NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 70, abril de 2009, páginas 105–113

Problemas comentados (XXI)

J.A. Rupérez Padrón y M. García Déniz

-Club Matemático[1]-

Muchos de los problemas que hemos propuesto en los artículos de esta serie han sido tomados, casi sin modificación, de diferentes convocatorias del concurso de problemas conocido como Rally Matemático Transalpino (**RMT**). Este concurso se celebra anualmente, desde 1993, hasta la actualidad en que se ha celebrado el 16º Rally.

Empezó celebrándose en Suiza y, casi enseguida, pasó a Italia y Luxemburgo, por lo cual recibió el nombre que ahora detenta. En estos momentos se realiza en otros muchos países como Bélgica o Israel.

Su característica principal es que se realiza por clases, no individualmente, y por niveles educativos. Se inicia con una prueba de ensayo a comienzos de curso y continúa con otras tres eliminatorias, en enero, marzo y mayo. Las clases seleccionadas tienen una prueba final en junio.

En el RMT, no es la respuesta correcta lo único que cuenta, sino que también la calidad de las explicaciones y el rigor científico de los razonamientos son tenidos en cuenta. Es necesario insistir sobre este punto ante los alumnos después de la prueba de ensayo y atribuir tanto valor a las explicaciones como a las respuestas correctas.

La aplicación, la evaluación y el análisis de la prueba están bajo la entera responsabilidad de los enseñantes. La decisión de participar en el RMT debe ser tomada por la clase, de acuerdo con el profesor.

Nuestro primer contacto con estas pruebas se realizó a través de dos revistas, que llegaban, y siguen llegando, a la biblioteca de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas:

- "L'educazione Matematica", revista cuatrimestral a cargo del **Centro di ricerca e sperimentazione dell'educazione matematica** de Cagliari (Italia); directora: Lucia Grugnetti.
- "Math-École", revista trimestral del **Institut de Mathématiques** de Neuchâtel (Suiza); director François Jaquet.

Estas dos personas, Grugnetti y Jaquet, son los coordinadores internacionales del concurso y han dedicado muchos artículos a difundir el RMT y el modo de afrontar los problemas propuestos.

Hoy son muchos los Colegios y Organizaciones de profesores que siguen el concurso a través de sus páginas web. Dos de esos sitios web sobre el Rally Matemático Transalpino, muy recomendables para buscar problemas, son los siguientes:

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón**, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y **Manuel García Déniz**, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife). mgarden@gobiernodecanarias.org / jruppad@gobiernodecanarias.org

http://www.primoassari.it/esem/rally.htm

(Italiana; deben buscar en ella el apartado “esempi di problemi”.)

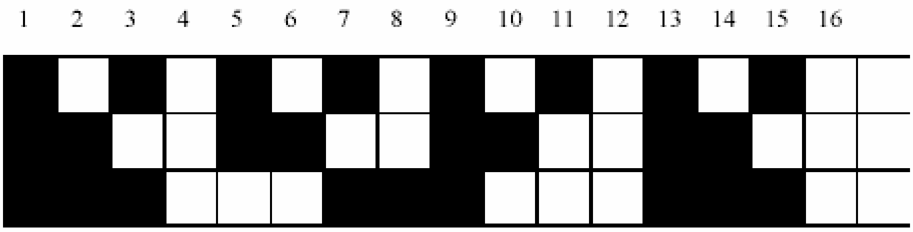
http://www.rmt-sr.ch/archives.htm

(Suiza; esta vez deben buscar el apartado “anciens rallyes”.)

Veremos ahora las soluciones de los cuatro problemas del artículo anterior que quedaron propuestos para resolver; los cuatro se corresponden con problemas aparecidos en la prueba nº 2, marzo-abril de 2004, del Rally Matemático Transalpino. Recordamos a nuestros lectores que los problemas aparecen categorizados por niveles educativos después del título de cada problema, aunque esa clasificación es muy relativa. Cualquier problema puede ser adaptado a las características de cualquier aula. Para unificar criterios pondremos las edades recomendadas por el RMT entre paréntesis.

COLOREADO RARO (Edades: 8, 9 y 10 años)

Máximo ha coloreado una cuadrícula respetando, para cada línea, una regla de coloreado diferente:



Ha coloreado ya correctamente las 15 primeras columnas. Constata que las columnas 1, 9 y 13 están completamente coloreadas. Continúa el coloreado más allá de la columna 16.

¿La columna 83 estará completamente coloreada? ¿Y la columna 265?

Este problema tiene algo de Lógica (formulación de hipótesis, razonamiento deductivo) y algo de Aritmética (división con resto).

Puede ser trabajado mediante estrategias de modelización o de organización de la información, pero sobre todo es importante que el alumno investigue la propuesta alargando la secuencia dibujada hasta entender la situación y que busque los patrones que regulan su formación.

Ver que el patrón está determinado por la observación de las filas y no por las columnas: la 1ª línea con alternancia de 1 negra - 1 blanca, la 2ª línea con alternancia 2 negras - 2 blancas, la 3ª línea con alternancia 3 negras - 3 blancas.

Ver que:

- sobre la línea 1 : las columnas impares están coloreadas
- sobre la línea 2 : las columnas coloreadas están asociadas a un número cuyo resto en la división por 4 es 1 o 2
- sobre la línea 3: las columnas coloreadas están asociadas a un número cuyo resto en la división por 6 es 1, 2 o 3.

Deducir que las columnas completamente coloreadas deben verificar las tres condiciones anteriores.

Buscar el resto en la división por 2, 4 y 6 de cada uno de los números propuestos.

83 da resto 3 en la división por 4, por tanto no cumple las condiciones. (Se podría ver también coloreando o mediante la escritura de las tres series de «números coloreados»)

265 da siempre resto 1 en las divisiones por 2, 4 y 6, por tanto estará coloreado 3 veces.

Otra posibilidad : ver que una misma «serie de columnas coloreadas» se repite cada 12 columnas y, por tanto, dividir 83 y 265 por 12; la coloración de las columnas es la misma que la de las columnas correspondientes a los restos obtenidos (11 para 83 y 1 para 265). Por consiguiente, sólo la columna 265 estará completamente coloreada.

O buscar una regla que permita encontrar las columnas completamente coloreadas:

$$1 \xrightarrow[+8]{} 9 \xrightarrow[+4]{} 13 \xrightarrow[+8]{} 21 \xrightarrow[+4]{} 25 \xrightarrow[+8]{}$$

y verificar que con esta regla se llega a 256 pero no a 83.

Solución:

La columna 83 no está completamente coloreada; la columna 256 sí lo está.

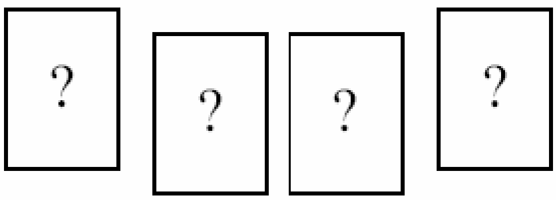
JUEGO DE CARTAS (Edades: 10 y 11 años)

Lucas y sus amigos juegan a las cartas con un mazo de 52, compuesto de 4 series de cartas numeradas de 1 a 13. Para este juego se giran 4 cartas, a cara descubierta, y se forma un mazo con las otras cubiertas.

Por turno, cada jugador toma la carta superior del mazo y, cuando es posible, toma las cartas descubiertas cuya suma corresponda al número de la carta tomada del mazo. Por ejemplo, si se toma un " 8", se puede tomar una carta descubierta " 8" o bien dos, tres o cuatro cartas descubiertas cuya suma sea 8.

Le toca a Lucas. Él observa las cuatro cartas descubiertas y dice, antes de tomar la carta del mazo, "soy afortunado, estoy seguro de poder tomar al menos una de las cartas descubiertas".

¿Qué números se pueden escribir con estas características?



Este problema tiene algo de Aritmética (adición, potencias) y un poco de Combinatoria. Si se fijan, este juego tiene un cierto parecido al juego de la escoba, con menos complicaciones y utilizando una baraja de póquer.

Puede ser trabajado mediante estrategias de modelización con ensayo y error o de organización de la información, pero sobre todo es importante que el alumno investigue la propuesta jugando un rato con una baraja hasta entender la situación y así buscar las combinaciones ganadoras.

Comprender que los cuatro números deben ser todos diferentes e inferiores o iguales a 13, y que puedan formar todas las sumas diferentes de 1 a 13.

Ver que el 1 y el 2 deberán necesariamente formar parte de los cuatro números (éstos no pueden ser obtenidos como suma de otros) y que los números más elevados como 12 y 13 deben ser excluidos.

Proceder mediante ensayos para darse cuenta que el tercer número debe ser el 3 o el 4; en el primer caso se obtiene la solución 1- 2 - 3 - 7; en el segundo caso se obtiene una de tres posibilidades: 1 - 2 - 4 - 6, 1 - 2 - 4 - 7 y 1 - 2 - 4 - 8.

La solución 1, 2, 4, 8, y solamente ella, puede ser obtenida por una de las estrategias que siguen:

Proceder mediante ensayos partiendo de 1 y excluyendo las sumas que se puedan obtener con los números ya conseguidos: 2 sí; 3 no porque 3 = 1 + 2; 4 sí; 5, 6 y 7 no (se obtienen de números precedentes mediante las sumas: 4 + 1, 4 + 2 y 4 + 1 + 2), 8 sí; sumando los números anteriores se pueden obtener todas las sumas de 9 a 13.

Observar que cada número par es la suma de potencias de 2, y obtener así 2 (2^1) , 4 (2^2), 8 (2^3) y el número 1 (2^0) que permite obtener todos los números impares. Esto resulta interesante porque se puede enlazar con los sistemas de numeración, sistema de base dos y utilizar la calculadora de Papy o juegos de matemagia basados en este conocimiento.

Solución:

Las cuatro combinaciones de cartas posibles son: 1 – 2 – 3 – 7 ; 1 – 2 – 4 – 6 ; 1 – 2 – 4 – 7 y 1 – 2 – 4 – 8.

CIFRAS MÓVILES (Edades: 10 y 11 años)

Un número de 4 cifras es tal que:

- las cifras que lo componen son todas distintas entre sí y de 0
- colocando las unidades en el lugar de los millares, las decenas en el lugar de las centenas, las centenas en el lugar de las unidades, los millares en el lugar de las decenas se obtiene un número que sumado con el de partida da 9613.

¿Qué números se pueden escribir con estas características?

Este problema tiene algo de Aritmética (operaciones, cifra y número) y un poco de Lógica.

Puede ser trabajado mediante estrategias de modelización con ensayo y error o de organización de la información, pero sobre todo es importante que el alumno investigue la propuesta con distintos ejemplos y utilizar la eliminación como estrategia específica.

Representar la situación con un esquema, como el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & + \\ d & c & a & b & = \\ \hline 9 & 6 & 1 & 3 & \end{array}$$

Ver que, puesto que el número que representa la suma termina en 3, el primero y el segundo números deben tener como cifras de las unidades 1-2, 2-1, 5-8, 8-5, 6-7, 7-6, 9-4, 4-9.

Ver que las parejas 4-9, 9-4 y 8-5 conducen a un callejón sin salida.

Hallar que haciendo d = 1 y b = 2 sale la solución 8231; haciendo d = 2 y b = 1 sale la solución 7142; haciendo d = 5 y b = 8 sale la solución 3875; haciendo d = 6 y b = 7 se encuentra la solución 2786; y, finalmente, si d = 7 y b = 6 se llega a la solución 1697.

Solución:

Los números que se pueden escribir son: 8231; 7142; 3875; 2786 y 1697.

¿TARTAS: GRANDES O PEQUEÑAS? (Edad: 11 años)

Cada domingo, la señora Boulanger prepara su masa con huevos, azúcar, mantequilla y harina y llena hasta el borde un molde cilíndrico. Una vez horneado, le sale un excelente pastel.
Pero hoy, con la misma cantidad de masa, hace muchos pequeños pasteles en lugar de un único gran pastel, utilizando moldes cuyo diámetro y altura son la mitad del que utiliza habitualmente.
¿Cuántos pequeños pasteles obtendrá con la misma cantidad de masa?

Este problema tiene algo de Geometría (volumen del cilindro), algo de Aritmética (proporcionalidad) y, también, algo de Álgebra (cálculo literal).

Comprender que los moldes corresponden a cilindros de volúmenes diferentes y que la suma de los volúmenes de los pequeños cilindros (V_1) debe ser igual al volumen del cilindro grande (V_2).

Comprender que la razón V_1/V_2 corresponde a 1/8, visto que el área de la base del cilindro pequeño corresponde a 1/4 de la del cilindro grande y la altura corresponde a la mitad.

Deducir que hacen falta 8 cilindros pequeños para obtener el volumen correspondiente a un cilindro grande.

También se puede indicar como « r » y « h » el radio y la altura del cilindro grande y como «r/2» y «h/2» el radio y la altura de los cilindros pequeños.

Calcular los volúmenes de los cilindros y deducir que 8 cilindros pequeños corresponden a uno grande.

Aunque también se pueden realizar conjeturas y someterlas a un control, atribuyendo valores a las dimensiones de los moldes (por ejemplo: 20 y 10 para los radios, 12 y 6 para las alturas).

Solución:

Se obtendrán ocho pasteles pequeños.

El quinto problema propuesto estaba basado en una idea original de José Fernando Rodríguez, ligeramente modificada por nosotros. Comprendemos que resulta difícil de comprender para aquellos que vivan en ciudades que no tengan tranvías o autobuses con pago mediante tarjetas magnéticas (bono). Se trata de un problema muy localizado, pero estimamos que muchos podrán adaptarlo a su propia ciudad. Nos perdonarán, pues, que hagamos aquí el tratamiento necesario para su resolución. Resulta muy interesante plantearlo a los alumnos como una investigación de campo.

EL BONO VÍA (GUAGUA+TRANVÍA)

Cuando se introduce el Bono Vía en la máquina de validación del viaje, se graba en él un código numérico de diecinueve cifras partido en dos bloques: un primero de siete y un segundo de doce, separados por un espacio en blanco. ¿Qué significan?

MTSA TRI2 086173 86
LIBRE CIRC. TRANSBOR. EUR 12,00

0321920	010200014201	0.85	11.15
0381124	010500012201	0.85	10.30
0382032	010400010342	0.85	9.45
0410902	011400012142	0.85	8.60
0410938	010300014201	0.85	7.75
0421052	492009080609	0.60	7.15
0421243	010800010942	0.85	6.30
0441122	010800011942	0.85	5.45
0441223	011100014201	0.85	4.60
0461055	010100012142	0.85	3.75
0461145	011400012401	0.85	2.90
0480927	011600012142	0.85	2.05
0481005	010500014201	0.85	1.20
0491011	010100012142	0.85	0.35

Se daban las siguientes sugerencias de trabajo:

¿Qué información debe contener? La necesaria para conocer el **dónde** y el **cuándo** de cada uso del bono, puesto que el **precio** de cada viaje y el **resto** de dinero que nos queda aparece claramente reflejado en las 3ª y 4ª columnas.

¿A quién interesa? Especialmente al posible revisor de la compañía, pero también al usuario para posibles reclamaciones o justificaciones de viajes.

Está claro que las dos columnas primeras se corresponden con los bloques de información posibles: localización temporal y localización física, en ese orden. Debemos tener en cuenta que se necesita menos información para codificar los datos temporales (hora y día, tal vez mes y año) y que, además, éstos deben aparecer en unas secuencias crecientes. Las localizaciones físicas harán referencia al vehículo, línea, parada y dirección; parece más lógico que se corresponda con la segunda columna. Pero si no fuese así, una vez detectado el error se vuelve a trabajar cambiando el razonamiento para los bloques.

Los alumnos podrán investigar. Hacer hipótesis y verificarlas. Con un poco de observación y una discusión abierta y crítica se llega fácilmente a posibles Soluciones. De inmediato se ve que de las siete cifras de la primera columna, las cuatro últimas se corresponden con las horas y los minutos, el instante en que se ha cogido el vehículo y se ha introducido el bono para su validación. Las tres primeras cifras, pues, han de corresponder a la fecha; de las distintas opciones posibles, la más sensata parece hacer corresponder el día con su orden dentro del año. Es decir, un número entre 1 y 365 (366 para los bisiestos).

En la primera línea podemos leer entonces que el primer viaje realizado con ese bono sucedió el 1 de febrero (día 032 del año), a las 19 horas y 20 minutos.

Hecha esta predicción se puede realizar una comprobación. Basta con disponer de un bono y realizar un viaje, indicando antes lo que deberá aparecer en él después de su validación.

La segunda parte es más compleja y averiguar completamente su codificación deberá venir de una abundante observación e investigación con uso de bonos usados y también nuevos para la parte de exploración, predicción y verificación. No olvidemos que esta solución se corresponde con las líneas de tranvía y autobús (guagua) de la isla canaria de Tenerife.

	Paradas	Tiempos
01/02	Intercambiador	
03/04	Fundación	3 min
05/06	Teatro Guimerá	4 min
07/08	Weyler	6 min
09/10	La Paz	8 min
11/12	Puente Zurita	10 min
13/14	Cruz del Señor	12 min
15/16	Conservatorio	14 min
17/18	Chimisay	15 min
19/20	Principes de España	17 min
21/22	Hospital La Calendaria	19 min
23/24	Taco	20 min
25/26	El Cardonal	23 min
27/28	Hospital Universitario	24 min
29/30	Las Mantecas	27 min
31/32	Campus Guajara	29 min
33/34	Gracia	30 min
35/36	Museo de la Ciencia	32 min
37/38	Cruz de Piedra	33 min
39/40	Padre Anchieta	36 min
41/42	La Trinidad	37 min

En principio, de las doce cifras que posee parece conveniente dividirlas en tres grupos de cuatro; las cuatro centrales casi siempre vienen dadas por 0001, excepto en la sexta línea, donde aparece 0908. Justamente, sólo hay una línea de tranvía (Santa Cruz-Laguna) que será, por tanto, la 0001; mientras que hay varias líneas de guagua y, en este caso, se corresponde con la línea urbana 908 (Intercambiador-Ofra) de Santa Cruz.

Con un poco de observación y dándose cuenta que todos los coches (vagones del tranvía o guaguas) están numerados en su exterior o en su interior, podemos ver que las cuatro primeras cifras se corresponden con el número del vehículo que hemos abordado.

Finalmente, las cuatro últimas cifras deberán corresponderse con la información del trayecto. En el caso del tranvía, las cuatro cifras se interpretan dos a dos, correspondiéndose con las distintas paradas y la dirección del viaje. Las dos primeras indican la parada en que se toma el vehículo y las otras dos la parada final del viaje. Cuando aparece 01 es que se viaja hacia Santa Cruz. Si aparece el 42 es que se viaja hacia La Laguna. Hay 42 paradas, emparejadas de dos en dos: 01 y 02 son las primeras de Santa Cruz (Intercambiador), 41 y 42 son las últimas en La Laguna (Avenida de La Trinidad). Las impares están todas en dirección a La Laguna, las pares en la dirección a Santa Cruz.

¿Y la guagua? Muy simple; cada parada está numerada de manera independiente con un número de cuatro cifras.

En la primera línea podemos leer entonces que el primer viaje realizado con ese bono se utilizó en el coche nº 0102 de la línea 0001 del tranvía y la parada utilizada fue en la Avenida de La Trinidad en La Laguna y en dirección, naturalmente, hacia Santa Cruz. No se puede saber donde se bajó la persona porque no se valida el bono al salir sino al entrar. Como curiosidad, en el metro de Londres sí se valida al salir.

Solución:

El código es: **dddhhmm vvvvlllldddd ppp rrr(r)**

1ª columna - 3 cifras para el día + 2 cifras para hora + 2 cifras minuto:

(dddhhmm)

2ª columna – 4 cifras para vehículo + 4 cifras para línea + 4 cifras para dirección

(vvvvllllddddd)

3ª columna – 3 cifras para el precio del viaje

(ppp)

4ª columna – 3 o 4 cifras para indicar el resto de dinero existente en el bono

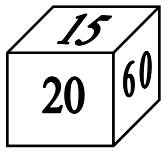
(rrr(r))

Damos ahora una nueva propuesta de problemas para pensar y resolver hasta el próximo artículo del siguiente ejemplar de la revista NÚMEROS, naturalmente sacados también del RMT, concretamente los números 7, 8, 11 y 14 de la Prueba Final del 12º Rally.

¡PROBLEMA CUBO QUID!

Sobre este cubo hay seis números enteros diferentes, inscrito cada uno sobre una cara. La suma de todos estos números es inferior a 350 y cada cara tiene un número que es el tercio, el cuarto, el triple o el cuádruplo del número inscrito sobre la cara opuesta.

¿Cuál es la suma de los números inscritos sobre el cubo?



LA HORMIGA PASEANTE

Partiendo del punto D, una hormiga quiere llegar al punto A tomando un camino lo más corto posible.

¿Entre cuántos caminos, lo más corto posibles, puede elegir la hormiga?

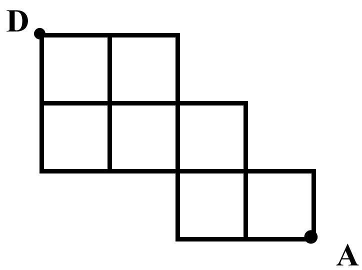
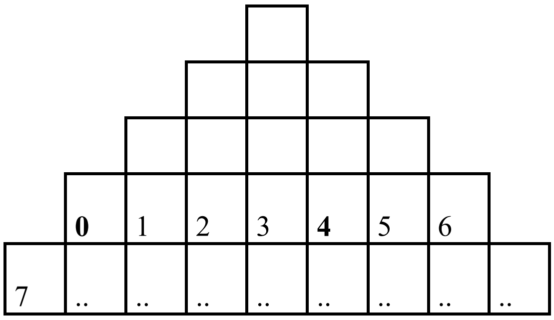


TABLA TRIANGULAR

Se colocan los enteros naturales en una tabla según la disposición siguiente.

Una línea está señalada por el primer número de esta línea partiendo de la izquierda. Una columna está señalada por el primer número de esta columna partiendo de lo alto. Un número está por tanto señalado por la línea y la columna donde se encuentra. Por ejemplo, el número 14 está en (10, 4).

¿Cuáles son la línea y la columna de 1998?



EL CARTERO

En un edificio de X pisos (2 apartamentos por piso), el cartero debe distribuir N cartas. En el primer piso, entrega 1 carta al inquilino de la izquierda, y la octava parte de las cartas restantes al inquilino de la derecha. En el segundo piso, entrega 2 cartas al inquilino de la izquierda, y la octava parte de las cartas restantes al inquilino de la derecha. En el tercer piso, entrega 3 cartas al inquilino de la izquierda, y la octava parte de las cartas restantes al inquilino de la derecha, y así sucesivamente. En el piso X, entrega X cartas al inquilino de la izquierda, y no le queda ninguna carta para entregar al inquilino de la derecha.

¿Cuál es el número X de pisos del edificio y el número N total de cartas distribuidas por el cartero?

Y aquí queda todo de momento. Pero recuerden nuestro sempiterno mensaje. Esta sección estará más viva si recibimos sus soluciones, sus comentarios o sus propuestas. Hágannos caso, escríbannos. Todos los lectores agradecerían leer mensajes y experiencias de otros compañeros.

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera del próximo número de la revista ***NÚMEROS***.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**