NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 70, abril de 2009, páginas 89–104

Geometría intuitiva desde el cuarto de baño

Carlos Duque Gómez (IES Mencey Bencomo)
Eva Mª Quintero Núñez (IES Mencey Bencomo)

Resumen Describimos una experiencia de geometría intuitiva, que relaciona la geometría tridimensional con la bidimensional a partir de la manipulación de los cilindros de cartón de papel higiénico. Con estas actividades se fomenta el reconocimiento de distintas formas geométricas y la simetría, y se contribuye a desarrollar la visión espacial y plana. Se puede realizar en cualquier nivel educativo (incluso con adultos) y se plantea de manera esencialmente práctica y lúdica.

Palabras clave Geometría, Manipulación, Visión espacial, Experiencia de aula.

Abstract We describe an experience of intuitive geometry, which relates the three dimensional geometry to the two-dimensional one from the manipulation of the cylinders of carton of hygienic paper roles. With these activities it is fomented the recognition of different geometric forms and the symmetry, and it helps to develop the spatial and flat vision. It can be carried out in any educational level (even with adults) and it is done in a practical and playful way.

Keywords Geometry, Manipulation, Spatial vision, Experience of classroom.

El mejor método para mantener despierto a un estudiante es seguramente proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco mágico, una chanza, una paradoja, un modelo, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades.

Martin Gardner, *Carnaval Matemático*, Prólogo (1975).

1. Introducción

Durante años, la geometría ha estado relegada a los últimos lugares del currículo que se desarrolla en el aula y que nunca da tiempo de abordar porque se acaba el curso. Cuando esto no sucede, ocurre con cierta frecuencia que la geometría enseñada (y aprendida) es una *geometría algebraizada*, consistente básicamente en la memorización de fórmulas y su aplicación inmediata. Es común ver cuadernos, ejercicios o exámenes de geometría en los que no hay dibujos, sino que el alumno pasa directamente del enunciado a la fórmula mágica que resuelve el problema sin necesidad de *visualizarlo* y, por supuesto, sin comprender realmente lo que está haciendo.

El resultado final de este tipo de enseñanza-aprendizaje es deficiente. Al cabo de un cierto tiempo (por lo general bastante corto), los alumnos olvidan las fórmulas y entonces *no saben nada* de geometría. No desarrollaron en su momento una adecuada visión espacial, no manipularon las figuras, los cuerpos, ni otros elementos geométricos, no son capaces de ver, dividir, deformar, predecir... Esta última es la verdadera geometría, la que queda en el conocimiento una vez que las fórmulas se olvidan (y parece inevitable que se olviden).

En los últimos años observamos una tendencia a recuperar el pensamiento geométrico y la intuición espacial en los currículos de Matemáticas. Muchos autores consideran inaplazable la recuperación de algunos contenidos espaciales e intuitivos de las Matemáticas, y en particular de la geometría. Nosotros también, y en esa línea se inscribe la actividad que presentamos, intentando que *los niños se convenzan de que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que, por el contrario, tienen sentido, son lógicas y son divertidas*[1].

Esta actividad pretende que los alumnos desarrollen su visión geométrica, sin necesidad de aprender fórmulas, usando permanentemente una *lógica geométrica* que debe ser practicada, pues no siempre se adquiere espontáneamente. La teoría y las fórmulas geométricas también pueden usarse e incorporarse a la actividad, en la medida que cada profesor estime conveniente y en función del nivel de los alumnos y del tiempo que se le quiera dedicar.

En este artículo describimos la actividad y su puesta en práctica, y exponemos algunas impresiones, respuestas, anécdotas y conclusiones fruto de nuestra experiencia en el aula. La hemos llevado a cabo en 3 cursos escolares y en 3 niveles diferentes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO): 2.º curso (13 años), 3.º curso (14 años) y 1.º curso del PCE [2] (15 y 16 años).

2. Objetivos y metodología

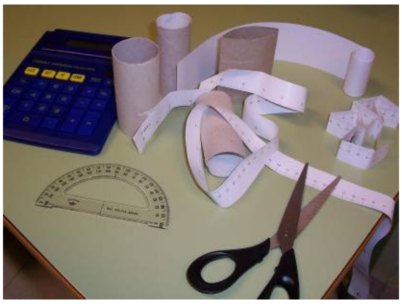
El objetivo principal es contribuir al desarrollo de la *visión geométrica* del alumnado, imaginando, intuyendo y prediciendo situaciones que contrastarán de forma manipulativa. Se repasan, además, las características de varias figuras planas (triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, trapecio, hexágono…). También se inician en el conocimiento del cilindro, la elipse y el número Pi.

2.1. Material

Cada alumno debe tener el siguiente material, aunque el profesor decide si debe tenerlo todo desde el comienzo o se le va suministrando a medida que vaya siendo necesario:

[1] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática (1992).
[2] **P**rograma de **C**apacitación profesional inicial Conducente al título de graduado en **E**SO. Este programa consta de dos años y los alumnos que lo cursan han repetido uno o los dos cursos del primer ciclo de ESO, sin haber superado en la mayoría de los casos prácticamente ninguna asignatura. Es una de las modalidades de los PCPI (Programas de Capacitación Profesional Inicial).

- Cilindros de cartón (de papel higiénico), como mínimo 5 por alumno. Mejor si son 10 ó más.
- Tijeras.
- Cinta métrica, preferentemente de papel (como las que ofrecen algunos comercios de muebles o bricolaje para que sus clientes tomen las medidas por sí mismos).
- Lápiz y regla.
- (*) Calculadora.
- (*) Transportador de ángulos.
- (*) Folios (para escribir, recortar plantillas de ángulos, experimentar...).
- (*) Cinta de papel (rollo de papel de máquinas sumadoras).
- Para el póster o mural que cierra la actividad, será necesario también disponer de cartulinas y pegamento, así como rotuladores, acuarelas, o los elementos de pintura y decorativos que se estimen convenientes.



La actividad puede ser simplificada, y no usar los materiales marcados con asterisco (*). En nuestras primeras prácticas lo hicimos así, y lo hemos ido ampliando en función de nuestra propia experiencia.

2.2. Temporalización

Lo ideal sería dedicarle a esta actividad 3 sesiones de clase completas, si bien puede recortarse y hacer solamente 1 ó 2. En función del curso, de las preferencias del profesor, de la dinámica y respuesta de los alumnos y del tiempo disponible, se seleccionan las cuestiones que se quieren llevar al aula, de entre las que componen la actividad completa.

En el anexo incluimos una temporalización real para dos sesiones de la experiencia llevada a cabo con 2.º curso de ESO.

2.3. Organización del aula

- En forma de U para el trabajo individual y por parejas. Así se destaca el papel central del profesor, como director de la actividad, se propicia la atención del alumnado y es más fácil el seguimiento de la sesión en el aula. El uso de la pizarra como apoyo a las explicaciones e instrucciones es también importante.
- Con los pupitres agrupados en 2 ó 3 para realizar los murales al final de la actividad.

2.4. Tratamiento de la diversidad

Ningún alumno se quedará parado o descolgado en las tareas a realizar. Todos saben trazar líneas y cortar con unas tijeras. Unos lo hacen midiendo con exactitud y buscando la perfección, otros *a ojo*. A estos últimos les pedimos reflexionar sobre el resultado obtenido, y repetir el corte para que salga mejor. Es importante que aprendan *solos*, que vean el resultado de su trabajo, sea correcto o erróneo. El método de ensayo y error es fundamental en esta actividad.

2.5. Método de trabajo

Todas las actividades deben ser *pensadas* e *imaginadas* antes de realizarlas. Primero se comprende lo que hay que hacer; luego se imagina cómo será el resultado; a continuación, se traza sobre el cilindro las líneas que marcarán los cortes; finalmente se realizan los cortes y se comprueba si todo ha salido bien.

3. Desarrollo de la experiencia

3.1. Sin cortar el cilindro

1. Mostrar un cilindro a los alumnos y pedir que lo describan. Conseguir, entre todos, una descripción verbal correcta y completa, que incluya los términos matemáticos y geométricos que sean necesarios. Reconocimiento del objeto como figura geométrica. Descripción por comparación o similitud con otros objetos conocidos.

Lógicamente, no surge en las descripciones de los alumnos el cilindro como «cuerpo de revolución», que es la más típica de las definiciones que encontramos en los libros de texto. Este cilindro sin tapas surge como cuerpo de revolución a partir de un segmento paralelo al eje de rotación. Nos parece un nivel de abstracción innecesario y hemos prescindido de esta visión. Surgen muchas palabras y expresiones llenas de imprecisiones («redondo» es la más frecuente), pero sí es rica la colección de objetos que ellos encuentran con forma cilíndrica: latas de conserva, un cd-rom («...es casi plano, pero es en realidad un cilindro, ¿verdad, profe?»), un euro, un pedazo de farola de la calle, el bote donde vienen las pelotas de tenis, las patas de los pupitres...

2. Medidas del cilindro. ¿Qué medidas lo definen? ¿Cuántas? Tomar las medidas con la máxima precisión posible. Hacer notar que obtendremos con seguridad medidas diferentes por parte de distintos alumnos, fruto de que no todos los cilindros serán completamente iguales (diferencias en el proceso de fabricación), no todos están en perfectas condiciones, y errores en el proceso de medición. La colección de datos obtenidos de las medidas realizadas por todos los alumnos nos facilita realizar una incursión en el mundo de la estadística. Probablemente la medida más acertada sea la media de todos los datos. La moda, si se dispone de una clara mayoría, también es adecuada.

La respuesta típica es que son suficientes dos medidas: el alto del cilindro y el diámetro. Es correcto, pero el diámetro tiene mucho margen de error, porque el cilindro es flexible y la presión de la mano al cogerlo y medirlo hace que la circunferencia del borde se *deforme en mayor o menor medida. Ver que las medidas de los diámetros tomados por todos tienen mayor variabilidad que si miden el contorno de la circunferencia.*

3. Calcular área y volumen. Recordar la fórmula del volumen del cilindro. Comparar con una lata de refresco, ¿cuánto refresco más (o menos) cabría en el cilindro de cartón que en la lata? Para calcular el área, provocar su deducción como rectángulo. ¿Y si tuviera *tapas*?

4. Definir el número pi (π) como el cociente entre la longitud y el diámetro de cualquier circunferencia. Estimarlo midiendo circunferencia y diámetro con la mayor precisión posible. Observar, también, que se obtendrán muchos valores diferentes. La misma incursión estadística es válida aquí. Aportar otros cilindros (cd-rom, tubo donde se guardan los cd-rom, pedazo de tubería de plástico o pvc, lata de refresco, barra de pegamento, lata de conservas, el borde de un vaso…). Llegar a la conclusión de que cuanto más grande sea el diámetro del cilindro (y más rígido, para que no se deforme la circunferencia en el momento de la medición) mejor aproximación de pi conseguiremos… ¿por qué?

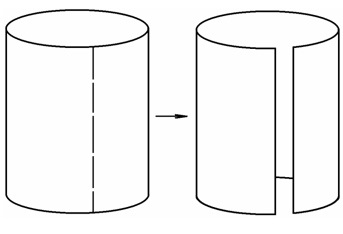
Estas dos últimas tareas se apartan de la esencia de la actividad (manipulativa, lúdica, centrada en la visión geométrica). Sólo las abordamos si vamos a disponer de las tres sesiones y si estimamos que el grupo de alumnos puede ser receptivo a este «formalismo».

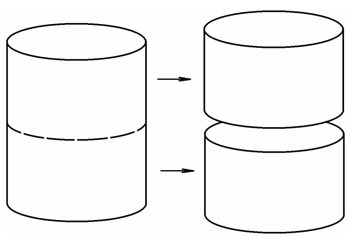
3.2. Cortando el cilindro sin doblarlo

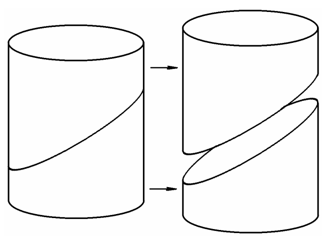
Todas las actividades de recorte deben ser planteadas de forma verbal, mostrando el cilindro y apoyándonos con dibujos en la pizarra. Con esa descripción verbal el alumno debe imaginar qué sucederá al cortar y expresarlo verbalmente. Es interesante provocar una discusión en la clase y ver si ellos llegan a una conclusión clara, si hay alumnos que son capaces de convencer a otros de sus conclusiones, y observar cómo expresan verbalmente situaciones y resultados de tipo claramente geométrico.

Se puede pedir a los alumnos que tomen notas en su cuaderno de clase, y que formalicen (en la medida de lo posible) lo que van descubriendo. Nosotros no somos partidarios de hacerlo. Esto le resta espontaneidad y sentido lúdico a la experiencia y conduce a los alumnos al demasiado frecuente *cartesianismo escolar*, que intentamos evitar en esta actividad.

5. ¿Qué figuras obtendremos si realizamos un corte *recto*, sin doblar ni deformar el cilindro? Buscar similitudes con situaciones conocidas, por ejemplo, el corte inclinado típico de las lonchas de salchichón. ¿Cómo se llaman las figuras obtenidas (tridimensionales y planas)?







Longitudinal | **Transversal** | **Oblicuo**

6. Si realizamos un corte longitudinal, ¿qué obtendremos, un cuadrado, un rectángulo apaisado o un rectángulo vertical?, ¿cómo podemos estar completamente seguros de la respuesta antes de cortar? (midiendo, por supuesto).

Es importante exigir un minuto de silencio para pensar las respuestas. Hay alumnos que tienen una buena visión espacial y dan rápidamente la respuesta correcta. Esto impide que otros alumnos mediten sobre la situación planteada. Esta reflexión es la que verdaderamente contribuye a desarrollar la visión geométrica que perseguimos.

Aparecen siempre las tres respuestas: cuadrado, rectángulo horizontal y rectángulo vertical. Para llegar a la conclusión de que saldrá un rectángulo horizontal hay que medir la longitud de la circunferencia, que será precisamente el lado horizontal del rectángulo resultante. Mostrar el cartón alternativamente en forma de rectángulo y de cilindro aclara de forma evidente cómo se calcula el área del cilindro y hace innecesario memorizar una fórmula.

¡UN MINUTO PARA PENSAR! A partir de aquí hay que repetir continuamente esta frase. Los alumnos que «ven» una respuesta quieren decirla rápidamente en voz alta.



7. ¿Y si hacemos un corte oblicuo, qué figura obtendremos? ¿siempre la misma? ¿da igual lo inclinado que hagamos el corte? Comparamos los resultados de diversos cortes inclinados que han hecho varios alumnos. Serán distintos romboides…

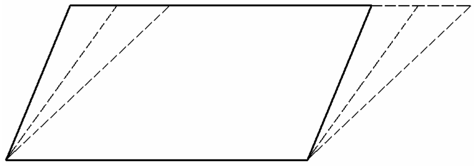
   Para no gastar demasiados cilindros, pedimos a tres alumnos que hagan cada uno un corte con distinto grado de inclinación (poco, medio y muy inclinado). El resto de la discusión se hace mostrando los 3 romboides obtenidos, apoyándonos con dibujos en la pizarra y, si es necesario, cortando algún cilindro más.

8. Provocamos la discusión del cálculo del área de todas las figuras obtenidas hasta ahora: rectángulo y distintos romboides…

   Aquí es importante llegar con los alumnos a estas conclusiones: (a) el área del romboide es b · h, ¡exactamente igual que el rectángulo! No importa la inclinación que tengan los lados laterales (los lados horizontales son siempre iguales y coinciden con la longitud de la circunferencia del cilindro); (b) las áreas son todas iguales… ¡porque todas tienen la misma cantidad (y por tanto superficie) de cartón!

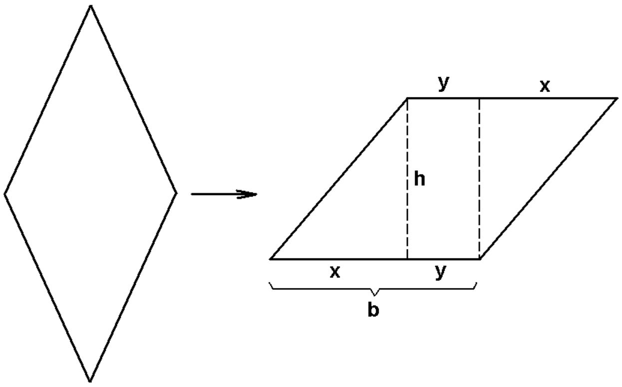
9. ¿Se podrá obtener un rombo? ¿Podrías marcar la línea por la que hay que cortar para que la figura plana que resulte sea un rombo?

No siempre surge espontáneamente la idea de que si inclinamos suficientemente el corte conseguiremos un rombo. En caso necesario la inducimos a partir del dibujo de un romboide en la pizarra, al que le vamos inclinando cada vez más los lados laterales, hasta que se hacen iguales que los lados superior e inferior.



Normalmente el trabajo de medir y trazar la línea de corte no lo puede hacer un alumno solo, es complicado colocar la cinta métrica de forma oblicua sobre el cilindro, de manera que el 0 se sitúe en el borde inferior y el punto de los 15 cm (aprox. mide 15 cm la circunferencia del cilindro) se sitúe en el borde superior. Una vez que se ha conseguido colocar la cinta hay que trazar la línea, uno sujeta la cinta y el otro hace el trazado.

Si el grupo de alumnos es receptivo, en este momento podemos mostrar otra manera de calcular el área del rombo. En lugar de la clásica fórmula A=(D·d)/2, o de la división del rombo en 2 ó 4 triángulos, también lo podemos calcular como si se tratara de un caso particular de romboide (A = base · altura), lo que a su vez coincide con la suma de las áreas de los dos triángulos rectángulos iguales y el rectángulo en que se divide el rombo (ver figura). No es, en absoluto, la mejor forma de calcular el área, pero se trata de darles siempre ejemplos de que «muchas cuestiones se pueden hacer bien de maneras distintas, siguiendo diferentes caminos».



$$A = b \cdot h$$

$$A = A_T + A_R + A_T = \frac{x \cdot h}{2} + y \cdot h + \frac{x \cdot h}{2} =$$

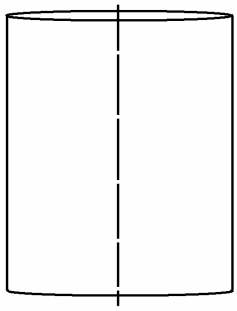
$$= x \cdot h + y \cdot h = (x + y) \cdot h = b \cdot h$$

10. ¿Y al revés? ¿Si unimos los lados inclinados de cualquier romboide obtendremos siempre un cilindro? ¿Y a partir de un rombo?

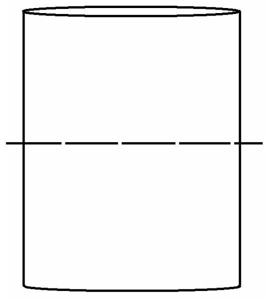
3.3. Cortes con el cilindro doblado

También aquí se debe *imaginar* primero y cortar después. El *doblado* del cilindro es siempre el mismo: *aplastar* el cilindro, de forma que quede plano, quedando dos rectángulos verticales superpuestos que tienen sus lados izquierdo y derecho unidos.

11. Doblamos, hacemos un corte *recto* (longitudinal u horizontalmente) y desdoblamos. ¿Qué figura(s) se obtiene se cada caso?



Corte longitudinal



Corte transversal

El corte transversal no presenta ninguna dificultad. Obtendremos dos cilindros igual de «anchos» pero la mitad de altos. Esto lo ven rápidamente todos los alumnos.

12. Seguimos trabajando con el corte longitudinal...

Se producirá la discusión sobre si lo que sale son dos cuadrados o dos rectángulos. Resulta sorprendente comprobar que muy pocos alumnos ven que el resultado del corte longitudinal por el centro es un par de rectángulos iguales del mismo tamaño que el que vemos al observar el cilindro aplastado.

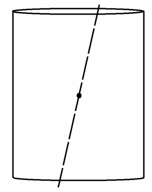
Una vez aclarado y demostrado que son rectángulos, la siguiente pregunta será: ¿por dónde debemos cortar para obtener un cuadrado?

Lógicamente, saldrá un cuadrado y un rectángulo vertical más estrecho, que «sobra»... esto no lo ven de forma inmediata algunos alumnos.

Puede desarrollarse así, más o menos:

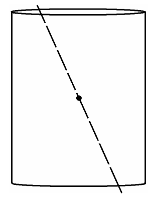
- *a.* *¿Salen las dos piezas del mismo tamaño?*
- *b.* *¿Son cuadrados o rectángulos? ¡Compruébalo!*
- *c.* *¿Y si «rodamos» el corte?*
- *d.* *Si quiero obtener una pieza (cuadrado o rectángulo) que tenga, por ejemplo, 4 cm de base (la altura será la altura total del cilindro), ¿por dónde hay que cortar?*
- *e.* *¿Por dónde hay que hacer el corte para que obtengamos un cuadrado?*
- *f.* *¿Por dónde debemos hacer el corte para que una pieza sea el doble de grande que la otra?*

13. Aplastamos el cilindro, realizamos un corte recto *inclinado* y desdoblamos. ¿Qué figuras se pueden obtener? Debemos guiar a los alumnos sucesivamente por los distintos tipos de cortes que se pueden realizar:

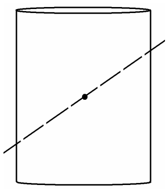
a) 

Pasando por el centro del rectángulo visible (cilindro aplastado) y sin llegar a las esquinas.

Siempre saldrán dos trapecios iguales, invertidos uno con respecto a otro. A muchos alumnos les salen los trapecios de tamaños diferentes, porque no marcaron con exactitud el punto medio o no hicieron un corte recto y preciso (con el doble cartón y una tijera pequeña es fácil torcerse).

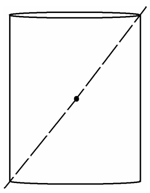
b) 

Si hacemos el mismo corte, pero hacia el otro lado, ¿qué figuras obtendremos?

c) 

Si el corte supera las esquinas...

...quedarán dos «troncos» de cilindro con la peculiaridad de que el borde cortado no será elíptico; tendrá «picos», producto de que el cilindro estaba «aplastado» cuando se cortó.

d) 

¿Qué ocurre si, partiendo del caso (a), vamos inclinando el corte cada vez más?

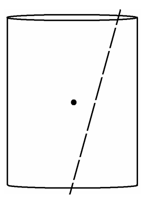
Los lados paralelos del trapecio se van ensanchando y estrechando.

¿Y si cortamos justo de esquina a esquina?...

¡Dos triángulos!

¿Serán triángulos rectángulos?

Muchos alumnos responden afirmativamente (lo que se ve antes de cortar tiene efectivamente un ángulo recto), pero es fácil deducir lo contrario, pues al abrir el doblez, el ángulo superior (que es menor de 45º) se duplica.

e) 

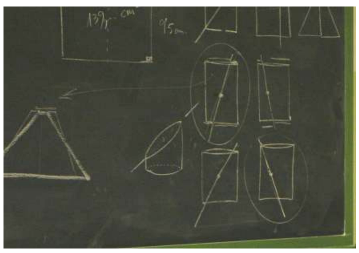
Volvemos al caso (a), pero realizamos un corte sin pasar por el centro. ¿Qué obtenemos?

Dos trapecios invertidos… pero no iguales.

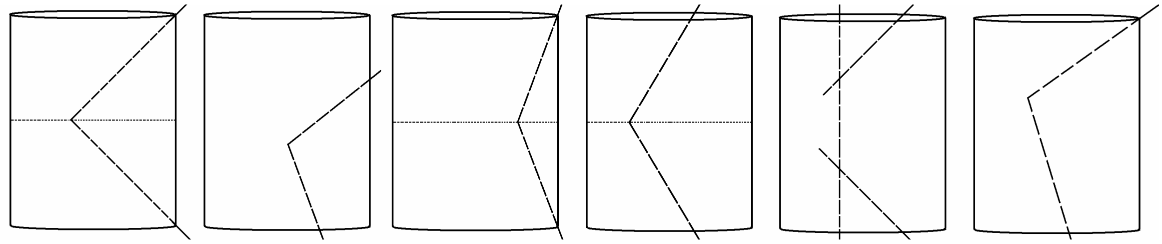
¿Y si el corte inclinado toca solamente una de las esquinas?

¡Un triángulo y un trapecio!

En función del tiempo y la cantidad de cilindros disponibles se pueden realizar todos estos últimos cortes, o ninguno, o sólo algunos, y dejar el resto exclusivamente para la discusión verbal. En este caso es importante el apoyo de la pizarra, aunque primero intentamos que los alumnos «vean» las figuras propuestas sólo con nuestra descripción verbal.



14. Doblamos, realizamos un corte *con esquina* y desdoblamos. ¿Qué figuras se podrán obtener? Si conseguimos un buen dominio de la figura cilíndrica *aplastada*, ¿podremos definir los cortes necesarios para obtener cualquier polígono regular o irregular?



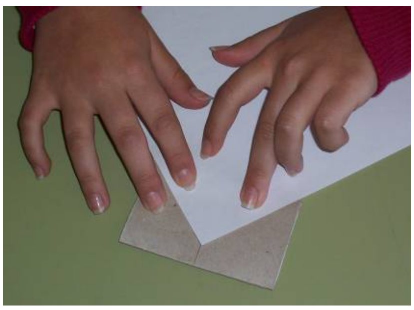
Cuadrado | **Pentágono** | **Rombo** | **Hexágono** | **Octógono** | **Pentágono regular más grande posible**

En estos cortes juega un papel fundamental la simetría. En el momento en que los alumnos descubren que basta con «imaginar» la mitad de la figura y trazarla sobre el cilindro aplastado, se les abre un mundo de posibilidades.

–*Profe, ¿y se pueden hacer líneas curvas?*
–*Claro... ¿por qué no? ¿Qué figura quieres obtener?*
–*¡Una mariposa!*

Todos estos polígonos (y más) los abordamos de la siguiente manera: proponemos y realizamos uno de ellos con la explicación del profesor, los comentarios de los alumnos, el apoyo de la pizarra, comparando los distintos resultados obtenidos y «desvelando» cómo debemos hacer el corte para obtener un resultado «perfecto». Nosotros lo hicimos con el cuadrado. A continuación, proponemos todas las demás figuras, con una muy breve explicación y un dibujo en la pizarra. A partir de ese momento, cada alumno (o pareja) trabaja a su ritmo y elige la figura que prefiere. Les pedimos siempre que una vez trazada la línea de corte, pero antes de cortar, avisen al profesor. Nos deben explicar cuál ha sido su reflexión y cómo han trazado las líneas. Normalmente les dejamos cortar, incluso cuando sabemos que el resultado no va a ser correcto... el siguiente intento saldrá mejor.

Apuntamos a continuación algunos comentarios breves sobre la realización de estos polígonos:

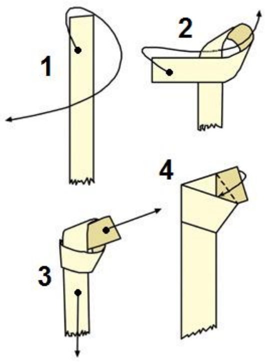


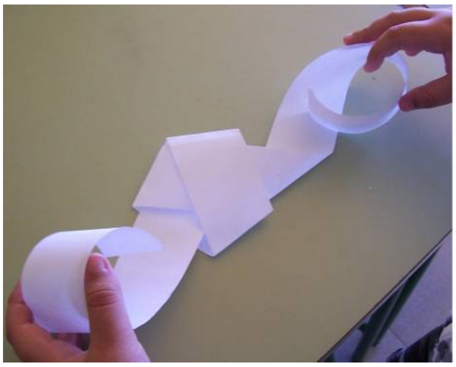
Cuadrado: superponiendo la esquina de un folio (que nos ofrece rápidamente un ángulo recto) se consigue un cuadrado. Para que sea *máximo* debemos *meter* la mayor cantidad posible de folio dentro del cartón. Normalmente, el primer intento sale mal, pues no es tan evidente para ellos tener la precaución de que la esquina del folio esté sobre la línea horizontal que divide en dos mitades el cilindro plegado. En el segundo intento les proponemos que dibujen la línea sobre la que se debe apoyar la esquina del folio.

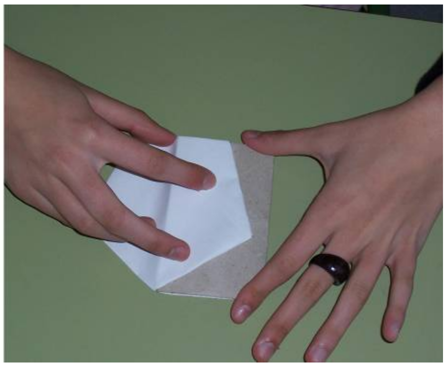
Octógono: es el más fácil (aparentemente), a partir del cuadrado y cortando las esquinas. No de este último cuadrado, sino del realizado anteriormente, con un único corte vertical sobre el cilindro aplastado. En su primer intento, los alumnos dividen en tres partes iguales el lado del cuadrado, pero... ¡el octógono no es regular! Sólo a los más avanzados o interesados les proponemos que realicen los cálculos para conseguir un octógono regular. El resto (la gran mayoría) realizan un segundo intento *a ojo*, que sale suficientemente aproximado.

Hexágono: midiendo lados y ángulos, recortando uno o dos ángulos de 120º en el folio y superponiéndolos al cilindro doblado, de forma similar a lo realizado con el cuadrado. Los ángulos de 120º se pueden conseguir de dos formas: midiendo con el transportador sobre el folio y recortando una plantilla, o bien doblando la esquina del folio en tres partes iguales (esto se hace *a ojo*, pero normalmente sale con una aproximación bastante buena). Con esto conseguimos un ángulo de 60º. Dos ángulos de 60º (o uno de 90º más otro de 30º) forman uno de 120º.

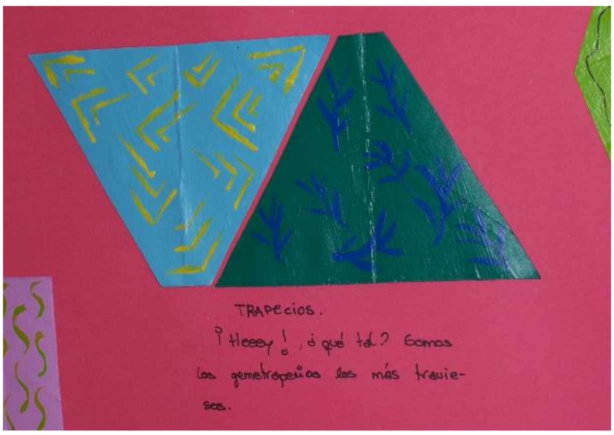
Pentágono: mediante ensayo y error, cortando varios cilindros, cada uno mejor que el anterior. Es un buen método, indica que el alumno ha comprendido y va perfeccionando y ajustando los elementos geométricos (longitudes de los lados y ángulos). Utilizando la misma idea del cuadrado y del hexágono, necesitamos recortar un ángulo de... ¡a calcular! (108º). Es un momento excelente para enseñarles a construir un pentágono regular a partir de una tira de papel.



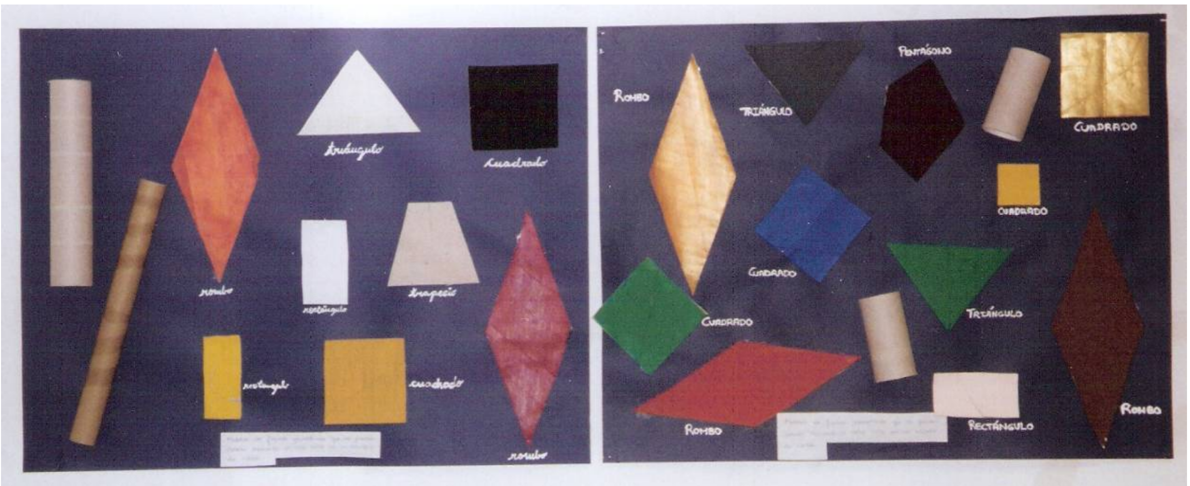


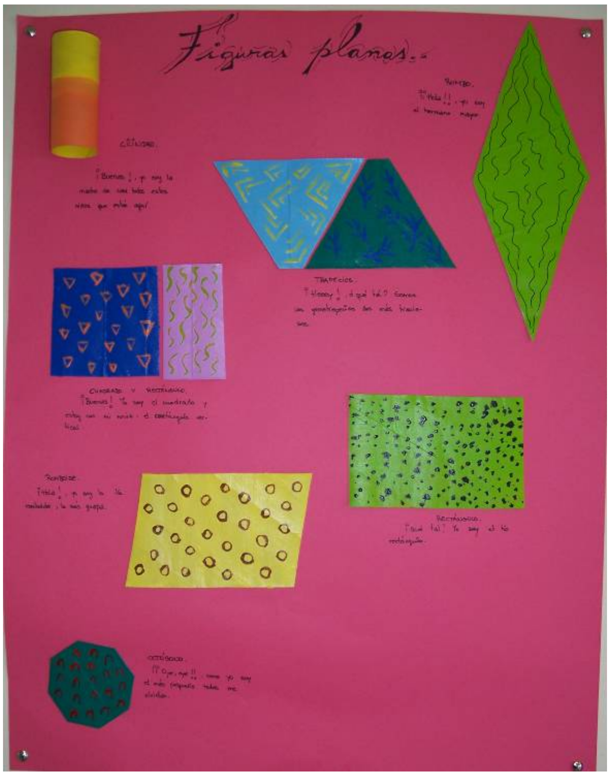


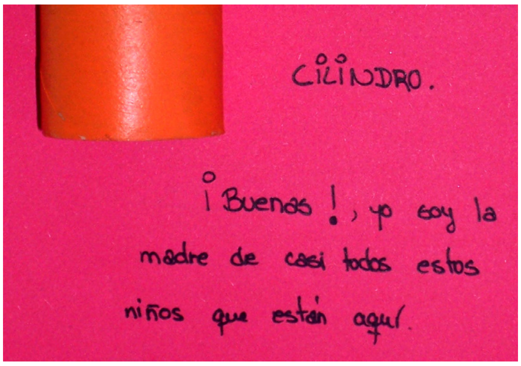
3.4. Para terminar, un mural



Como trabajo final encargamos a los alumnos, en grupos, realizar un mural con las distintas figuras que obtuvieron en esta experiencia. Deben dar nombre a todas las figuras y puede decorarse de forma libre. Incluso pueden añadirse definiciones, explicaciones, o cualquier otro tipo de texto. La perspectiva de hacer el mural y exponerlo es motivador y varios alumnos decidieron realizar más figuras (no tan *matemáticas*) para mejorar su mural. Comenzamos a hacerlo en la segunda mitad de la tercera sesión de clase, y los alumnos lo terminaron en casa.







4. Elementos del currículo

Por supuesto, aunque planteemos esta experiencia como eminentemente lúdica, sin registro en el cuaderno de clase del alumno, ni evaluación *formal*, las actividades desarrolladas tienen relación con distintos elementos de los currículos de la ESO, tanto en sus objetivos y contenidos como en las *competencias básicas* que contribuye a desarrollar. La idea de competencia descrita en el Proyecto PISA se manifiesta a través de la capacidad de los alumnos para emplear el conocimiento en la práctica al resolver tareas matemáticas en contexto. A continuación relacionamos algunos de estos elementos (objetivos, contenidos y competencias básicas) que se trabajan directamente con las actividades descritas en esta experiencia:

Objetivos (LOE) para el área de Matemáticas en la E.S.O.
• Incorporar el razonamiento y las formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, algebraica, estadística, probabilística, etc.) al lenguaje y a los modos de argumentación habituales en los distintos ámbitos de la actividad humana.
• Reconocer situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, y analizar y emplear diferentes estrategias para abordarlas aplicando adecuadamente los conocimientos matemáticos adquiridos.
• Localizar y describir formas y relaciones espaciales en la vida cotidiana, analizar propiedades y relaciones geométricas y utilizar la visualización y la modelización, tanto para contribuir al sentido estético como para estimular la creatividad y la imaginación.
• Proceder ante problemas que se plantean en la vida cotidiana, mostrando actitudes propias de las matemáticas tales como el pensamiento reflexivo, la necesidad de contrastar apreciaciones intuitivas, la exploración sistemática, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
• Manifestar una actitud positiva y confianza en las propias habilidades ante la resolución de problemas que permitan disfrutar de los aspectos lúdicos, creativos, estéticos, manipulativos y prácticos de las matemáticas.

Tabla 1. Objetivos del currículo que se trabajan en esta experiencia

Contenidos (LOE) para el área de Matemáticas en la E.S.O.
• Estrategias generales y técnicas simples de la resolución de problemas: el análisis del enunciado, el ensayo y error, la resolución de un problema más simple y la comprobación de la solución obtenida.
• Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas.
• Sensibilidad y gusto por las experimentaciones y la resolución de problemas.
• Determinación y confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.
• Descripción, construcción y/o trazado de figuras planas elementales: triángulos, cuadriláteros, otros polígonos, circunferencia y círculo. Propiedades características y clasificación de figuras atendiendo a diferentes criterios (número de lados, número de vértices, características de los ángulos, regularidades...). Medida y cálculo de ángulos en figuras planas.
• Movimientos en el plano: simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza, la arquitectura y el arte.
• Figuras elementales en el espacio: poliedros, prismas, pirámides, cilindros y conos. Propiedades características y clasificación atendiendo a distintos criterios (n.º de lados, n.º de caras o vértices, ángulos, simetrías, regularidades…). Obtención e identificación de desarrollos planos de cuerpos geométricos.
• Utilización de la visualización, el razonamiento espacial y la modelización geométrica con procedimientos tales como la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros.
• Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.
• Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones geométricas. Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.
• Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas en contextos reales.

Tabla 2. Contenidos del currículo que se trabajan en esta experiencia

Competencias básicas, subcompetencias e indicadores	
Competencia en comunicación lingüística: – Dialogar: escuchar y hablar. – Expresar e interpretar de forma oral y escrita, pensamientos, emociones, vivencias, opiniones, creaciones. – Adaptar la comunicación al contexto. – Generar ideas, hipótesis, supuestos, interrogantes. – Formular y expresar los propios argumentos de una manera convincente y adecuada al contexto. – Adoptar decisiones. – Tener en cuenta opiniones distintas a la propia. Competencia matemática: – Conocer los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.). – Manejar los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana. – Poner en práctica procesos de razonamiento que llevan a la obtención de información o a la solución de los problemas. – Conocimiento e interacción con el mundo físico. – Aplicar el pensamiento científico técnico para interpretar, predecir y tomar decisiones con iniciativa y autonomía personal. – Planificar y manejar soluciones técnicas. – Comprender e identificar preguntas o problemas y obtener conclusiones. – Interpretar la información que se recibe para predecir y tomar decisiones	Competencia social y ciudadana: – Ser conscientes de la existencia de diferentes perspectivas para analizar la realidad. – Tomar decisiones y responsabilizarse de las mismas. Competencia cultural y artística: – Poner en funcionamiento la iniciativa, la imaginación y la creatividad para expresarse mediante códigos artísticos. – Disponer de habilidades de cooperación y tener conciencia de la importancia de apoyar y apreciar las iniciativas y contribuciones ajenas. – Emplear algunos recursos para realizar creaciones propias y la realización de experiencias artísticas compartidas. Competencia para aprender a aprender: – Plantearse preguntas. – Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles. – Aceptar los errores y aprender de ellos. Autonomía e iniciativa personal: – Afrontar los problemas y aprender de los errores. – Elegir con criterio propio. – Ser creativo y emprendedor. – Ser perseverante y responsable. – Buscar las soluciones y elaborar nuevas ideas. – Identificar y cumplir objetivos. – Valorar las posibilidades de mejora.

Tabla 3. Competencias básicas e indicadores que se trabajan en esta experiencia

5. Conclusiones

La experiencia que hemos expuesto en este artículo es eminentemente lúdica. No es necesario plantearse metas concretas, e incluso existe la opción de realizar sólo algunas partes de la misma. Podemos terminarla cuando queramos, cuando se acabe el tiempo que nos habíamos reservado para esto o cuando se acaben los cilindros que hayamos conseguido recopilar (nuestras familias y amigos saben que los *coleccionamos* y nos los guardan durante todo el año). Tres sesiones de clase sin aparentes contenidos curriculares, sin evaluación... ¡merece la pena! La visión espacial y el gusto por la geometría no se adquieren aprendiendo fórmulas y realizando exámenes.

Los alumnos disfrutan mientras manipulan elementos geométricos, piensan en ellos y desarrollan su visión espacial. Los profesores disfrutamos viéndolos participar y pasarlo bien mientras *hacen* matemáticas. Con eso nos basta. No hemos diseñado ninguna evaluación para esta actividad, ni queremos hacerlo (¿por qué tenemos que evaluar de manera formal todo lo que hacemos?). Una semana después de terminada la actividad preguntamos cuántos alumnos cogieron en casa un cilindro de cartón cuando se acabó el papel higiénico o el rollo de servilletas de la cocina, y cuántos de ellos le mostraron a sus padres qué cosas se pueden hacer con ellos. El número de manos levantadas y las sonrisas mostradas constituyen la verdadera evaluación del trabajo realizado.

La realización de esta experiencia nos deja la sensación (y la satisfacción) de estar en sintonía con Miguel de Guzmán: «*Al hablar del pensamiento geométrico no me refiero a la enseñanza de la geometría más o menos fundamentada en los Elementos de Euclides, sino a algo mucho más básico y profundo, que es el cultivo de aquellas porciones de la matemática que provienen de y tratan de estimular la capacidad del hombre para explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura, la forma física*».

Anexo

En las siguientes tablas presentamos la temporalización exacta de algunas actividades llevadas a cabo con un curso de 2.º de ESO. Los tiempos fueron medidos en la realización de la experiencia realizada en marzo de 2009. Pretendemos que sirva, a título orientativo, para rediseñar la estructura de las sesiones de clase, en función del tiempo disponible, las características de los alumnos y el enfoque que quiera imponer cada profesor.

Actividad	Tiempo
- Descripción del cilindro y ejemplos	5 minutos
- Discusión sobre el cálculo de las dimensiones	5 minutos
- Discusión de los cortes rectos sin deformar el cilindro: longitudinal, transversal, oblicuo	10 minutos
- Corte longitudinal. Rectángulo. Medidas. Superficie. Dibujar 1 cm^2. Comprobar que caben 139 cm^2 en el rectángulo	10 minutos
- Corte oblicuo. Romboide. Comparación de su área con la del rectángulo	10 minutos
- Corte oblicuo necesario para obtener un rombo. Dibujos en la pizarra y discusión. Trazado y corte	15 minutos

Tabla 4. Primera sesión con 2.º curso de ESO

Actividad	Tiempo
- Corte vertical con el cilindro plegado para obtener un cuadrado. Discusión, trazado y corte	10 minutos
- Corte inclinado con el cilindro plegado para obtener dos trapecios iguales. Discusión, trazado y corte	10 minutos
- Propuesta y discusión de todas las formas posibles de cortes oblicuos. Discusión, trazado y corte para obtener trapecios y triángulos	20 minutos
- Propuesta y discusión para la obtención de polígonos, teniendo en cuenta la simetría. Trazado y corte de uno ó dos	15 minutos

Tabla 5. Segunda sesión con 2.º curso de ESO

Carlos Duque Gómez, IES Mencey Bencomo, Los Realejos, Tenerife. Profesor de Enseñanza Secundaria (Matemáticas).

Eva M.ª Quintero Núñez, IES Mencey Bencomo, Los Realejos, Tenerife. Profesora de Enseñanza Secundaria (Matemáticas).