NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 70, abril de 2009, páginas 35–51

Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico

Julio C. Barreto García (Instituto Universitario de Tecnología Antonio José de Sucre)

Fecha de recepción: 10 de septiembre de 2008
Fecha de aceptación: 28 de febrero de 2009

Resumen En este artículo mostraremos unas extensiones del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica, tomando en consideración el área de las figuras geométricas que están sobre los lados de un triángulo rectángulo y de esta manera ver que se cumple la relación Pitagórica para cualquier tipo de figuras que cumplan cierta condición. En particular, esta extensión la vamos a realizar usando las cuadraturas del rectángulo o del triángulo, como por ejemplo para el triángulo equilátero y luego para los semicírculos o las lúnulas, para lo cual cuadratura es lo mismo que decir área.

Palabras clave Área, Teorema de Pitágoras, Cuadratura, Media geométrica, Lúnula.

Abstract In this article we consider an extension of the classical geometric Pythagoras theorem, taking into consideration the areas of the geometric figures which by on the side of rectangular triangle. In this way we see that the Pythagoras relationship holds for every kind of figures which satisfy certain conditions. In particular, this extension we will make using the quadrature of the rectangle or triangle, like for example for the equilateral triangle and soon for the semicircles or the lune, for which squaring is the same as saying the area.

Keywords Area, Pythagoras theorem, Quadrature, Geometrical mean, Lune.

1. Introducción

El desarrollo de los *procesos cognitivos* en el campo de la *Didáctica de la Matemática* es capaz de ayudar a nuestros estudiantes en la resolución de problemas de geometría, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por Duval (1998) y desarrollados por Torregrosa, G. y Quesada, H (2007) en la ultima referencia, en donde el proceso cognitivo de *visualización* está íntimamente relacionado con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente.

La coordinación de estos *procesos cognitivos* les permitirá construir una teoría que generalizara un poco el Teorema de Pitágoras, tomando en consideración los triángulos equiláteros, semicírculos, lúnulas o cualquier otra figura geométrica que se coloque sobre los lados de un triángulo rectángulo cualquiera, tomando en consideración la idea de área, y partiendo de una demostración hecha para el caso donde son cuadrados los que están sobre esos lados, esto es, si A y B son las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo y C es el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa, entonces se debe cumplir que $A+B=C$.

2. Relevancia del trabajo para la educación matemática

En la historia de la matemática, se le atribuye a Bhaskara una demostración del Teorema de Pitágoras en el siglo XII en donde asocio la formula $a^2 + b^2 = c^2$ con el área de los cuadrados que estaban sobre los lados de un triángulo rectángulo (a y b sobre las longitudes de los catetos y c sobre la longitud de la hipotenusa) y operando con los cuadrados que estaban sobre las longitudes de los catetos logro formar el cuadrado que esta sobre la longitud de la hipotenusa.

Ahora, durante mucho tiempo, tomando en consideración la idea de área se ha pensado en la posibilidad de construir figuras geométricas sobre los lados del triángulo rectángulo que cumplan esta relación y operando con los triángulos equiláteros, polígonos regulares, semicírculos y lúnulas nos damos cuenta que efectivamente se cumple.

Esta nueva forma de ver el Teorema de Pitágoras, diferente en cierto modo a la de Bhaskara, permitirá a nuestros estudiantes divertirse operando con figuras geométricas junto a sus compañeros, fomentando la unión grupal y les servirá para ir conociendo un poco lo que en matemática significa el concepto de generalización o extensión, no solo por el hecho de no ser ya cuadrados, sino por que aprenderá a cuadrar (transformando los triángulos equiláteros en rectángulos mediante una reconfiguración aplicando la Proposición 13 del sexto libro de los Elementos la cual es la cuadratura del rectángulo), los triángulos cualesquiera mediante la cuadratura del triángulo (Proposición 10 del primer libro de los Elementos) y a partir de allí podemos aplicárselos a cualquier polígono por aplicaciones repetidas dividiéndolos en triángulos.

Siguiendo la misma línea nos damos cuenta que de una manera muy aproximada podemos extender el Teorema de Pitágoras al caso en el cual sean semicírculos los que estén sobre los lados del triangulo rectángulo, tal como lo señala Jiménez, 2004, pp 103-117, cuando dice: Manteniendo la línea de pensamiento griego orientada hacia la comparación de figuras, Arquímedes demuestra que cualquier círculo “es igual” (es decir tiene la misma área) que un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio y el otro igual a la circunferencia del círculo.

En tal sentido, cuando tengamos lo semicírculos sobre los lados del triángulo rectángulo podemos aplicarle lo anterior a cada uno, y luego que obtengamos los triángulos rectángulos respectivos usamos la cuadratura del triángulo a cada uno para transformarlos en cuadrados y volvemos a usar la parte primera para ver que se cumple la relación Pitagórica para los semicírculos.

Por su parte, existen otras figuras geométricas curvilíneas como lo son las lúnulas, las cuales cumplen la relación del Teorema de Pitágoras cuando están sobre los lados de un triángulo rectángulo, en ese sentido lo que podemos obtener para cada lúnula son triángulos isósceles que sean de área “igual” al de las lúnula y aplicarle la cuadratura respectiva a cada una de ellas hasta obtener la relación deseada a través de los cuadrados que se forman, los cuales cumple con todo lo mencionado al principio.

3. Marco teórico y calidad bibliográfica

El campo de la *Didáctica de la Matemática* ha tomado un auge en los últimos años, debido al estudio que ella ha realizado en relación a los *procesos cognitivos* que deben desarrollar nuestros estudiantes al resolver los problemas de geometría en los cuales estén envueltos.

En este articulo usaremos el modelo propuesto por Duval, en el cual se restringe un poco el concepto de *visualización* al de *aprehensión* en el cual "Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar" según el Diccionario de la Real Academia Española (2001).

En estas *aprehensiones*, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante ve intuitivamente el Teorema de Pitágoras y la cual es llamada *aprehensión perceptiva* e iremos hacia una que conlleva a modificar la configuración inicial y es llamada *aprehensión operativa*, esto nos llevara a un *razonamiento configural* de un *anclaje visual* (ver por ejemplo los triángulos equiláteros) a un *anclaje discursivo* (Teórico: Usar las cuadraturas).

Cabe destacar además que aprovechamos las acepciones geométricas del producto notable del cuadrado de una suma y de una diferencia de dos cantidades dado en 8^{vo} grado, para deducir el Teorema de Pitágoras usado en 9^{no} grado pero también desde un punto de vista geométrico y más aun cuando sean cuadrados los que están sobre los lados del triángulo rectángulo, así mismo la noción geométrica de la media geométrica nos permitirá extender el Teorema de Pitágoras cuando estas sean diferentes figuras poligonales (triángulos equiláteros, pentágono, hexágono, etc.) y estén sobre los lados del triángulo rectángulo, o también cuando sean semicírculos, o lúnulas las que estén sobre estos lados del triángulo rectángulo cualquiera.

4. Resultados

4.1. Teorema de Pitágoras: Extensiones a través de algunos Métodos Geométricos conocidos

"La Geometría existe en todas partes... En el disco del sol, en la forma del datilero, en el arco iris, en el diamante, en la estrella de Mar, en la tela de araña y hasta en un pequeño grano de arena".

Platón. Filosofo griego.

Motivación: El Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica (comparación de áreas) dice que las áreas A B y C de los cuadrados que se forman sobre las longitudes de un triángulo rectángulo como el de la **Figura 1** de abajo:

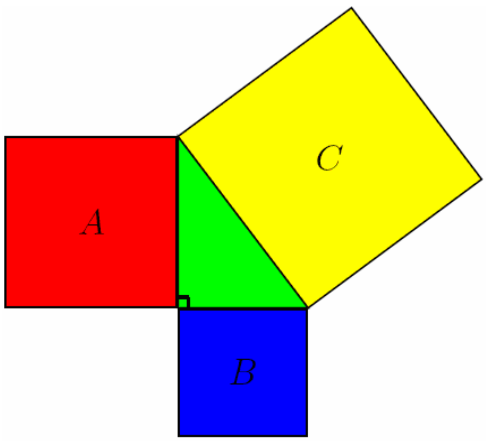

Figura 1: Conclusión hallada para el Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica para un triángulo rectángulo cualquiera, en el cual se cumple que $C = A + B$.

Esto lo podemos ver analizando las siguientes formas de triángulos rectángulos, como los de la **Figura 2** de abajo:

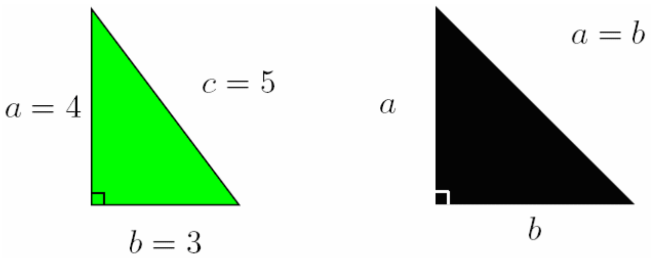

Figura 2: A la izquierda se muestra un triángulo rectángulo notable de magnitudes 3, 4 en los catetos y 5 en la hipotenusa. A la derecha un triángulo rectángulo isósceles (triángulo isorrectángulo) de lados iguales a la unidad en los catetos.

Luego tenemos, lo siguiente mostrado en la **Figura 3** de abajo:

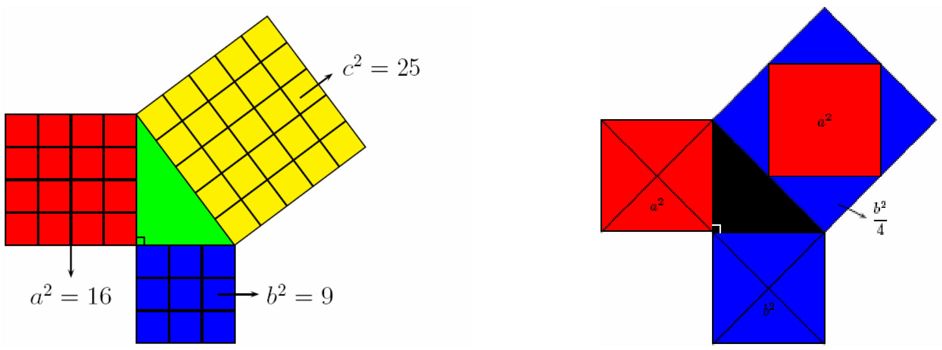

Figura 3: A la izquierda vemos la división de cada cuadrado en tantos cuadraditos como unidades tenga los cuadrados originales construidos sobre los lados del triángulo rectángulo notable, aplicando una aprehensión operativa de cambio figural[1]. A la derecha dividimos los dos cuadrados construidos sobre los lados del triángulo isorrectángulo, siguiendo las diagonales, para obtener ocho piezas de forma triangular, aplicando una *aprehensión operativa de cambio figural* en el triángulo isorrectángulo.

Así, nos queda en la **Figura 3** de arriba a la izquierda tenemos la siguiente igualdad numérica: $16 + 9 = 25$, O bien, se cumple que: $a^2 + b^2 = c^2$. Además según la **Figura 3** de arriba a la derecha, nos queda que se cumple de nuevo lo siguiente: $a^2 + b^2 = c^2$. Pero estos dos métodos geométricos no son mutuamente aplicables[2].

Ahora bien, si llamamos:

$$c^2 = (a - b)^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right).$$

Donde este cuadrado lo formamos con un cuadrado de lado $(a - b)$ de color negro y cuatro triángulos rectángulos verdes que salen de los dos rectángulos verdes, como veremos en la **Figura 4** de abajo:

[1] Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos (creando nuevas subconfiguraciones).
[2] Para mayor información ver Barreto, 2008, en la tercera referencia.

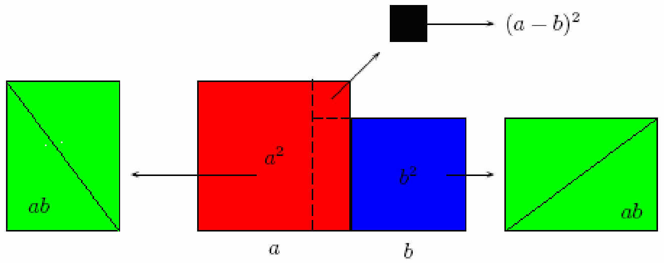

Figura 4: Producto notable del cuadrado de la diferencia de dos cantidades visto desde una perspectiva geométrica.

Veremos que efectivamente c^2 es otro cuadrado de lado c, es decir, se puede formar de la suma de estas dos áreas (a^2 y b^2). Y este también es un cuadrado de lado c, mediante la construcción que se realizo. Es decir, colocando el cuadrado de lado $(a-b)$ de color negro y cuatro triángulos rectángulos verdes con el color amarillo buscado en la **Figura 5** de abajo se muestra:

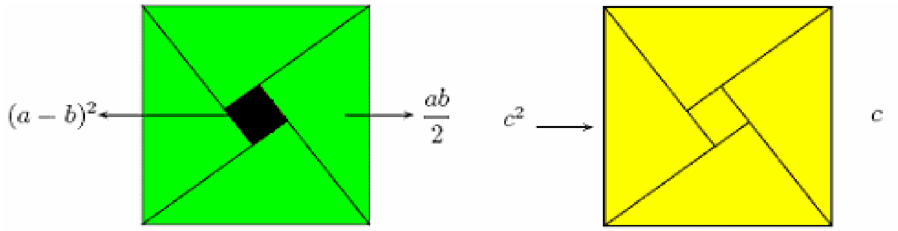

Figura 5: A la izquierda se muestra como se forma aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración*[3] este cuadrado de lado c usando los cuatro triángulos rectángulos verdes y el cuadradito negro. En la derecha vemos que efectivamente este es el cuadrado de color amarillo de lado c buscado.

Y además, esa es la longitud del triángulo rectángulo que tiene en la hipotenusa longitud igual a c, así por el *razonamiento como un proceso configural*[4], nos queda el siguiente *truncamiento*[5] mostrado en la **Figura 6** de abajo:

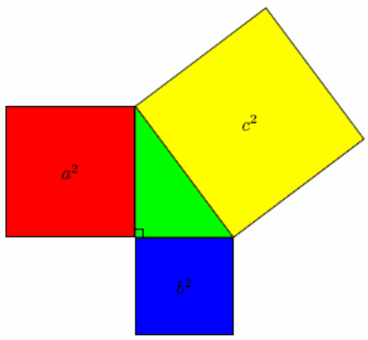

Figura 6: Conclusión hallada para el Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica para un triángulo rectángulo cualquiera.

[3] Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle.
[4] Es la coordinación entre la aprehensión discursiva y la operativa.
[5] Es cuando la coordinación proporciona la "idea" para resolver deductivamente el problema (conjeturando afirmaciones que se prueban). Conduce a la solución de un problema.

Y así podemos concluir lo siguiente:

Teorema 1: En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos.

4.1.1 Veamos la siguiente Pre-generalización (Figuras poligonales)

Aceptando la versión usual del Teorema de Pitágoras (**Teorema 1**), mediante una *aprehensión perceptiva*[6], se puede demostrar que:

Teorema 2: En todo triángulo rectángulo, el área del triángulo equilátero construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre las longitudes de los catetos.

Geométricamente veamos la **Figura 7** de abajo:

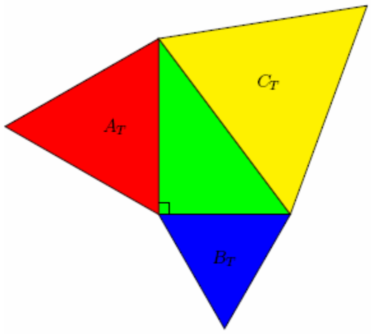

Figura 7: En la figura vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, donde se extiende el caso a otras figuras geométricas como los triángulos equiláteros, es decir, $C_T = A_T + B_T$.

Prueba: Una ilustración de la proposición a demostrar es la siguiente:

Sea la **Figura 8** de abajo:

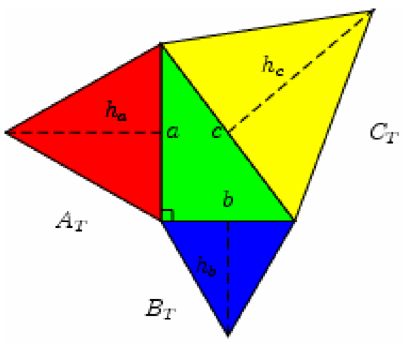

Figura 8: Nueva subconfiguración de la **Figura 7**, a la cual le aplicamos una aprehensión operativa de cambio figural.

[6] Es la primera en ser usada a lo largo de toda la etapa educativa y también la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del alumno. Es un proceso más intuitivo e identificativo.

Donde ABC es un triángulo rectángulo de hipotenusa c y catetos a, b.

Además, $h_{a,} h_b$ y h_c son las alturas correspondientes a los lados a, b y c respectivamente.

Luego, pasando de este *anclaje visual* a uno *discursivo*[7] donde tenemos que si A_T, B_T y C_T representan las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del triángulo rectángulo ABC, entonces aplicando la versión lineal del Teorema de Pitágoras tenemos que:

$$B_T = \frac{bh_b}{2} = \frac{b\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{3}b^2}{4}.$$

Análogamente,

$$A_T = \frac{ah_a}{2} = \frac{a\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Y también ocurre que,

$$C_T = \frac{ch_c}{2} = \frac{c\sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{3}c^2}{4}.$$

Así,

$$A_T + B_T = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}b^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = C_T.$$

Por tanto,

$$A_T + B_T = C_T.$$

Vamos a usar las dos siguientes formas a través de cuadraturas, esto no es más que conseguir el área de una figura la cual equivale a compararla con otra figura.

El cuadrado, es la figura rectilínea perfecta por excelencia, y se impuso desde el principio como el principal patrón de comparación, de allí que la palabra "cuadratura" fuera utilizada como una forma de referirse a lo que hoy denominamos calculo del área, según Jiménez, 2004, pp 103-117.

Hagámoslo construyendo con regla y compás, ya que tiene un significado "sui generis", puesto que esto fue lo que hicieron los propios griegos, según nos cuenta el mismo Jiménez, 2004, pp 103-117.

---

[7] Es la asociación de un dibujo a una afirmación matemática.

4.1.1.1. Usando la cuadratura del rectángulo

Este problema es el mas sencillo de plantear ya que consiste en encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo dado.

La solución de este problema según Jiménez, 2004, pp 103-117, está en la proposición 13 del sexto libro de los Elementos, en la que se muestra como construir un segmento que sea media geométrica entre otros dos.

La construcción en cuestión la haremos haciendo una circunferencia cuyo diámetro es la suma de los lados del rectángulo y en el punto de enlace de ambas longitudes dibujamos una perpendicular al diámetro hasta la circunferencia: El segmento así generado es el lado del cuadrado buscado. Veamos la siguiente **Figura 9**, aplicando una *aprehensión discursiva*[8], cambiando del *anclaje discursivo* al *anclaje visual*[9]:

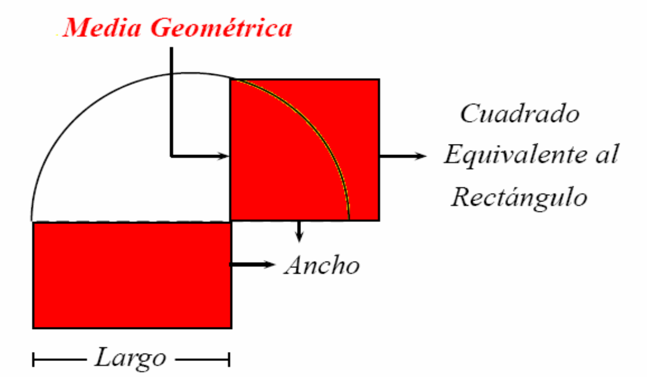

Figura 9: Representación geométrica de la cuadratura del rectángulo.

Así, formemos unos rectángulos dividiendo a través de la altura de los triángulos equiláteros dados en la figura geométrica del **Teorema 2**, es decir, la **Figura 7**, mediante un mediante una *aprehensión operativa de reconfiguración*[10], es decir veamos la **Figura 10** de abajo:

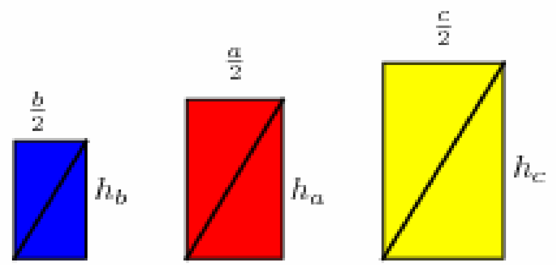

Figura 10: Rectángulos formados al dividir mediante una aprehensión operativa de cambio figural los triángulos equiláteros construidos sobre los lados del triángulo rectángulo de la **Figura 7**, los cuales se logran formar aplicando una aprehensión operativa de reconfiguración.

[8] Es la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Tal vínculo puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se denomina cambio de anclaje.
[9] Es la asociación de una afirmación matemática a un dibujo.
[10] Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle.

Luego, busquemos el cuadrado que se equivalente a estos rectángulos, usando la afirmación anterior. El *razonamiento teórico*[11] nos dice que lo podemos hacer a través de la cuadratura del rectángulo, como veremos en la **Figura 11** de abajo:

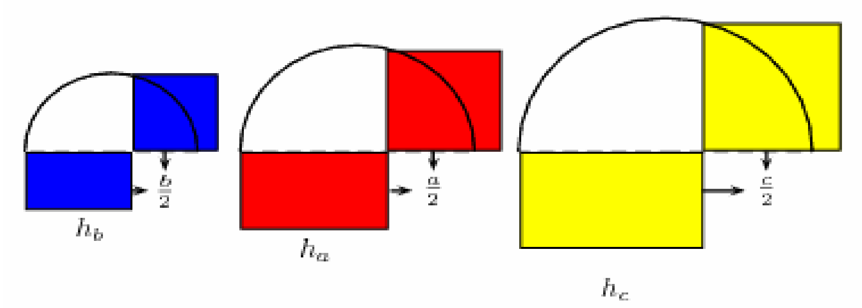

Figura 11: Aplicación geométrica de la cuadratura del rectángulos a los rectángulos de la **Figura 10**, dado lo planteado en la **Figura 9**.

Ahora solo basta ver que el área del cuadrado amarillo es igual a la suma del área del cuadrado rojo más el área del cuadrado azul.

Esto lo hacemos utilizando del procedimiento realizado en la parte anterior para deducir el **Teorema 1**, para cuadrados, y esta igualdad de estas áreas de estos cuadrados implica por transitividad la igualdad para los triángulos rectángulos de donde se originaron y por tanto también para los triángulos equiláteros .

4.1.1.2. Usando la cuadratura del triángulo

La cuadratura de un triángulo, por su parte, según Jiménez, 2004, pp 103-117, se sustenta en la proposición 10 del primer libro de los Elementos, es decir, dividir en dos partes iguales una recta finita dada y en la cuadratura anterior, pues bastaría prolongar la base del triángulo en la mitad de la altura del triángulo y tomar la media geométrica de estas dos cantidades como el lado del cuadrado buscado.

Así, cambiando del anclaje discursivo al anclaje visual, tenemos la **Figura 12** de abajo:

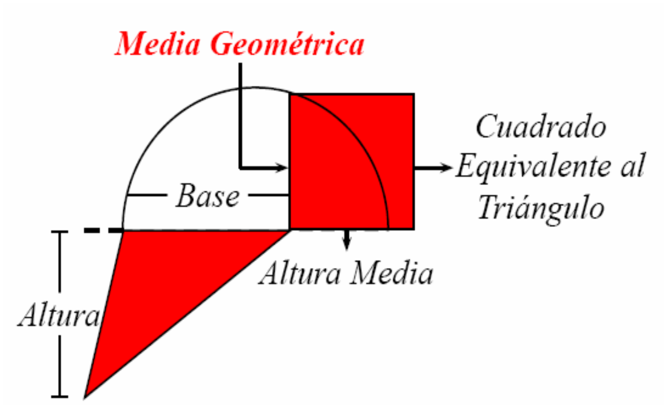

Figura 12: Representación geométrica de la cuadratura del rectángulo.

[11] Utiliza sólo teoremas, axiomas o definiciones para llegar a la conclusión, esta estructurado deductivamente. Se coordina la *aprehensión discursiva-operativa* en el proceso configural.

Luego se puede utilizar el procedimiento mencionado en la cuadratura del rectángulo a los triángulos equiláteros de la **Figura 7**, pero tomando ahora la base del triángulo equilátero y la mitad de la altura para cada uno de esos triángulos equiláteros.

Con estas herramientas a la mano es sencillo cuadrar cualquier polígono por triangulación y aplicaciones repetidas del Teorema de Pitágoras (Proposición 47 del primer libro de los Elementos) esto según Jiménez, 2004, pp 103-117.

Así, el polígono de la figura de abajo se descompone en los triángulos T_1, T_2 y T_3 cuyas cuadraturas producen los cuadrados C_1, C_2 y C_3 de lados c_1, c_2 y c_3, respectivamente.

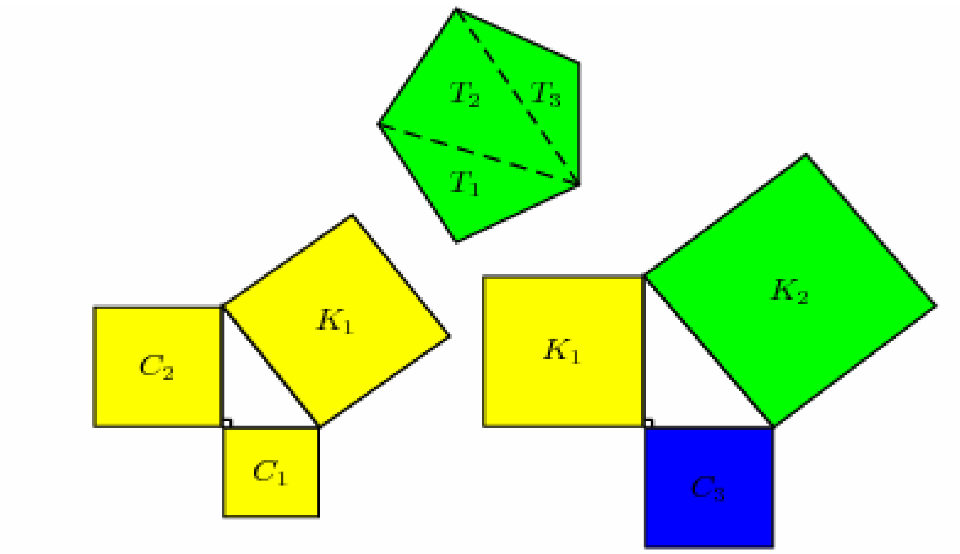

Figura 13: Geométricamente vemos la cuadratura del polígono verde.

Así podemos aplicar todo lo anterior a cualquier polígono que este sobre los lados del triángulo rectángulo, como por ejemplo los pentágonos como los de la **Figura 14** siguiente:

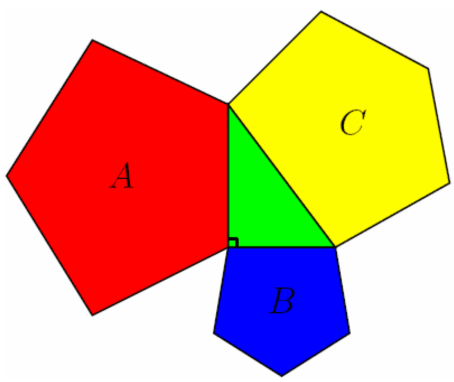

Figura 14: Geométricamente vemos una extensión del Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica a otras figuras poligonales. En este caso los pentágonos regulares también satisfacen que $A+B=C,$ donde A, B y C denotan las áreas de los pentágonos que están sobre los lados del triángulo rectángulo.

Tomando uno de los pentágonos como el de la **Figura 15** de abajo:

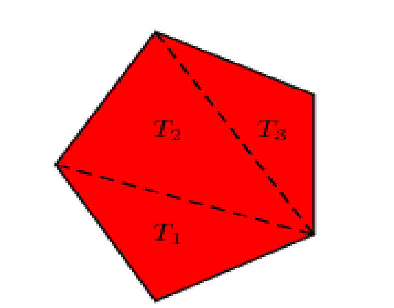

Figura 15: Pentágono regular al que se le aplico una *aprehensión operativa de cambio figural* trazando unas diagonales a través de algunos de su vértices opuestos

Este polígono de la **Figura 15** de arriba se puede descomponer en los triángulos T_1, T_2 y T_3 cuyas cuadraturas producen los cuadrados C_1, C_2 y C_3 de lados c_1, c_2 y c_3, respectivamente y nuevamente una aplicación del teorema de Pitágoras nos da un cuadrado K_1 de área $c_1^2 + c_2^2$ y la siguiente el cuadrado K_2 de área $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$.

Además podemos enunciar un teorema de Pitágoras en su acepción geométrica para este caso de polígono regular como el pentágono y así sucesivamente para otros polígonos regulares como los hexágonos, heptágono, etc. Esto lo hacemos construyendo con regla y compás, ya que tiene un significado "sui generis", puesto que esto fue lo que hicieron los propios griegos, según nos cuenta el mismo Jiménez, 2004, pp 103-117.

Al Margen: La construcción de los triángulos rectángulos exigidos se sustenta en las proposiciones 2 y 11 del primer libro de los Elementos.

La primera permite construir segmentos de cualquier tamaño y la segunda, ángulos rectos en puntos dados de un segmento.

De acuerdo a Evariste Galois (1811-1832), el proceso para llegar a la solución para resolver un problema con regla y compás es el siguiente:

> Cada una de las etapas de un problema a resolver con regla y compás se reduce a una ecuación de primero o segundo grado y, por consiguiente, todos los problemas resolubles con regla y compás se reducen a una ecuación algebraica con una incógnita cuya solución implica la extracción de una cadena de raíces cuadradas.

Recíprocamente:

> Si la solución de un problema geométrico se reduce a la solución de una ecuación algebraica de este tipo, dicho problema puede ser resuelto con regla y compás; ello es así porque las raíces cuadradas pueden construirse con regla y compás.

Entonces, para demostrar que un problema geométrico puede ser resuelto con regla y compás debe plantearse, en primer lugar, una ecuación algebraica equivalente al problema dado (En nuestro caso las cuadraturas del triángulo y el rectángulo), luego si no es posible hallar tal ecuación entonces el problema no tiene solución.

Por ejemplo, en la cuadratura del rectángulo cambiando del anclaje discursivo al anclaje visual, nos queda la **Figura 16** de abajo:

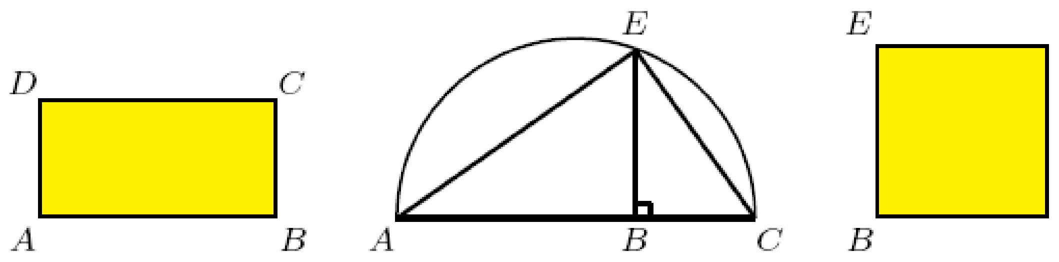

Figura 16: Aquí tenemos un rectángulo $ABCD$ donde tenemos que las longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ forman el diámetro de la semicircunferencia en la que se cumple: $\overline{BE}^2 = \overline{AB} \times \overline{BC}$.

4.1.2. Otra Pre-generalización (Figuras curvilíneas)

Sin embargo, todos estos procedimientos mencionados anteriormente sólo funcionan bien cuando se trata de cuadrar figuras poligonales, mas no para regiones cuya frontera es curva como por ejemplo, el círculo.

En este sentido, hay un resultado recogido en los Elementos que es clave en todo este asunto: La proposición 2 del décimo segundo libro de los Elementos de Euclides que dice que los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros. En el lenguaje moderno, si A_i es el área de un círculo i de diámetro d_i, entonces

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^{\,2}}{d_2^{\,2}}.$$

Independientemente de los círculos A_1 y A_2.

Ésta demostrada en los Elementos con una base teórica provista por uno de los mejores discípulos de Platón, el matemático Eudoxo. Se conoce como método de exhaución y es uno de los antecedentes del moderno cálculo integral.

La demostración procede por comparación del área del círculo con las áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos y el análisis de las pequeñas diferencias entre estas áreas, que se reducen al aumentar el número de lados de los polígonos.

Sin embargo, demostraciones como estas, basadas en procesos que potencialmente estamos en capacidad de repetir cuantas veces deseemos, es decir lo que hoy llamamos procesos infinitos, mostraban la dificultad de conseguir la cuadratura del círculo.

Aceptando la versión usual del Teorema de Pitágoras, mediante una *aprehensión perceptiva*, se puede demostrar que:

Teorema 3: En un triángulo rectángulo, el área de un semicírculo construida sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidas sobre las longitudes de los catetos.

Geométricamente veamos la **Figura 17** de abajo:

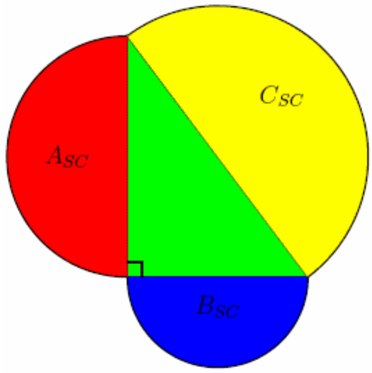

Figura 17: En la figura vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, donde se extiende el caso a otras figuras geométricas como los semicírculos, es decir, $C_{SC} = A_{SC} + B_{SC}$.

Veamos la **Figura 18** de abajo:

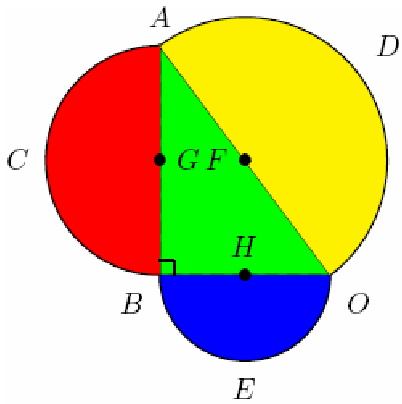

Figura 18: Subconfiguración de la **Figura 17**.

Calculando, cambiando del *anclaje visual* al *anclaje discursivo*:

- Área del semicírculo de diámetro OB : $A_{BEOH} = \dfrac{\pi \overline{OB}^2}{8}$.
- Área del semicírculo de diámetro AB : $A_{BCAG} = \dfrac{\pi \overline{AB}^2}{8}$.
- Área del semicírculo de diámetro OA : $A_{ADOF} = \dfrac{\pi \overline{OA}^2}{8}$.

Así, comparando las sumas de las áreas obtenidas por una *aprehensión discursiva* en (1), (2) y (3) tenemos mediante un *razonamiento como un proceso configural*, el siguiente *truncamiento*:

$$\frac{\pi\overline{OB}^2}{8}+\frac{\pi\overline{AB}^2}{8}=\frac{\pi}{8}\left(\overline{OB}^2+\overline{AB}^2\right)=\frac{\pi\overline{OA}^2}{8}.$$

O lo que es lo mismo:

$$A_{BEOH}+A_{BCAG}=A_{ADOF}.$$

Sin duda que en este aspecto quien recoge los más cerrados aplausos es Arquímedes, en particular con su pequeña obra **Medida del círculo**, de la que queremos comentar algunos puntos. Sabiendo que hay una razón constante entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, así como también una razón constante entre el área de un círculo y el cuadrado de su diámetro, Arquímedes se interrogó sobre la relación entre estas dos constantes.

Nos cuenta Jiménez, 2004, pp 103-117, que manteniendo la línea de pensamiento Griego orientada hacia la comparación de figuras, Arquímedes demuestra que cualquier círculo "es igual" (es decir, tiene la misma área) que un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio del círculo y el otro igual a la circunferencia del círculo, como se muestra en la **Figura 19** de abajo:

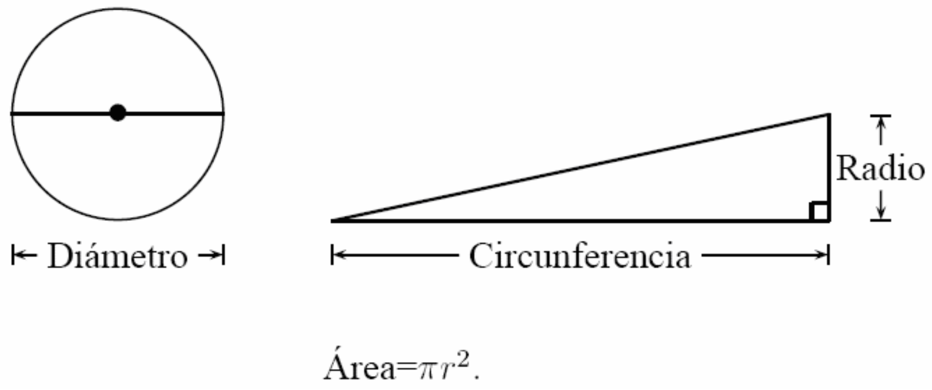

Figura 19: Cuadratura aproximada del circulo según Arquímedes.

La demostración de esta equivalencia es una joya intelectual tallada con dos herramientas que el analista de hoy maneja con soltura, pero que para la época en que fueron aplicadas significaron un salto intelectual de magnitud.

Ahora bien, a partir de esta forma de cuadrar aproximadamente los semicírculos que están en los lados del triángulo rectángulo podemos aplicarlo a cada uno de estos semicírculos, luego usar la cuadratura de los triángulos y seguir usando todo este procedimiento para lograr comparar estas áreas como lo hecho para el **Teorema 2**.

Como consecuencia de la resolución del problema de cuadrar un círculo, es decir, de construir con regla y compás el lado de un cuadrado de área igual a la de un círculo de radio dado es lo que condujo al descubrimiento de los números trascendentes, lo cual fue un desarrollo de la matemática. De los intentos por resolver este problema condujeron a la demostración de que no existe una ecuación algebraica que relacione el cuadrado con el radio del círculo; en otras palabras, el lado de ese cuadrado no es expresable en función del radio a través de una cadena de raíces cuadradas.

4.1.3. Otra Pre-generalización (Más figuras curvilíneas)

Aceptando la versión usual del Teorema de Pitágoras, mediante una *aprehensión perceptiva*, se puede demostrar que:

Teorema 4: En un triángulo rectángulo, el área de la lúnula construida sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las lúnulas construidas sobre las longitudes de los catetos.

Geométricamente, veamos la **Figura 20** de abajo:

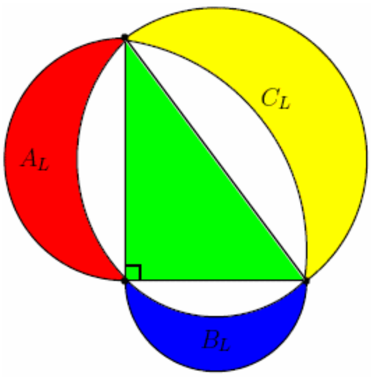

Figura 20: En la figura vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, donde se extiende el caso a otras figuras geométricas como las lúnulas, es decir, $C_L = A_L + B_L$.

La proposición 2, del décimo segundo libro de los Elementos de Euclides se atribuye según Jiménez, 2004, pp 103-117, a un matemático del siglo V a.C. que tiene el mismo nombre de un también famoso medico griego: Hipócrates.

El nuestro (el matemático) era originario de la isla de Chios y fue el primero que, motivado por la imposibilidad de conseguir la cuadratura del círculo, llevó las soluciones de cuadraturas mas allá de las figuras con fronteras poligonales.

Hipócrates logró cuadrar una figura que conocemos como lúnula y que mostramos en la **Figura 21** a la izquierda tomando en consideración la **Figura 21** a la derecha y abajo:

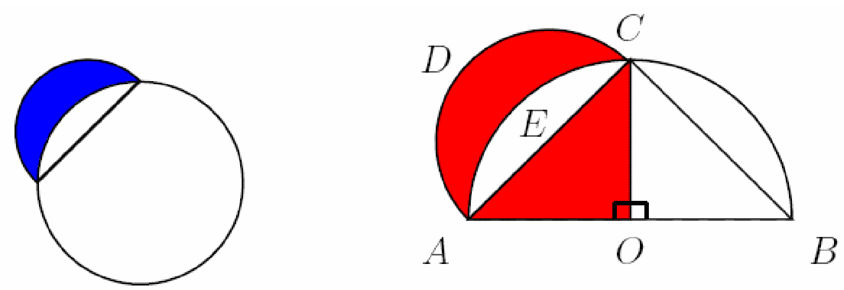

Figura 21: Lúnulas

Aquí lo que debemos obtener antes es que el área de la lúnula es equivalente al del triángulo AOC como vemos en la **Figura 21** de arriba para mayor información ver referencia de Jiménez, 2004, pp 103-117, y como el triángulo es una figura *cuadrable*, este resultado garantiza por transitividad que la lúnula también lo es.

Luego, podemos aplicar la Proposición 10 del primer libro de los Elementos el cual es la cuadratura del triángulo para hallar los cuadrados equivalentes y ver que se cumple la relación hicimos igual que la demostración del **Teorema 2**.

"Ninguna investigación merece el nombre de ciencia si no pasa por la demostración".

Leonardo da Vinci (1452-1519). Pintor, arquitecto, ingeniero italiano.

5. Interpretaciones y Conclusiones

En el estudio de está generalización o extensión del Teorema de Pitágoras, nuestros estudiantes aprenderán a cuadrar triángulos equiláteros con regla y compás (tal y como lo hacían los propios griegos según esta escrito el historia de la matemática) aplicando la teoría dada en la cuadratura de un rectángulo o en la cuadratura de un triángulo de los Elementos de Euclides.

En otro orden de ideas, así como podemos transformar un rectángulo en un cuadrado como vimos en la **Figura 3** parte derecha, también podemos mantener un triángulo equilátero que tenga la misma área que la suma de otros dos triángulos equiláteros de base dada usando este teorema tan importante. Así mismo podemos hacer con dos círculos con diámetros dados formar un círculo de área igual a la suma de estas dos, con las lúnulas, etc. Por lo que puedo decir que si de Leonardo da Vinci tenemos forma de perfecta en la cuadratura humana del hombre de Vitruvio donde en el pensamiento renacentista: *El hombre medida de todas las cosas, la belleza ajustada a cánones, equilibrio, proporción…* en los Pitagóricos tenemos: *La belleza de las cuadraturas de las formas geométricas y en la hipotenusa la razón áurea de la perfección geométrica en donde descansa la perfección del mundo en general, de acuerdo a sus diferentes formas, patrones y dimensiones…originando nuevas formulas en diversas ramas de las ciencias con sus respectivas demostraciones.*

En todo caso, al demostrar el Teorema de Pitágoras lo podemos usar para deducir diferentes relaciones como en la Identidad Trigonométrica $\cos^2\phi + sen^2\phi = 1$ en 1^{er} año del ciclo diversificado, la Ecuación de la Circunferencia en 2^{do} año del ciclo diversificado, Distancia, Valor Absoluto, Coordenadas Polares, Cilíndricas, Esféricas, etc. en Cálculo y Métrica a través de la distancia definida en Cálculo en Topología.

"No estoy de acuerdo con tus ideas, pero defiendo tu sagrado derecho a expresarlas."

Francois Marie Arouet Voltaire.

Bibliografía

Barreto, J. (2007). Otras deducciones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia de la matemática, como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje. F González (Presidente). Memorias del VI Congreso Venezolano de Matemática. (pp. 537-546). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Barreto, J. (2008). Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. *Números* [en línea] 69. Recuperado el 10 de abril de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros/

Barreto, J. (2008). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Números* [en línea] 69. Recuperado el 10 de abril de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros/

Barreto, J. (2009). Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del teorema de Pitágoras. Versión electrónica. *UNION* [en línea] 17. Recuperado el 10 de abril de 2009, de http://www.fisem.org/

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mannana. V. Villani (Eds), Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Jiménez, D. (2004). π la letra griega que los griegos no usaron. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 9 (1) 103-117.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. Relime 10 (2), 273-300. Publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Julio Cesar Barreto Garcia, Nací en la ciudad de San Felipe estado Yaracuy (Venezuela). Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Coordinador Académico de Investigación de la Organización de Investigaciones Matemáticas en Pregrado de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Primer Lugar en el VII Encuentro Nacional de Estudiantes de Ciencias 2006 efectuado en la Facultad de Ciencias de La Universidad del Zulia, actualmente soy profesor de Física y Matemática en educación media y diversificada en el LB José Antonio Sosa Guillen y en el Instituto Nacional de Cooperación Educativa, a nivel universitario soy docente de Matemática en el Instituto Universitario de Tecnología Antonio José de Sucre extensión San Felipe.
E-mail: juliocbarretog@hotmail.com