más joven 4 años. Los dos mayores serían entonces hembras y tendrían 16 y 10 años o 14 y 12 años.
- En la hipótesis (II) con el niño de 8 años es una hembra, los 2 más viejos serían 1 hembra y 1 varón y los 2 más jóvenes también. Puesto que una hembra tiene 8 años, las otras dos deben tener juntas 22 años. Una solución es 22 = 16 + 6, que conduce a 16, 8, 6 años para las hembras y 10 y 4 años para los dos varones. La segunda posibilidad, 22 = 18 + 4 no conviene de hecho ya que la suma de las edades de los varones debe ser.
- Concluir que hay tres soluciones posibles : I) varones de 8 y 6 años, hembras 14, 12, 4 años; I') varones de 8 y 6 años, hembras de 16, 10, 4 años; y II) varones de 10 y 4 años, hembras de 16, 8, 6 años.

IV)

Las 3 soluciones (H 16, H 10, V 8, V 6, H 4; H 16, V 10, H 8, H 6, V 4; H 14, H 12, V 8, V 6, H 4) con explicaciones.

EL CUADRO ROBADO
El inspector Derrick debe descubrir los responsables del robo de un célebre cuadro del siglo XVI.
Los sospechosos son cuatro personajes bien conocidos por la policía: Bernardo "el marcado", Carlos el "vagabundo" y los hermanos Augusto y Dante.
El inspector los interroga a los cuatro y recoge sus declaraciones:
. Augusto: *Bernardo no ha robado el cuadro.*
. Carlos: *El robo no ha sido cometido por Dante.*
. Bernardo: *El ladrón es uno de los dos hermanos.*
. Dante: *Yo no he sido.*
El inspector sabe que uno solo de ellos ha mentido.
¿Quién ha robado el cuadro?
Dad vuestra respuesta y justificad vuestro razonamiento.

Comentarios y Solución:

Este es un problema donde la Lógica (negación, implicación, deducción) es el contenido exclusivo.

I) Observar que Carlos y Dante dicen los dos la misma cosa y por ello ni uno ni otro pueden haber mentido porque habría dos mentirosos.
- Deducir que el mentiroso es bien Augusto, o bien Bernardo. Si Augusto es el mentiroso, el culpable sería Bernardo, pero esto contradice la afirmación (verdadera) de este último, según la cual el culpable es uno de los hermanos.
- Concluir que es Bernardo el mentiroso y que, por consiguiente, el cuadro ha sido robado por Carlos o por Bernardo mismo.

Según la afirmación de Augusto, el ladrón es Carlos.
O :
- Proceder sistemáticamente a suponer que, cambiando de papel, cada uno de los cuatro sea el mentiroso y descubrir que no es sino en la hipótesis de que Bernardo es el mentiroso no se llega a una contradicción. Deducir entonces que Carlos es el ladrón.
O :
- Proceder sistemáticamente a suponer que, cambiando el papel, cada uno de los cuatro sea el ladrón y descubrir que solamente la hipótesis de que Carlos es el ladrón no conduce a ninguna contradicción.

IV) Carlos, con explicación de las deducciones.

Respuestas a los anteriores:

Las edades de las hijas del rey y los prisioneros.
Un rey (que alimenta una secreta pasión por las matemáticas) tiene dos hijas; sus edades están expresadas como números enteros positivos. Hay dos prisioneros, M y S, a cada uno de los cuales se le da, separadamente, una sola información:
- **al prisionero S se le comunica la suma de las edades de las dos hijas,**
- **al prisionero M se le comunica el MCD de las edades de las dos hijas.**

El rey convoca juntos a los dos prisioneros y promete liberar al que acierte a determinar las dos edades.
S sacude tristemente la cabeza: “No, majestad, no estoy capacitado para establecer las edades de sus hijas: estoy dudando entre 5 posibilidades”.
Oída esta respuesta, M hace rápidamente algunos cálculos, después sonríe y afirma: “Majestad, yo conozco las edades de sus hijas”.
Al fin, también S, oída la última respuesta, dice: “Ahora también yo sé las dos edades”.
¿Cuántos años tienen las hijas del rey?

SOLUCIÓN:
El hecho de que S esté inseguro entre 5 posibilidades, significa que la suma es 10 o bien 11. Elegimos las parejas de números enteros positivos que tienen esta suma, escribiendo al lado el MCD de cada una:
Suma 10 Suma 11
(1, 9) 1 (1, 10) 1
(2, 8) 2 (2, 9) 1
(3, 7) 1 (3, 8) 1
(4, 6) 2 (4, 7) 1
(5, 5) 5 (5, 6) 1
Como inciso, notemos que la columna correspondiente al caso de suma 11 está formada por números todos iguales a 1. Es fácil convencerse de que esta circunstancia depende del hecho de que 11 es primo. En general, un número n es primo si y solo si, como quiera que se descomponga en la suma de dos enteros positivos a y b, se tiene MCD (a, b) = 1. De hecho, si a y b tuviesen un divisor común h > 1, también n = a + b sería un múltiplo de h y por tanto no sería primo; viceversa, si n = h·k (con h, k>1), entonces MCD (h, n-h) = h.
Volvamos al problema. Sabiendo que la pareja buscada es una de las citadas en el esquema precedente, M afirma conocer la respuesta: esto significa que el MCD conocido por M aparece una sola vez en el esquema. El único número no repetido es 5, y por tanto se concluye que ambas hijas del rey tienen 5 años.

Las edades de las hijas del rey y los prisioneros (2).
Dejando invariable todo el cuento, sustituimos la primera respuesta de S con la siguiente:
S sacude tristemente la cabeza: “No, majestad, no estoy capacitado para establecer las edades de sus hijas: estoy dudando entre 4 posibilidades”.

SOLUCIÓN:
Esta vez, según S está dudando entre 4 posibilidades, la suma de las edades es 8 o bien 9; y el esquema se convierte en el siguiente:
Suma 8 Suma 9
(1, 7) 1 (1, 8) 1
(2, 6) 2 (2, 7) 1
(3, 5) 1 (3, 6) 3
(4, 4) 4 (4, 5) 1
A diferencia del caso anterior, hay ahora tres números que aparecen una sola vez en la columna de los MCD: M está en disposición de responder en el caso en el cual el único número es 2, pero también en el caso en el cual tal número es 3, y asimismo en el caso en que le ha sido comunicado el número 4.
Se convierte entonces en importante explotar la última afirmación de S, que a su vez declara haber determinado las dos edades: esto significa que la suma conocida por S corresponde a una columna en la cual hay solamente un número que aparece una sola vez. Se concluye que la suma es 9 y las edades pedidas son 3 y 6.
Hemos aprovechado el hecho de que en la columna relativa a la suma 9 aparece uno y solo un número distinto de 1. Ésta es una peculiaridad del número 9, compartida solamente por el número 4 (en el cual, por otro lado, la situación se banaliza): para

todos los otros números n, si n no es primo se demuestra que en la columna de los MCD aparecen al menos dos números distintos de 1.
Esta observación permite reformular el último problema con la ambientación de la pregunta inicial, en términos ciertamente enigmáticos.

La redistribución de la mercancía.
(A Mathematical Jamboree, de Brian Bolt)

Una empresa de venta de coches dispone de siete locales de exposición y venta que vamos a nombrar con las letras A, B, C, P, Q, R y S,. Pero se encuentra con un exceso de existencias en A, B y C mientras que le faltan coches en los otros locales. Exactamente los excesos y defectos son:

A: +9 coches; B: +6 coches; C: +8 coches
P: -5 coches; Q: -7 coches; R: -3 coches y S: -8 coches.

Ahora bien, el mover los coches de un local a otro les supone unos gastos que vienen dados (en €) en la siguiente tabla:

	P	Q	R	S
A	60	20	50	40
B	40	50	30	80
C	30	40	70	50

Y se trata de conseguir la redistribución de los coches con el mínimo de gastos. ¿De qué manera?

Una forma de redistribuir los coches es la siguiente:

		hasta				
		P	Q	R	S	
Desde	A	3	0	2	4	9
	B	1	4	0	1	6
	C	1	3	1	3	8
		5	7	3	8	

Donde, por ejemplo, el 2 situado en la intersección de A y R significa que movemos dos coches desde A hasta R. Al final de los traslados tendremos 9 coches menos en A, 6 en B y 8 en C; mientras que aumentamos en 5 los coches en P, 7 en Q, 3 en R y 8 en S, de acuerdo con las condiciones iniciales del problema.
¿Pero cuánto han supuesto estos traslados? Lo podemos resumir en la tabla siguiente:

		hasta				Totales
		P	Q	R	S	
Desde	A	3*60	0*20	2*50	4*40	440
	B	1*40	4*50	0*30	1*80	320
	C	1*30	3*40	1*70	3*50	370
Totales		250	320	170	390	1130

Podemos ver que el coste total es de 1130 €. También figuran los gastos por cada punto de venta y podemos saber que los vehículos movidos desde A costaron 440 € y los movidos a R 170 €, por ejemplo.
Pero esta no es la mejor solución. Una estrategia a la que nos conduce el método de prueba y error consiste en ir tomando las rutas más económicas primero. Así para el envío de los 9 vehículos que sobran en A, lo más económico es enviar el máximo posible a Q (con un coste de 20 € por coche), y el resto a S (con un coste de 40 €) lo que supone un total de 220 €.

	P	Q	R	S	Totales
A	0*60	7*20	0*50	2*40	220 €

Si hacemos lo mismo en la siguiente fila enviaríamos, con el coste de 210 €, 6 vehículos:

	P	Q	R	S	Totales
B	3*40	0*50	3*30	0*80	210 €

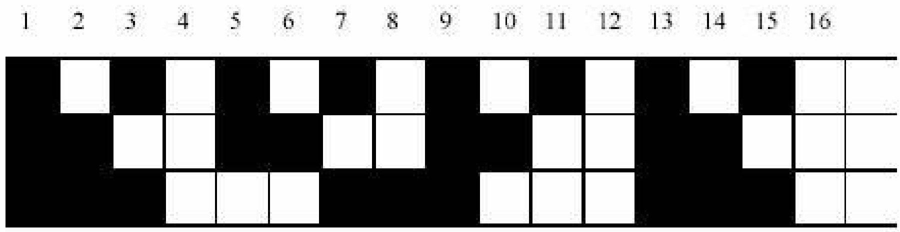
Y nos quedarían para los coches remitidos desde C la siguiente fila de datos:

	P	Q	R	S	Totales
C	2*30	0*40	0*70	6*50	360 €

En total habremos gastado **790 €**, que supone una notable mejoría sobre los 1130 € de la primera solución. Y esta parece ser la solución del problema propuesto.

Les ofrecemos ahora, como de costumbre, algunos problemas más para disfrutar resolviéndolos. Del mismo Rally que los problemas del inicio de este artículo son los siguientes.

COLOREADO RARO (Cat. 5, 6, 7)
Máximo ha coloreado una cuadrícula respetando, para cada línea, una regla de coloreado diferente:



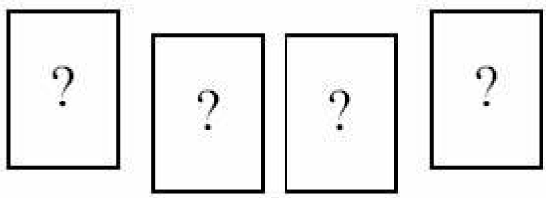
Ha coloreado ya correctamente las 15 primeras columnas. Constata que las columnas 1, 9 y 13 están completamente coloreadas. Continúa el coloreado más allá de la columna 16.

¿La columna 83 estará completamente coloreada? ¿Y la columna 265?

Explicad cómo habéis hallado la solución.

JUEGO DE CARTAS (Cat. 7, 8)
Lucas y sus amigos juegan a las cartas con un mazo de 52, compuesto de 4 series de cartas numeradas de 1 a 13. Para este juego se giran 4 cartas, a cara descubierta, y se forma un mazo con las otras cubiertas.
Por turno, cada jugador toma la carta superior del mazo y, cuando es posible, toma las cartas descubiertas cuya suma corresponda al número de la carta tomada del mazo. Por ejemplo, si se toma un " 8", se puede tomar una carta descubierta " 8" o bien dos, tres o cuatro cartas descubiertas cuya suma sea 8.
Le toca a Lucas. Él observa las cuatro cartas descubiertas y dice, antes de tomar la carta del mazo, "soy afortunado, estoy seguro de poder tomar al menos una de las cartas descubiertas".

¿Qué números se pueden escribir con estas características?
Explicad cómo los habéis hallado.



CIFRAS MÓVILES (Cat. 7, 8)
Un número de 4 cifras es tal que:
- las cifras que lo componen son todas distintas entre sí y de 0
- colocando las unidades en el lugar de los millares, las decenas en el lugar de las centenas, las centenas en el lugar de las unidades, los millares en el lugar de las decenas se obtiene un número que sumado con el de partida da 9613.

¿Qué números se pueden escribir con estas características?
Explicad cómo los habéis hallado.

¿TARTAS: GRANDES O PEQUEÑAS? (Cat. 8)
Cada domingo, la señora Boulanger prepara su masa con huevos, azúcar, mantequilla y harina y llena hasta el borde un molde cilíndrico.
Una vez horneado, le sale un excelente pastel.
Pero hoy, con la misma cantidad de masa, hace muchos pequeños pasteles en lugar de un único gran pastel, utilizando moldes cuyo diámetro y altura son la mitad del que utiliza habitualmente.
¿Cuántos pequeños pasteles obtendrá con la misma cantidad de masa?
Explicad vuestro razonamiento.

Y ahora un bonito problema de investigación que nos ha diseñado nuestro buen amigo José Fernando Rodríguez. Hace referencia al bono de tranvía y autobús de la zona metropolitana de Tenerife, pero seguro que puede utilizarse en cualquier sitio del mundo (cambiando, naturalmente, la cantidad de cifras del código).

EL BONO VÍA (GUAGUA+TRANVÍA)

Cuando se introduce el Bono Vía en la máquina de validación del viaje, se graba en él un código numérico de diecinueve cifras partido en dos bloques: un primero de siete y un segundo de doce, separados por un espacio en blanco. **¿Qué significan?**

Sugerencias de trabajo: ¿Qué información debe contener? ¿A quién interesa? Poner algunos casos. De ahí extraer los bloques de información posibles: localización temporal y localización física. Investigar. Hacer hipótesis. Verificarlas. Soluciones posibles. Predicción. Comprobación. Hay todo un campo muy interesante para trabajar. Es importante disponer de algunos bonos usados para la parte de observación e investigación y un par de ellos nuevos para la parte de exploración, predicción y verificación.

Y aquí queda todo de momento. Háganos caso. Escriban mensajes a esta sección y cuenten sus soluciones y experiencias o, si lo prefieren, propongan sus propios problemas. Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera del próximo NÚMEROS.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**

El **Club Matemático** está formado por los profesores
José Antonio Rupérez Padrón, del **IES de Canarias-Cabrera Pinto** (La Laguna), y
Manuel García Déniz, del **IES Tomás de Iriarte** (Santa Cruz de Tenerife).
mgarden@gobiernodecanarias.org / jruppad@gobiernodecanarias.org