NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 72, diciembre de 2009, páginas 129–139

Las disecciones de cubos. Secuenciación en tamaños y dificultad como una propuesta didáctica. Estudio del cubo 2x2x2. Algunas presentaciones de cubos 3x3x3 y 4x4x4, y un reto.

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz
-Club Matemático[1]-

Resumen Aplicamos un método sistemático para el estudio de las distintas disecciones de un cubo de 2x2x2, y apuntamos a distintos cubos resultado de diseccionar cubos de mayores dimensiones.

Palabras clave Cubos 2x2x2; 3x3x3, NxNxN. Disecciones de cubos. Estudio sistemático. SOMA.

Abstract We apply a systematic method for studying the various dissections of a cube of 2x2x2, and aim to dissect different cubes result of larger cubes.

Keywords Cubes 2x2x2; 3x3x3, NxNxN. Dissections of cubes. Systematic method. SOMA

En estas pocas páginas es inabarcable un tratamiento de las disecciones del cubo. Empezar con una declaración de imposibilidad como la anterior va contra una regla importante de cómo escribir un artículo de divulgación o investigación, pero en este caso es una confesión de humildad ante la amplitud del tema.

Si imaginamos un pequeño cubo de, digamos 1 cm de arista, al que consideramos “cubo unitario”, ya nos será posible imaginar a ocho unitarios formando un cubo de 2x2x2, a veintisiete formando uno de 3x3x3, etc.

Cuando se habla de disecciones de un cubo, estamos planteando el problema de dividirlo en dos o más partes, formadas por cubos unitarios adosados por sus caras. Lo cual enlaza con uno de nuestros anteriores artículos, en esta misma revista, dedicado a los policubos.

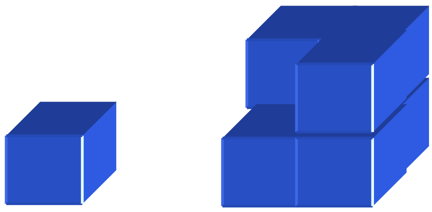
CUBO DE 2x2x2.

Vamos a comenzar sistemáticamente, como haríamos con alumnos a los que planteemos este tipo de cuestiones, examinando el cubo de 2x2x2. Si lo dividimos en dos partes, estas podrían estar formadas por 1 y 7 cubos unitarios (1, 7), o por 2 y 6 (2, 6), (3, 5) ó (4, 4).

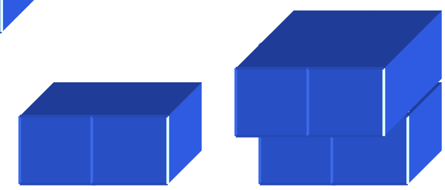
[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón**, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y **Manuel García Déniz**, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).
jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

No consideraremos como diferentes aquellas disecciones que se obtienen de otras por giros o simetrías.

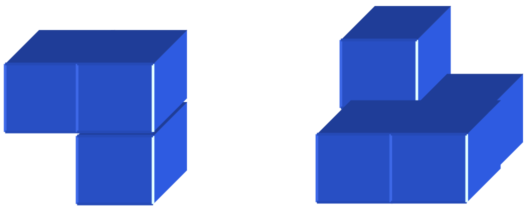
Para el caso **(1, 7)** no existe más que una posibilidad de disección: la más simple:



En el supuesto **(2, 6)** también es única la disección:

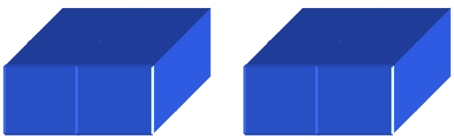


Para el caso **(3, 5)** no se nos abren mayor cantidad de posibles disecciones, ya que la pieza de 3 cubos al tener que cumplir la condición de que sus elementos estén unidos por sus caras tiene una forma única.

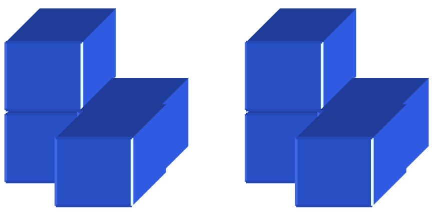


Para el caso **(4, 4)**, son más las posibles disecciones:

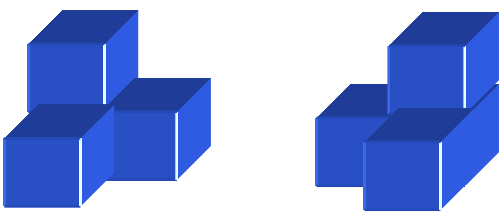
1.-



2.-



3.-



Si dividimos el cubo en tres piezas, tenemos las siguientes combinaciones:

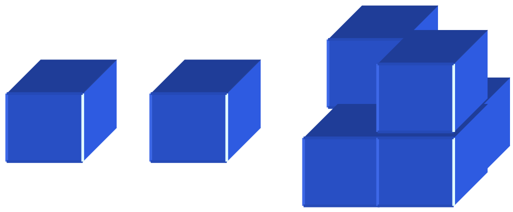
(1, 1, 6); (1, 2, 5); (1, 3, 4); (2, 2, 4) y (2, 3, 3)

Veamos cuántas disecciones diferentes son posibles para cada caso:

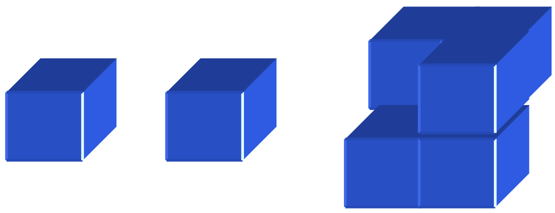
(1, 1, 6)

El segundo cubito no puede ser contiguo al primero, pues estaríamos en el caso ya visto (2, 6). ¿En qué posiciones pueden estar los dos cubitos unitarios?

Opuestos en la misma capa:

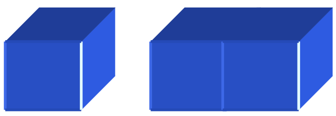


Opuestos en capas diferentes:



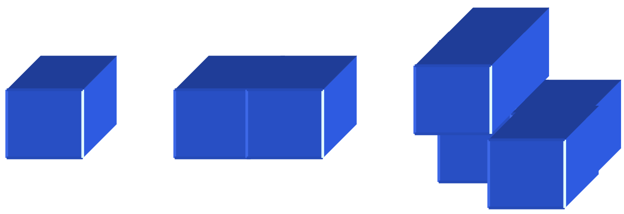
Evidentemente muy fáciles de reconstruir.

(1, 2, 5)



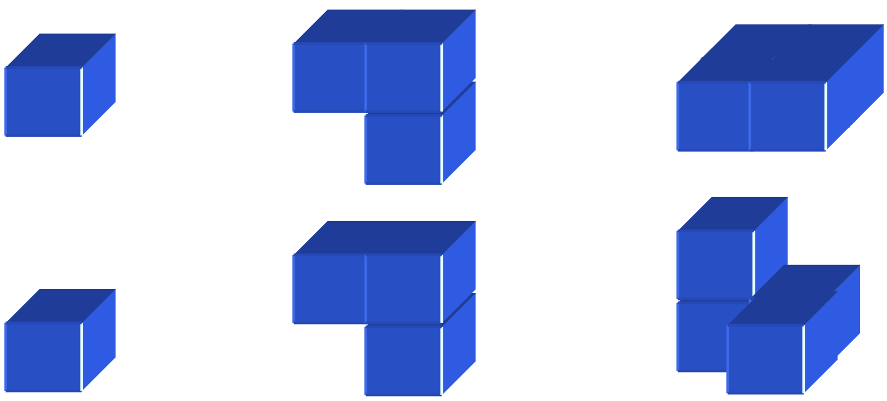
Estas dos piezas no pueden provenir de la misma capa, ya que sería equivalente al caso (3, 5) ya estudiado.

Sólo cabe la disección:



(1, 3, 4)

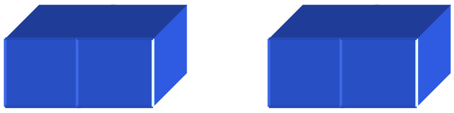
Este caso equivale al ya visto (4, 4), pero diseccionando una de las piezas de 4 en 1 y 3 cubitos; queda reducida a dos tipos que tienen las piezas de 1 y de 3 iguales, pero difieren en la de 4.



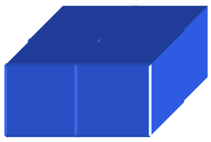
Es indudable que cuando hablamos de piezas de 2 cubitos, solo pueden tener esta forma:

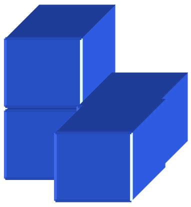
(2, 2, 4)

Una de las disecciones se obtiene al dividir una de las capas en la única manera posible:



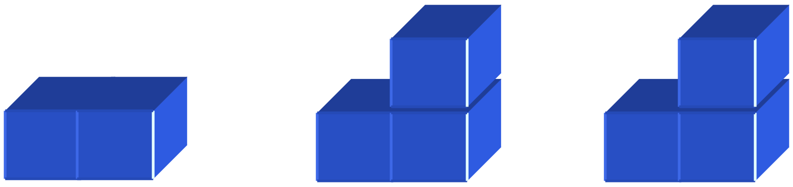
La otra capa puede considerarse formada por dos piezas de 2 cubitos coplanarias (caso 1) o perpendiculares (caso 2).





(2, 3, 3)

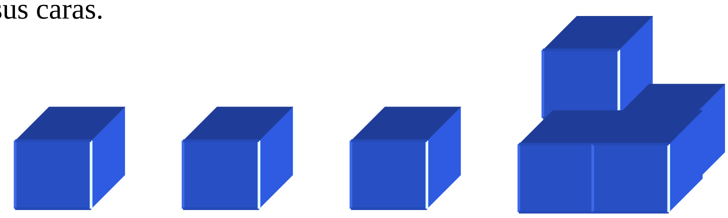
Caso único, por ser únicas las piezas de 2 y las de 3.



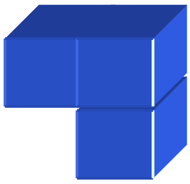
Estudiemos ahora la disección del cubo 2x2x2 en cuatro partes.

Son posibles las disecciones (1, 1, 1, 5); (1, 1, 2, 4); (1, 1, 3, 3); (1, 2, 2, 3) y (2, 2, 2, 2).

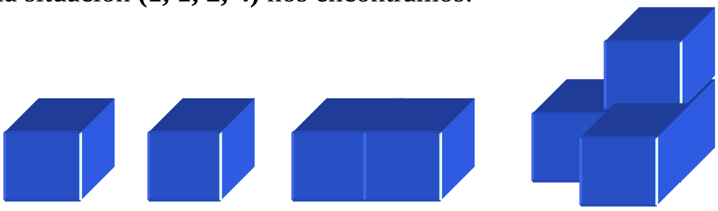
La primera no es realizable más que de una manera, por cuanto la pieza de 5 cubitos incumpliría una de las condiciones establecidas, en concreto, la de que sus cubitos unitarios deben estar unidos por sus caras.



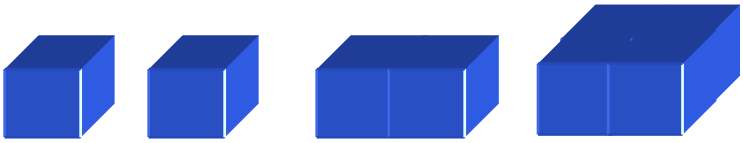
Esta disección supondría que los unitarios se obtienen al descomponer una pieza como esta en tres elementales, pero este fue el caso (3, 5) ya estudiado.



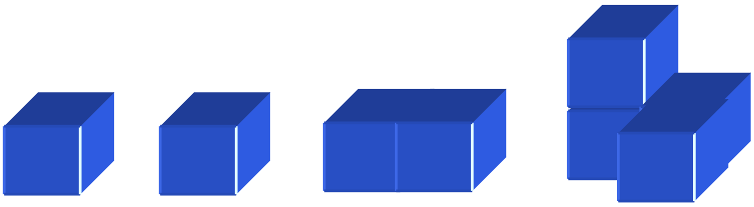
Para la situación **(1, 1, 2, 4)** nos encontramos:



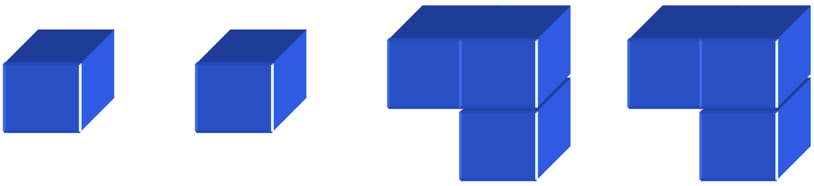
Que proviene del caso (4, 4) ya visto, así como



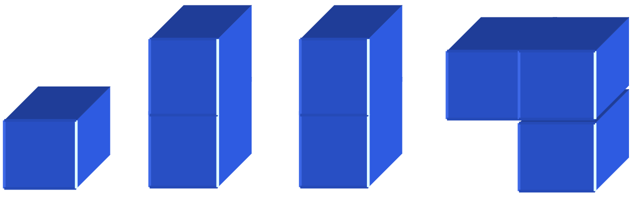
y



En el caso **(1, 1, 3, 3)** está la siguiente posibilidad que proviene de la descomposición (3, 5).

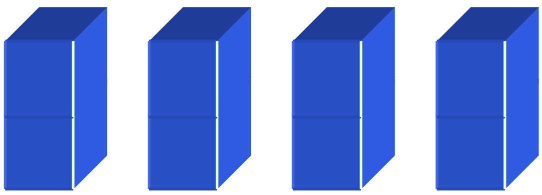


Para **(1, 2, 2, 3)**



Podemos considerarla derivada de la anterior al unir un cubito de los solitarios con uno de la pieza de 3.

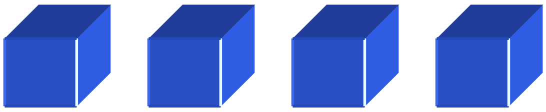
Finalmente está **(2, 2, 2, 2)**, cuya única descomposición es:



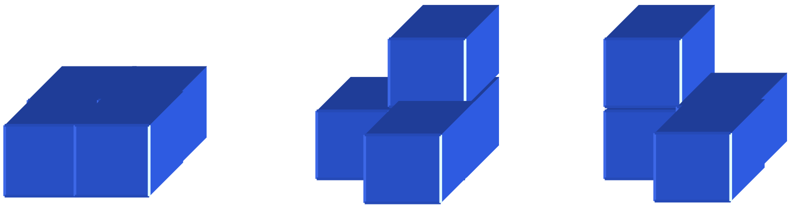
La descomposición en cinco piezas comprende los siguientes tres casos:

(1, 1, 1, 1, 4); (1, 1, 1, 2, 3) y (1, 1, 2, 2, 2).

(1, 1, 1, 1, 4) da lugar a tres resultados que difieren en la pieza de 4 cubos:

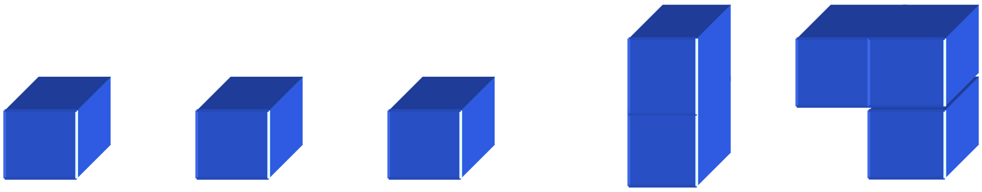


irían con cada una de las piezas



O sea, las tres maneras de construir la pieza de 4 que ya vimos cuando el caso (4, 4).

Para **(1, 1, 1, 2, 3)**, como todas las piezas tienen una sola forma de construirse, pues solamente hay una disección posible:



Y finalmente **(1, 1, 2, 2, 2)** que también tiene una única manera.

La descomposición en 6 ó 7 piezas no tiene mayor interés, pues son sencillas y con pocas posibilidades.

Una segunda actividad consistiría en analizar todas las descomposiciones estudiadas para determinar si cada una de ellas es de solución única o, por el contrario, admite más de una solución y cuántas serían en ese caso.

Variantes al cubo de 2x2x2.

Entre ellas elegimos la del cubo **Hermafrodita**

Son ocho cubos que tienen un orificio y una clavija en en tres de sus caras, siendo las otras tres lisas. Para solucionarlo hay que encajar clavijas y huecos de los cubos, por parejas, y luego encajar los cuatro pares para formar el cubo.

Un enlace con demostraciones de cómo resolver este y otros puzzles, se encuentra en esta curiosa dirección:

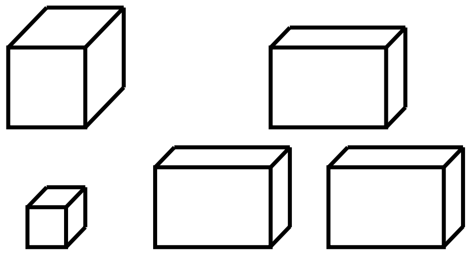
http://www.taringa.net/posts/juegos/2834150/quien-nunca-se-rompio-la-cabeza-haciendo-esto!.html

CUBO DE 3x3x3

En este artículo nos limitaremos a una breve referencia sobre algunas de las disecciones más conocidas o interesantes del cubo de 3x3x3, de entre las miles de posibilidades que hay.

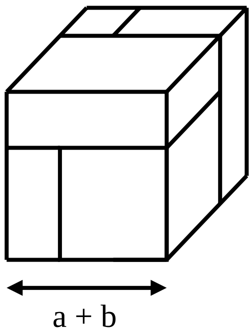
Es muy importante la forma de presentar las disecciones, piezas y soluciones. Es una parte clave en el aprovechamiento didáctico del material. Puede utilizarse la representación tridimensional única o secuencial, mediante dibujos o fotografías, pero también una representación por pisos. En este caso, cada pieza debe tener un número, un nombre o un color que la identifique.

Puzzle de Cardan



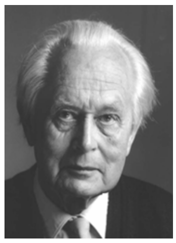
La referencia más antigua de este tipo de puzzles de disección del cubo es la que está atribuida a Cardan (1501-1576) y que con cinco piezas: un cubo de lado a, un cubo de lado b y tres paralelepípedos rectángulos de aristas a, b y a+b, permite la visualización de:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$$

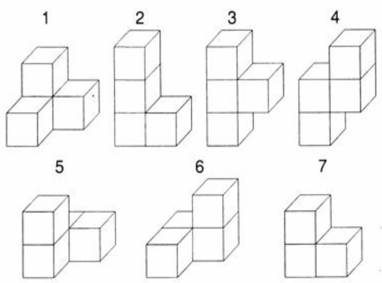


Resulta también muy útil como material didáctico para trabajar las fracciones.

Soma



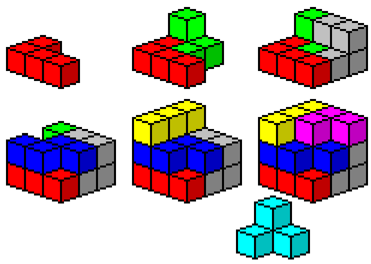
Conocidísimo desde que su inventor, Piet Hein, lo crease. Permite 240 reconstrucciones diferentes del cubo, pero también la realización de otras muchas figuras.



Sus siete piezas, un tricubo y seis tetracubos, son los únicos policubos de ambas clases que cumplen la condición de tener ángulos diedros cóncavos. Obsérvese que las piezas 5 y 6 no son iguales, sino simétricas.

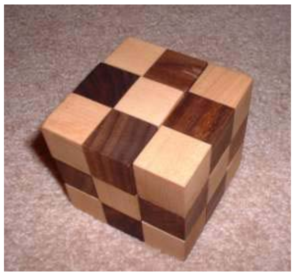
Es digno de un estudio más profundo, considerando sus aplicaciones didácticas y variantes, que quizá sea objeto de un próximo artículo.

Una de las múltiples soluciones podría ser ésta:



Una página interesante y bastante completa sobre el tema es la siguiente: http://www.aulamatematica.com/cubosoma/

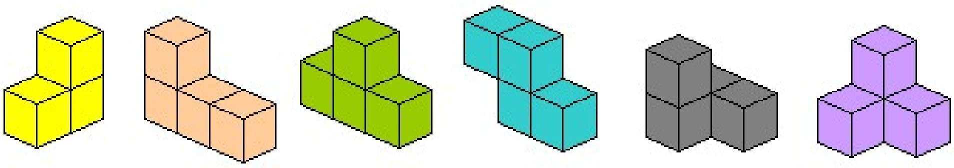
Variantes del Soma



Hay muchas, pero una que nos parece interesante y restringe muchísimo el número de soluciones es la que se denomina **Soma Ajedrezado**, que hace que en la solución deban estar los cubos de dos colores alternados.

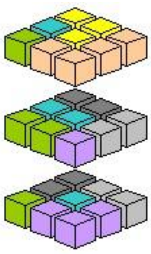
Cubo-7

Es casi idéntico al Cubo Soma. La única diferencia consiste en que las piezas 5 y 6, que en el Soma son diferentes, aquí son iguales. Esto da una mayor cantidad de soluciones posibles.



1 2 3 4 5 6 7

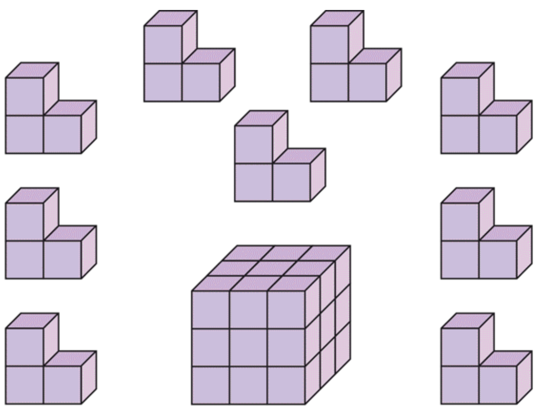
La siguiente solución (por pisos) se corresponde con la primera de la lista de las 358 soluciones del Cubo 7.



Que representadas mediante una matriz numérica sería:

112 | 556 | 566
412 | 446 | 547
322 | 337 | 377

Cubo de O’Berine

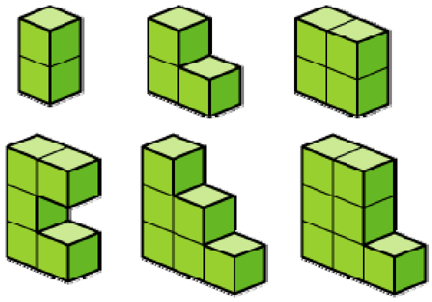


Formado por 9 piezas iguales (tricubos en ángulo).

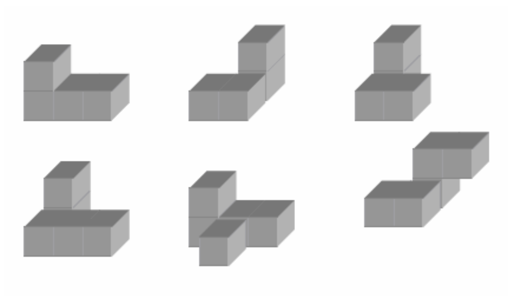
De aparente simplicidad, resulta ser una especie de técnica de diagnóstico para la visión espacial, apreciando en los más pequeños sus habilidades para la resolución de este tipo de puzzles.

Cubo Diabólico

Descrito por el Profesor Hoffmann (Angelo John Lewis) en “Puzzles Old and New” (1893). Está compuesto por 6 piezas, todas sobre un plano, y es progresivo, es decir, sus piezas tienen todas distinto número de cubos, desde dos hasta siete.

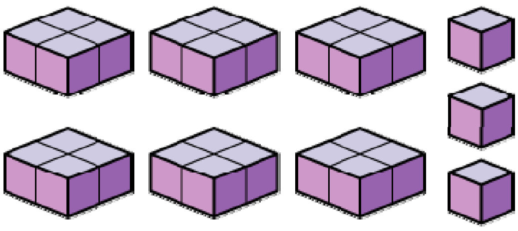


Mikusinski (o de Steinhaus)



Seis piezas: tres tetracubos y tres pentacubos. No se repiten piezas.

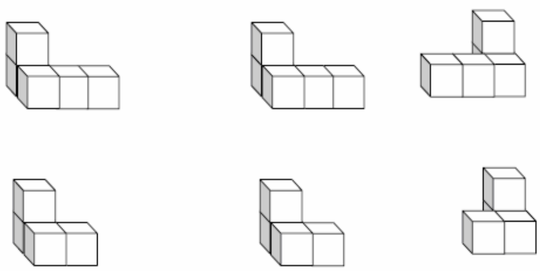
Cubo de Conway



También llamado del empaquetamiento o caja de pizza. Tiene seis tetracubos iguales y tres cubos unitarios.

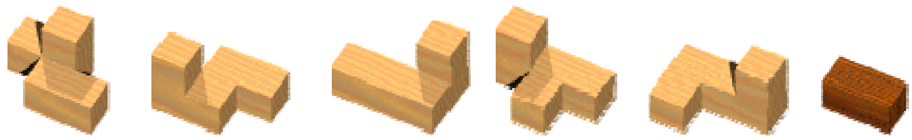
El Cubo de Lesk

Tres tetracubos y tres pentacubos. Hay cuatro piezas que se repiten dos a dos.

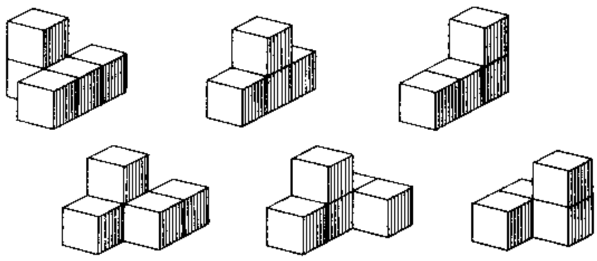


Cubo de Nob

Inventado por Nob Yoshigahara, inventor y coleccionista japonés. Tiene seis piezas: cinco pentacubos diferentes y un dicubo.



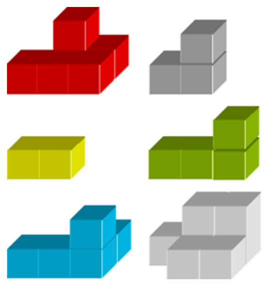
Half Hour Puzzle.



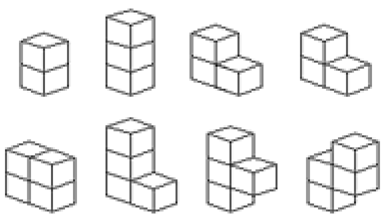
Presenta seis piezas todas diferentes: tres tetracubos y tres pentacubos. Creado por Stewart T. Coffin, después de estudiar varias configuraciones posibles, a fin de que sólo tuviera una única solución (1980).

Rupe

Formados por seis policubos de 2, 3, 4, 5, 6 y 7 elementos. Permite 34 reconstrucciones del cubo y tiene la particularidad, al estar formado por piezas de tamaño correlativo, de facilitar el estudio sistemático de las soluciones por cuanto alguna de las piezas (por ejemplo el hexacubo rojo) puede usarse como pieza inicial ocupando el centro del cubo e ir distribuyendo las otras de más a menos tamaño.



Cubo de Muñoz



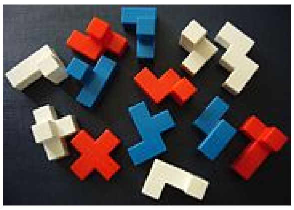
Está formado por ocho piezas: el dicubo, los dos tricubos (el de ángulo, repetido) y los cuatro tetracubos planos que pueden formar parte del cubo de lado 3 (es decir, sin los cuatro cubos puestos en línea).

Cubo Dado

Nueve piezas en forma de ladrillo 3x1, conteniendo o no algunos topos. Deben colocarse las nueve piezas para formar un cubo, de manera que los topos queden visibles y formen con puntos las caras de un dado.

CUBOS DE 4x4x4

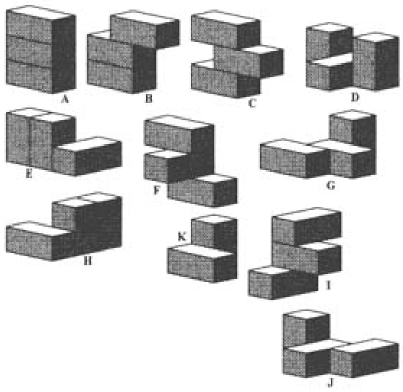
Cubo Bedlam



Es un puzzle inventado por Bruce Bedlam y consta de trece piezas: doce pentacubos y un tetracubo. El objetivo es reunir estas piezas en un cubo de 4 x 4 x 4. Hay 19.186 maneras distintas de conseguirlo.

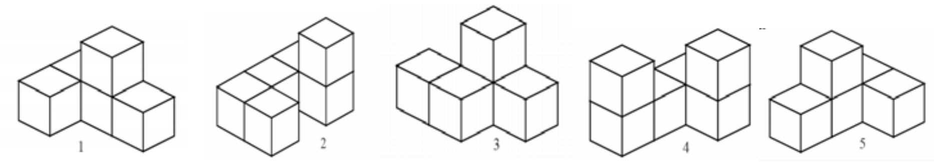
Cubo Diabólico de Hara

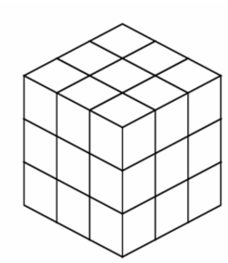
Original del japonés Yoshikatsu Hara. Está formado por 11 piezas, todas ellas formadas por uniones de dicubos, 10 hexacubos y 1 tetracubo.



UN RETO

¿Se atreve a buscar una solución en forma de cubo 3x3x3, uniendo las cinco piezas que se reproducen a continuación?





El problema está sacado de **Homemade Puzzles.**

Será agradable pasarse un rato construyendo con cubos de madera y pegamento, o con policubos de plástico coloreado (centicubos, por ejemplo), y resolviendo estos puzzles. Mejor si es con los alumnos, con familiares o con amigos. Envíen sus soluciones, comentarios y propuestas. Seremos receptivos.

En un próximo artículo publicaremos las soluciones que nos hayan llegado y, tal vez, acometamos un estudio en profundidad del Cubo Soma. Afectuosamente,

Club Matemático