NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 72, diciembre de 2009, páginas 57–62

Otra manera de ver la circunferencia

Antonio M. Oller Marcén (Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza)

Fecha de recepción: 18 de marzo de 2009
Fecha de aceptación: 29 de julio de 2009

Resumen Modificando en cierto sentido la definición de la hipérbola, proponemos una actividad que muestra la circunferencia como un lugar geométrico de manera distinta a la habitual. El proceso puede servir como punto de partida para introducir conceptos geométricos interesantes que normalmente no se tratan en el aula, como por ejemplo la razón doble o la noción de constructibilidad.

Palabras clave Lugar geométrico, cuaterna armónica, circunferencias ortogonales, constructibilidad, geometría sintética.

Abstract We propose an activity that, modifying in some sense the definition of a hyperbola, presents the circumference as a geometric locus in an unusual way. This process can be the starting point to introduce some interesting geometric concepts, like the cross-ratio of 4 points or the notion of constructibility, that are not usually discussed in the classroom.

Keywords Geometric locus, harmonic quadruple, orthogonal circumferences, constructibility, synthetic geometry.

1. Introducción

El concepto de lugar geométrico es uno de los más interesantes e importantes dentro de la geometría. En España se introduce la idea de lugar geométrico en el primer curso de bachillerato (16-17 años), tras presentar la geometría analítica, haber deducido las ecuaciones de la recta y haber introducido las nociones básicas de incidencia (distancias y ángulos, siempre analíticamente, basados en el producto escalar de vectores). Justo tras la definición de lugar geométrico se inserta un bloque de contenido dedicado a las cónicas, que se definen, claro está, como lugares geométricos.

Sin embargo, éstos son los únicos lugares geométricos "singulares" que se suelen presentar a los alumnos. De este modo, la importancia de la idea de lugar geométrico como el conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad queda diluida. Incluso después de que el alumno ha logrado cierta destreza en la deducción de las ecuaciones de la elipse, hipérbola o parábola no suelen proponerse ejercicios que hagan uso de dicha destreza y que permitan al alumno descubrir nuevas curvas que se salgan de lo que para ellos es habitual.

Por ejemplo, una modificación inmediata de la definición de la elipse podría llevar a la pregunta: ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo producto de distancias a dos puntos fijos es constante? Nótese que sólo hemos cambiado "suma" por "producto". De hecho, una vez que el alumno está familiarizado con las técnicas necesarias para deducir la ecuación de la elipse, no es difícil que la reproduzca y modifique de la manera adecuada para obtener la ecuación de los

Óvalos de Cassini (pues éstas son las curvas definidas por dicha propiedad). A partir de aquí pueden estudiarse propiedades de estas curvas, hablar de la lemniscata como caso particular, etc...

Habiendo modificado la ecuación de la elipse del modo que acabamos de presentar, surge de manera totalmente natural la cuestión de cambiar "diferencia" por "cociente" en la definición que se hace de la hipérbola y plantear la siguiente pregunta: ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a dos puntos fijos es constante? En este trabajo vamos a desarrollar algo más esta pregunta mostrando cómo, pese a iniciar el camino en el terreno de la geometría analítica, puede servirnos como punto de partida natural para la introducción de conceptos geométricos importantes que no aparecen si nos centramos únicamente en un tratamiento analítico.

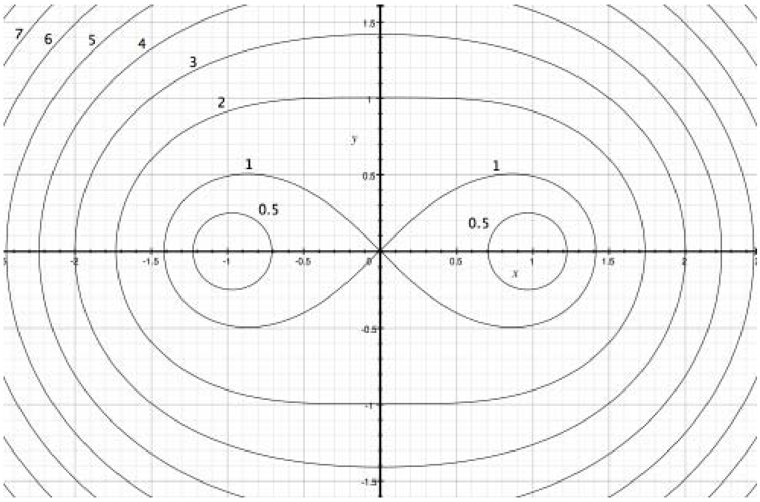

Figura 1. Distintos óvalos de Cassini

En concreto, los objetivos principales que se persiguen con la actividad son los siguientes:

- Manejar distintas herramientas de la geometría, tanto analíticas como sintéticas.
- Afianzar el concepto de lugar geométrico.
- Presentar las nociones de cuaterna armónica y circunferencias ortogonales.
- Introducir el problema de la constructibilidad de los números reales.
- Mostrar que un mismo problema admite distintos enfoques a la hora de su resolución.

2. Un primer ataque al problema

Como hemos indicado en la introducción, estamos interesados inicialmente en responder la siguiente pregunta:

"¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cociente de distancias a dos puntos fijos es constante?"

Si planteamos esta pregunta en el aula, justo después de haber trabajado fervorosamente los temas dedicados a las cónicas, lo más seguro es que la respuesta que se obtenga sea similar al siguiente desarrollo:

Llamemos $F(a,0)$ y $F'(-a,0)$ a los puntos fijos del enunciado, sea b el valor constante del cociente (notar que $a,b>0$) y sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico buscado. Así, las condiciones del enunciado se traducen en $\frac{d(P,F)}{d(P,F')}=b$, con $b>0$ y recordando la expresión para la distancia euclídea entre dos puntos del plano llegamos fácilmente tras algunas sencillas operaciones a la expresión:

$$x^2+y^2+\frac{2a(b^2+1)}{b^2-1}x+a^2=0,$$

que se corresponde con una circunferencia de centro $\left(-\frac{a(b^2+1)}{b^2-1},0\right)$ y radio $\frac{2ab}{b^2-1}$. Siempre que se cumpla que $b^2-1\neq 0$, lo cual implica $b\in(0,1)\cup(1,\infty)$ por ser b estrictamente positivo.

Si b=1 resulta que el lugar geométrico buscado deja de ser una circunferencia y pasa a ser una recta; más concretamente la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$. Por otro lado, si $0<b<1$, basta cambiar los papeles de *F* y *F'* considerando que el valor constante del cociente es $1/b>1$.

Notemos que al extender la definición de la elipse como se mencionó en la introducción, aparece un nuevo tipo de curva (los Óvalos de Cassini) de los que la circunferencia es un caso particular. Ahora esta curva se ha obtenido como lugar geométrico. Lo insospechado de esta aparición puede servirnos como muestra de un hecho relativamente habitual en matemáticas: un mismo objeto puede emerger de situaciones aparentemente muy distintas.

Puesto que la curva obtenida es bien conocida por los alumnos y dado que ya hemos deducido completamente su ecuación, su centro y radio, podríamos concluir que la pregunta con la que iniciamos esta sección está completamente respondida. Sin embargo, esto es cierto sólo en parte, y como habitualmente sucede en matemáticas (y en la vida), una pregunta implica la formulación de otras. Por ejemplo:

1. ¿Cómo resolver el problema si no sabemos nada de geometría analítica?
2. ¿Cómo dibujamos el lugar geométrico buscado?

Las dos preguntas anteriores están muy relacionadas y nos llevan a abandonar la autopista de la geometría analítica para tomar las más estrechas carreteras de lo sintético. La segunda, además, nos servirá para plantearnos algunas dudas sobre la definición de los números reales.

3. ¡Fuera coordenadas!

Vamos a tratar de responder la misma cuestión pero sin utilizar coordenadas. Supondremos dados dos puntos del plano *F* y *F'*, siguiendo con la notación de la sección anterior, así como dos segmentos XY e YZ cuya razón entre sus longitudes $\frac{\overline{YZ}}{\overline{XY}}$ es el valor constante que define el lugar geométrico. Más adelante surgirá la pregunta de cómo construir estos dos segmentos, de momento los supondremos dados. Con estos ingredientes traducimos la pregunta original del siguiente modo:

"¿Qué puntos P del plano cumplen $\frac{\overline{PF'}}{\overline{PF}}=\frac{\overline{YZ}}{\overline{XY}}$ *?"*

El primer paso en la resolución del problema pasa por encontrar dos puntos A y B sobre la recta definida por F y F' que cumplan las condiciones de definición del lugar geométrico. Para ello procedemos del siguiente modo (ver Figura 2):

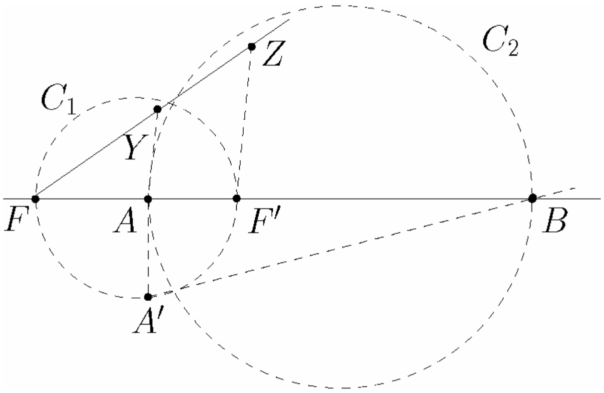

Figura 2. Primeros pasos

En primer lugar, sobre una recta cualquiera que pase por F (distinta de la definida por F y F') trasladamos los segmentos $\overline{XY}$ e $\overline{YZ}$ haciendo coincidir X con F. Ahora trazamos una paralela a ZF' que pase por Y. De este modo queda definido el punto A que, gracias al Teorema de Thales, cumple:

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XY}}$$

Dibujamos a continuación una circunferencia C_1 de diámetro el segmento FF', trazamos una perpendicular a este segmento que pase por A, determinando así un punto A' sobre la semicircunferencia. Finalmente, el punto B se encuentra trazando la tangente a la semicircunferencia por este último punto trazado.

Nótese que este procedimiento es, precisamente, uno de los métodos de construcción del cuarto armónico de la terna F, F' y A. Recordar que una cuaterna de puntos (AB,CD) se llama cuaterna armónica si $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$. Así pues, lo que hemos hecho es encontrar A y B tales que $(F'F,AB)$ es una cuaterna armónica. Observar también que si trazamos la circunferencia C_2 de diámetro AB y nos fijamos en su punto de corte con aquella de diámetro FF', los radios de ambas circunferencias que pasan por dichos puntos son perpendiculares. Dos circunferencias así se llaman ortogonales y están íntimamente relacionadas[1] con las cuaternas armónicas (como se observa aquí). Estos dos objetos, cuaternas armónicas y circunferencias ortogonales, que son de gran importancia en la geometría sintética, desgraciadamente están completamente olvidados en la educación matemática actual. Esta actividad puede servir para, al menos, presentarlos y comentarlos brevemente.

Ya tenemos pues dos puntos del lugar geométrico que buscamos. Ahora bien, se trata de dos puntos muy particulares pues están justamente sobre la recta definida por los dos puntos F y F' fijos. Supongamos que tenemos un punto P del plano (ver Figura 3) cumpliendo la condición $\frac{\overline{PF'}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{YZ}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BF'}}{\overline{BF}}$. ¿Qué podremos decir de P?

[1] Dadas dos circunferencias ortogonales, cualquier recta que pase por el centro de una de ellas las corta en puntos que forman una cuaterna armónica. En nuestro caso, la recta en cuestión es la que une ambos centros.

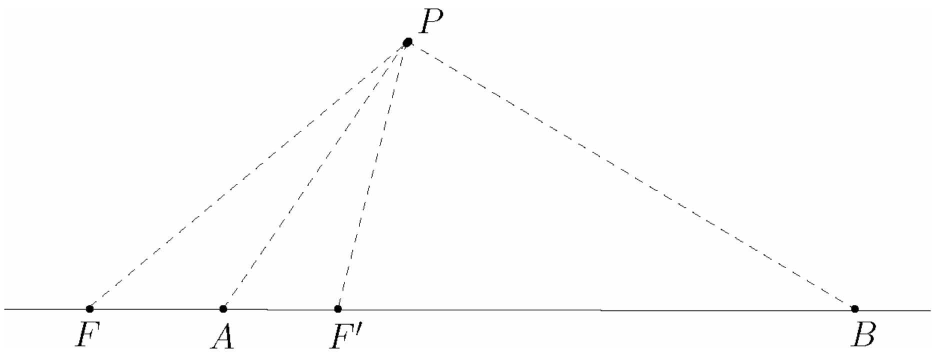

Figura 3. Acabando el trabajo

Antes de continuar presentamos una aplicación del Teorema de los senos que nos van a resultar de gran utilidad. Si en un triángulo *ABC* elejimos un punto *D* sobre la recta *AC*, se cumple que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB} sen\angle ABD}{\overline{BC} sen\angle DBC}$$

La demostración de este hecho es sencilla y es interesante que los alumnos se den cuenta de que el resultado es el mismo independientemente de que el punto D sea interior o exterior al lado AC.

Aplicando este resultado al triángulo *FPF'* y al punto *A*, y teniendo en cuenta la relación de proporcionalidad de segmentos supuesta enteriormente, se deduce que $\angle FPA = \angle APF'$. Por otra parte, aplicándolo al mismo triángulo pero considerando el punto *B* se deduce que $\angle FPB = 180^o - \angle BPF'$. Ahora bien, observemos que $\angle FPB = 2\angle APF' + \angle BPF'$ por lo que de lo anterior se deduce que $\angle APB = \angle APF' + \angle BPF' = 90^o$ y así se obtiene que *P* pertenece a la circunferencia de diámetro *AB*.

Hemos recuperado, pues, lo que ya sabíamos gracias a la sección anterior. El lugar geométrico buscado es una circunferencia de diámetro los puntos *A* y *B* tales que (*FF'*,*AB*) es una cuaterna armónica con $\frac{\overline{YZ}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BF'}}{\overline{BF}}$.

4. Algunas reflexiones sobre existencia y constructibilidad

En las dos secciones anteriores hemos respondido a una misma pregunta empleando técnicas completamente diferentes. En el primer ataque hemos empleado toda la artillería de la geometría analítica, mientras en el segundo la hemos mantenido completamente al margen.

En ambos casos hemos llegado, no obstante, a una misma respuesta: el lugar buscado es una circunferencia. Lo que sí han sido diferentes son los elementos que definen dicha circunferencia. Así en el enfoque analítico encontramos el centro y el radio (sus coordenadas y longitud, respectivamente) y en el no-analítico determinamos el diámetro de dicha circunferencia. En cualquiera de ambas situaciones la figura está completa y unívocamente determinada.

Ahora bien, ¿es esto completamente satisfactorio? Como siempre, depende del punto de vista, pero lo cierto es que puede dar lugar a algunos problemas de índole casi filosófica. De hecho, si recurrimos al maestro Euclides vemos que el tercero de sus postulados versa sobre la posibilidad de construir un círculo con cualquier centro y cualquier radio. Es decir, dados el centro y el radio, con ayuda del compás, resultará sencillo dibujar la circunferencia correspondiente.

Dicho esto propongamos a nuestros alumnos dibujar una circunferencia de centro el origen y radio, por ejemplo, $\sqrt[3]{2}$. El problema surge a la hora de fijar el radio. ¿Dónde está el número $\sqrt[3]{2}$ en el eje de abscisas? Podremos aproximarlo, acotarlo... pero no encontrarlo exactamente armados sólo de nuestra regla y nuestro compás. Está clara la consecuencia que esto tiene a la hora de dibujar el lugar geométrico que nos ocupa. A veces podremos hacerlo, otras no.

Quizás nuestros alumnos piensen que esto implica que Euclides estaba equivocado. Esto puede ser el punto de partida para hablar de la idea de números constructibles (doblando papel, empleando distintas herramientas), sobre lo que significa la expresión “dados el centro y el radio” o incluso sobre las distintas concepciones que pueden tenerse al respecto de la existencia de un ente matemático.

5. Conclusiones

Hemos presentado una actividad dirigida a estudiantes de 16 y 17 años en la que, generalizando de manera natural la definición de la hipérbola, se obtiene una definición alternativa, poco habitual y hasta cierto punto sorprendente, de la circunferencia.

Durante el proceso se han empleado técnicas tanto analíticas, con las que el alumno está plenamente familiarizado; como sintéticas. Éstas últimas, pese a su riqueza, están siendo olvidadas cada vez más en el aula. Esta actividad puede servir para manejar conceptos sencillos y fácilmente manipulables, como las cuaternas armónicas y las circunferencias ortogonales.

Esta doble forma de abordar el problema culmina con la obtención del lugar geométrico buscado, una circunferencia, a partir de dos conjuntos de datos diferentes. En el enfoque analítico se obtiene el centro y el radio. En el enfoque sintético, el diámetro. Esta dicotomía puede servir como inicio de una discusión sobre qué es necesario para definir una figura. Además los diversos modos de presentar los datos: numéricamente o mediante segmentos, darán pie a discutir la existencia y la constructibilidad de los números reales.

En definitiva, a partir de una actividad aparentemente restringida en cuanto a su temática, podemos no sólo trabajar dentro de su ámbito temático inicial, sino también abarcar muchos otros aspectos, aparentemente alejados. Así se puede también ejemplificar la interconexión entre distintas ramas de la Matemática. Una interconexión que a menudo se pasa por alto y que, sin embargo, constituye una de las mayores riquezas de esta ciencia.

Bibliografía

Beskin, N.M. (1976): *División de un segmento en la razón dada.* Mir: Moscú.

Coxeter, H.S.M. (1971): *Elementos de geometría.* Limusa-Wiley: México.

Euclides. (1991): *Elementos.* Gredos: Madrid.

Antonio M. Oller Marcén, es licenciado en Ciencias Matemáticas (2004) por la Universidad de Zaragoza. Su ámbito de investigación es la Didáctica de las Matemáticas, está realizando su Tesis Doctoral sobre la enseñanza de la Razón y la Proporción y ha publicado artículos sobre Juegos educativos matemáticos y sobre enseñanza de la Geometría. También ha publicado trabajos en Álgebra y Teoría de Números. Viene participando desde hace 4 años en el Proyecto de cooperación en materia de investigación *Taller de talento matemático*, financiado por el Gobierno de Aragón. En la actualidad, es Profesor Ayudante en la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas de Teruel, donde imparte clase en las titulaciones de Maestro.