NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 73, marzo de 2010, páginas 25–33

Apolonio, Descartes y Steiner en un apretado envase de palmitos

Carlos Cortínez Núñez (Instituto Universitario Politécnico Santiago Mariño. Maturín-Venezuela)
Carlos Cortínez Torres (Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maturín-Venezuela)
Fernando Castro Gutiérrez (Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maturín-Venezuela)

Fecha de recepción: 22 de diciembre de 2008
Fecha de aceptación: 24 de noviembre de 2009

Resumen En este trabajo se intenta mostrar las potencialidades de la geometría de lo cotidiano para el desarrollo de proyectos educativos. Se examinan algunas experiencias reportadas en la literatura (Balbuena, 2000; Alsina, 2005; Romero y Castro, 2008). Luego se hace un recuento de las posibles vías – de carácter histórico y matemático – que se abren al examinar la disposición del contenido de un envase de palmitos. Una exploración – buscando una configuración rígida de los palmitos – lleva a las figuras y a algunos de los aportes geométricos de Apolonio, Descartes y Steiner. El estudio revela una rica variedad de exploraciones que pueden realizarse – a partir de la geometría de lo cotidiano – con estudiantes de Educación Media y también con futuros profesores de Matemática.

Palabras clave Exploración Matemática, Metodología de Proyectos, Formación de Profesores.

Abstract In this paper we tray to show the richness of the everyday geometry for the development of educational projects. We review some experiences from de literature (Balbuena, 2000; Alsina, 2005; Romero and Castro, 2008). Then we show severally historically and mathematically teaching paths that arise by looking the geometrical configuration in a hart of palm can. The searches of a rigid configuration lead us to the Apollonius, Descartes and Steiner geometrical works. This study reveals a wide variety of possible explorations that can be developed by high school students and future math teachers.

Keywords Mathematical Explorations, Project Method, Teacher Training.

1. Introducción

Una de las aspiraciones de la Educación Matemática es lograr que los estudiantes tengan la oportunidad de "hacer" Matemática, esto es explorar, experimentar, conjeturar, resolver y plantear nuevos problemas , además de desarrollar la capacidad para argumentar y demostrar (NCTM, 2000, pág. 57). La formulación de proyectos a partir de la geometría de lo cotidiano- en el sentido que le da Alsina (2005) - permite al estudiante tener contacto con la exploración de situaciones-problemas y la modelización matemática .Este último proceso está concebido como la traducción de una situación problema, de cualquier área del conocimiento, a un lenguaje matemático. (Biembengut, 1998)

2. Algunas experiencias

En Iberoamérica son particularmente interesantes los proyectos en torno a la geometría de lo cotidiano desarrollados por Luis Balbuena con estudiantes de Educación Media. En algunos de sus trabajos los estudiantes han extraído elementos matemáticos presentes en la arquitectura del casco histórico de la ciudad de La Laguna en Tenerife, España. En otra experiencia un grupo de estudiantes exploró intensamente la geometría presente en unas piezas decorativas de construcción llamadas celosías. En Maturín, Venezuela dos futuros profesores de Matemáticas José Parra y Ana Figueroa (Parra y Figueroa, 1998) desarrollaron un proyecto identificando las transformaciones geométricas plasmadas en los diseños artesanales de las rejas antiguas de la ciudad.

Muchos envases de productos de uso o consumo diario presentan en su estructura una gran riqueza geométrica. Alsina (2005) - quien acuñó la expresión "la geometría de lo cotidiano" - ha compendiado y analizado interesantes situaciones observables en envases y empaques.

3. Geometría en la disposición de los palmitos en un envase

Al intentar vaciar el contenido de un envase de palmitos - obtenidos de la palma de la especie *Bactris gasipaes* - se observó que dos de ellos no salían del contenedor. Un examen más detallado reveló que estábamos en presencia de lo que se llama una configuración rígida de dos palmitos. La búsqueda de condiciones para lograr una disposición rígida de tres palmitos nos llevó a interesantes tópicos y épocas de la Geometría y a algunos aspectos de Matemática discreta y de funciones de variable compleja. En lo que sigue se señalan algunos de los abordajes del problema y sus posibles conexiones con el aula.

4. Un primer intento utilizando lugares geométricos

Es inmediato constatar que para insertar dos palmitos de modo tal que ellos constituyan una configuración rígida, debe ocurrir que la suma de sus diámetros sea igual al diámetro del envase.

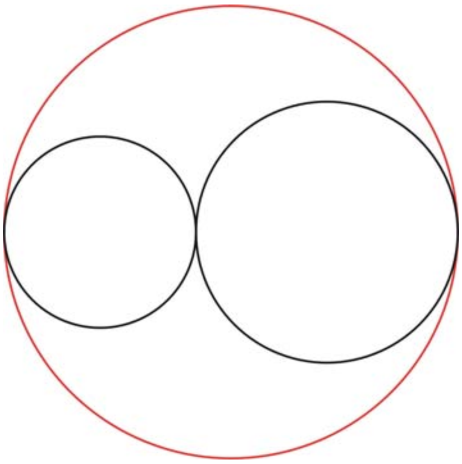

Fig. 1

Veamos ahora cómo insertar tres palmitos tangentes dos a dos y tangentes al envase sin pensar todavía en la exigencia adicional de rigidez de la disposición. Diremos que tres discos, tangentes dos a dos y tangentes a un disco C que los contiene forman una configuración rígida si los puntos de tangencia con el disco C forman un triángulo rectángulo o acutángulo, lo cual obliga a que el centro del disco-envase, esté en el interior del triángulo o en uno de sus lados.

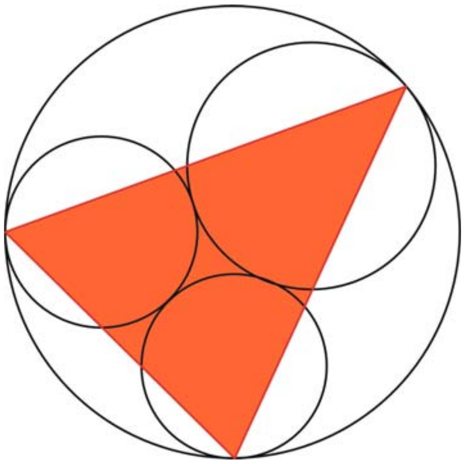

Fig. 2 Configuración rígida

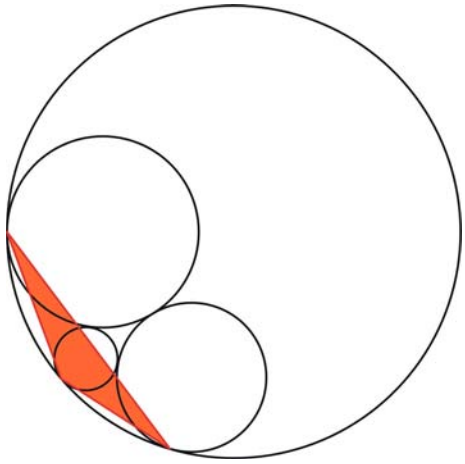

Fig. 3 Configuración no rígida

La situación expuesta permite plantear algunas modelaciones en el aula para confirmar y justificar lo anterior

Aunque nuestro problema se puede enunciar en términos de los discos determinados por las secciones de los palmitos y el envase, volveremos siempre a los palmitos para no perder el sabor inicial del mismo. Después de insertar un primer palmito tangente al envase notamos que existen infinitas parejas de palmitos de diferentes radios, tangentes entre sí, tangentes al primer palmito y al envase. Además los centros de estas parejas están sobre una curva cerrada. Se trata del lugar geométrico (L.G.) de los centros de los discos tangentes al envase y al disco ya insertado. No es difícil concluir que ese lugar geométrico describe una elipse. En efecto: denotemos por P el centro del disco-envase y por R su radio, por Q el centro del primer disco-palmito insertado y por r su radio. Si X es el centro de un disco de radio x, tangente al disco-envase y al disco-palmito ya insertado, este punto debe cumplir:

$$\begin{aligned} d(P,X)+d(Q,X) &= (R-x)+(r+x) \\ &= R+r \end{aligned}$$

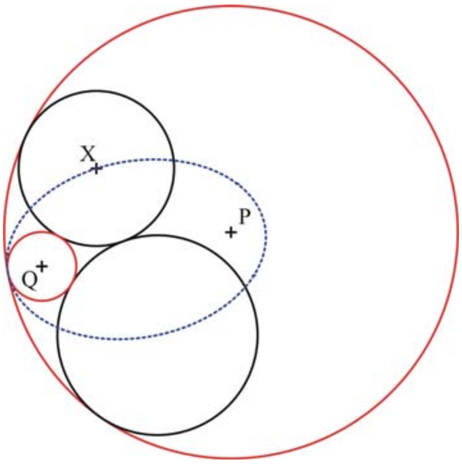

Fig. 4

Esto es, la suma de distancias de P a X y de Q a X es constante, así el lugar geométrico buscado es una elipse, cuyos elementos son simples de describir.

Ahora queremos determinar el lugar geométrico de los centros de los discos tangentes a dos discos interiores tangentes entre sí y tangentes al envase. Supongamos que uno de los discos tiene centro en Q y radio R y el otro tiene centro en S y radio r. Si P es un punto del L.G. buscado debe cumplirse que:

$$d(P,Q) - R = d(P,S) - r$$
$$d(P,Q) - d(P,S) = R - r$$

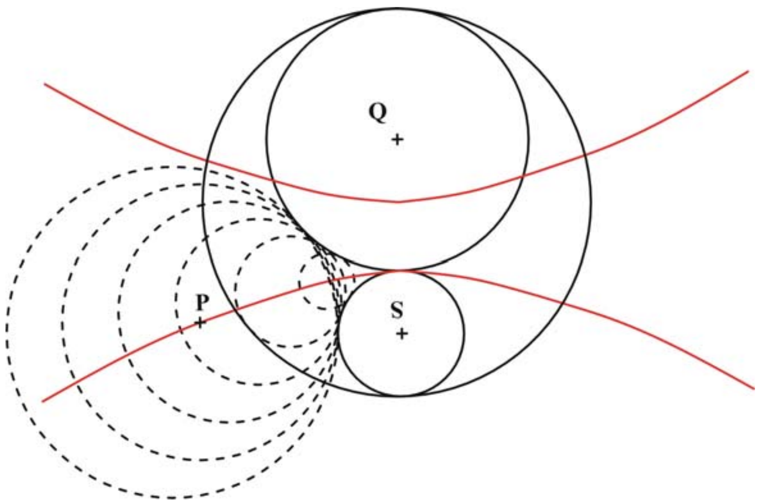

Fig. 5

De esta expresión se infiere que la diferencia entre las distancias de P a Q y de P a S permanece constante, luego el L.G. buscado es una hipérbola cuyos elementos, al igual que los de la elipse anterior, son sencillos de describir.

Finalmente, la intersección de la rama de la hipérbola que pasa por el punto de tangencia de los dos discos iniciales con la elipse permite conocer dos puntos que son los centros de circunferencias tangentes a los otros dos discos y al disco exterior. Por lo menos una de estas circunferencias formará una configuración rígida junto a las dos primeras. Las razones pueden ser desarrolladas por el lector, utilizando las propiedades que poseen los cuadriláteros inscritos en una circunferencia.

5. Algunas actividades en el aula

El problema de insertar discos de igual radio en un disco dado, puede generar una interesante actividad en el aula de bachillerato, que se puede iniciar, insertando en primer término dos discos; luego tres, cuatro y así sucesivamente. Estas actividades requieren desarrollar cálculos algebraicos derivados de la aplicación de la proporcionalidad de segmentos y construcciones con regla y compás. Para realizar esta última acción, el estudiante debe utilizar información acerca de longitudes de los lados de polígonos regulares inscritos en una circunferencia dada.

Esta actividad realizada con futuros profesores puede dar lugar a una discusión sobre la posibilidad de generalizar estos problemas y analizar la constructibilidad de estos discos con regla y compás.

6. Soluciones de la mano de la historia

Es muy probable que las plantas envasadoras de palmitos no sigan la vía que hemos expuesto .Por ello continuando nuestra búsqueda de soluciones al problema nos encontramos con los valiosos aportes de Apolonio de Pérgamo (262 al 190 a.C.), quien en su obra *Tangencias* expone "Los Diez Problemas de Contacto de Apolonio". ¿Qué se plantea en esos problemas? Consideremos tres tipos de objetos que pueden ser puntos (*P*), rectas (*L*) y circunferencias (*C*). Se trata de trazar, con regla y compás, una circunferencia tangente a tres de esos objetos, entendiendo que una circunferencia es tangente a un punto si éste se encuentra sobre la circunferencia. Es claro que hay diez situaciones posibles que representaremos simbólicamente como: *PPP*; *PPL*; *PLL*; *LLL*; *PPC*; *PCC*; *LLC*; *LCC*; *LPC* y *CCC*. Observe que algunos de los problemas expuestos son de fácil construcción, otros no, requieren el uso ya sea de la homotecia o de la inversión geométrica. Se cree que el último problema-muy próximo a la situación problema que hemos venido abordando- donde se propone construir una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas, no fue del todo estudiado por Apolonio. Siglos más tarde, René Descartes (1586 – 1650), analiza y discute este problema de contacto a tres circunferencias, y resuelve el caso en que las tres circunferencias son tangentes dos a dos, estableciendo además una bella relación entre sus curvaturas, esto es los valores recíprocos de sus radios. Si $a, b\ c$ representan las curvaturas de tres circunferencias, entonces la curvatura *d* de la cuarta circunferencia tangente a las tres anteriores satisface la siguiente relación:

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2$$

Por convención, cuando un disco es contactado desde su interior se dice que su curvatura es cóncava y a tal curvatura se le asocia un valor negativo

Una vía, utilizando herramientas geométricas sencillas para establecer la relación anterior, viene dada por los siguientes pasos, en donde *p*, *q*, *r* representan los radios de tres círculos dados y *s* el radio del cuarto:

- Establecer que la longitud de una de las tangentes exteriores a las circunferencias de radios *p* y *q* respectivamente es igual a $2\sqrt{pq}$

- Dadas dos circunferencias exteriores de radios *p* y *q* y una tercera circunferencia de radio *r*, tangente exteriormente a las dos anteriores. Establecer la siguiente relación: donde *X*, *Y* son los puntos de tangencia de la tercera circunferencia con las dos primeras y *PQ* es la longitud de la tangente exterior a las dos primeras circunferencias.

$$\overline{XY}^2 = \frac{r^2}{(r+p)(r+q)} \times \overline{PQ}^2$$

- Consideremos las tres circunferencias tangentes dos a dos. Establecer que el radio *s* de una cuarta circunferencia tangente a las otras tres es:

$$s = \frac{pqr}{pq + pr + qr + 2\sqrt{pqr(p+q+r)}}$$

- Por último haciendo $a = 1/p$, $b = 1/q$, $c = 1/r$, y $d = 1/s$ se obtiene la relación de Descartes.

Además, se establece que en el plano es imposible situar más de cuatro discos de forma tal que cada uno toque a los demás, siendo tangentes cada par de discos en puntos diferentes, planteándose así dos posibilidades gráficas: tres de ellas rodean a una menor, o bien una de ellas rodea a la otras tres, esta última configuración corresponde a nuestro problema inicial

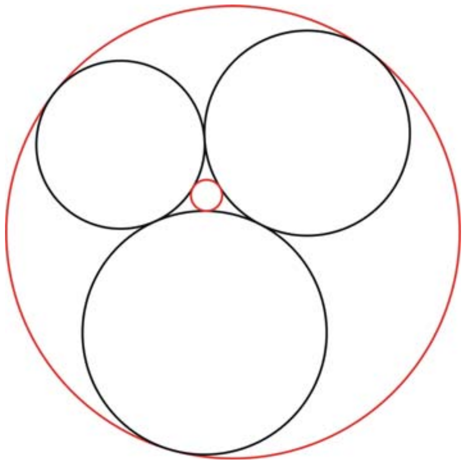

Fig. 6

Frederick Soddy, premio Nóbel de Química (1921) por sus investigaciones vinculadas al estudio de isótopos, redescubre y profundiza el resultado de Descartes y lo generaliza a cinco esferas en el espacio. En el volumen 137 de la revista científica *Nature* publicada en 1936 se encuentra un poema de su autoría, de título *El Beso Exacto*, describiendo los anteriores hechos geométricos.

"Pueden besarse los labios, dos a dos,
sin mucho calcular, sin Trigonometría;
más ¡Ay!, no sucede igual en Geometría,
pues si cuatro círculos tangentes quieren ser
y besar cada uno a los otros tres,
para lograrlo habrán de estar los cuatro
o tres dentro de uno, o alguno
por otros tres, a coro rodeado.
De estar uno entre tres, el caso es evidente
pues tres veces son besados todos desde afuera,
Y el caso tres en uno no es quimera,
al ser este uno por tres veces besado internamente"

"Cuatro círculos llegaron a besarse,
cuanto menores tanto más curvados,
y es su curvatura tan sólo la inversa
de la distancia desde el centro
Aunque este enigma a Euclides asombrara,

ninguna regla empírica es necesaria:
al ser las rectas de nula curvatura
y ser las curvas cóncavas tomadas negativas,
la suma de cuadrados de las cuatro curvaturas
es igual a un medio del cuadrado de su suma"

Es habitual, en la literatura asociada a este tema, llamar a los dos círculos que son besados uno internamente y el otro externamente por los otros tres círculos, *círculos de Soddy*.

La fórmula de Descartes nos indica que hay una infinidad de soluciones al problema de los tres palmitos. Además si el disco exterior y el más pequeño permanecen fijos hay una infinidad de configuraciones o collares con una propiedad: la suma de las curvaturas de los tres discos tangentes dos a dos permanece constante. Para constatar esto último basta despejar *d* en la fórmula antes mencionada y sumar las dos soluciones.

Examinemos una situación particular, pero de singular riqueza, para ser desarrollada en el aula, utilizando la fórmula de Descartes. Consideremos un disco inicial de radio 1 y pongamos dentro de él dos discos de radio $\frac{1}{2}$. Luego las curvaturas de los tres discos son $c=-1,\quad a=b=2$. Reemplazando esos valores en la fórmula de Descartes obtenemos una ecuación cuadrática cuya solución es 3, siendo la curvatura de un cuarto disco de radio $\frac{1}{3}$, tangente tanto al disco inicial como a los dos discos de curvatura 2 .Por simetría se puede ubicar un segundo disco de curvatura 3.

Si continuamos con este proceso aritmético-geométrico, podemos determinar discos tangentes a los discos de curvaturas 2, 3 y -1, resultando un disco de curvatura 6. Reiterando este proceso hallaremos un disco de curvatura 15 tangente a los discos de curvaturas 2, 2 y 3, el cual generará tres familias que nacen de discos de curvaturas 35, 38, y 38 respectivamente como lo ilustra la figura 8, note que todos los valores de las diferentes curvaturas son números enteros, dejamos al lector la justificación de este hecho.

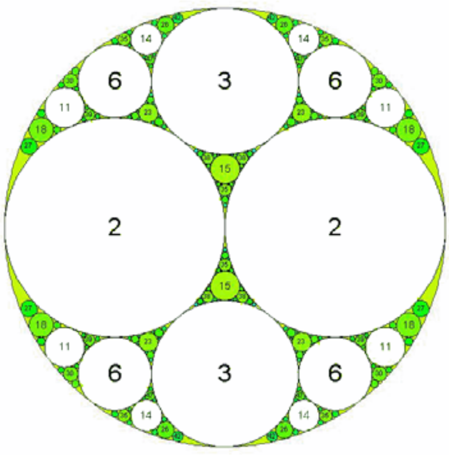

Fig. 7

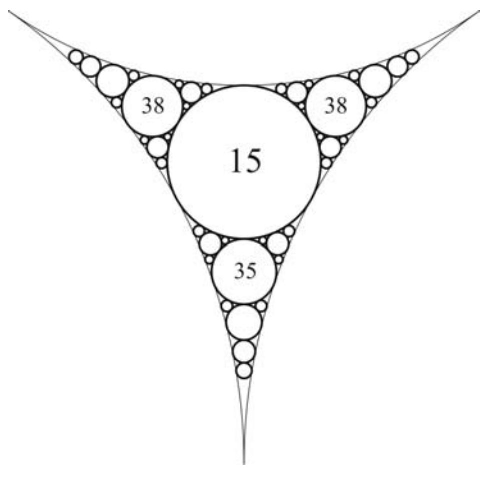

Fig. 8

La situación anterior da origen a una estructura fractal, conocida como *Gasket de Apolonio* el cual admite generalizaciones en espacios de dimensiones mayores que 2.

Al dejar fijos, el disco exterior y uno más pequeño, interior, de modo tal que la distancia de los centros sea menor que la diferencia de sus radios, podemos construir también una familia de discos, el primero tangente a los dos discos, el siguiente tangente al anterior y tangente a los dos discos iniciales y así sucesivamente; si se llega a la situación en donde el último disco es tangente al primer insertado, se dice que esta familia de discos constituyen un *collar o cadena de Steiner* (Jakob Steiner 1796-1863).

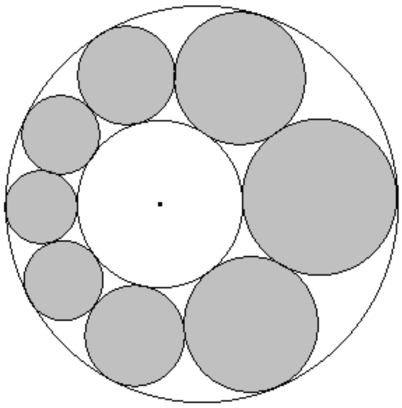

Fig. 9

La literatura especializada, cuando se refiere a la situación anterior, usa la expresión *porismo de Steiner* La palabra porismo tiene varias acepciones, Pappus de Alejandría señala que el porismo tiene características de teorema - porque se propone algo por demostrar - y también de problema porque en el porismo se propone alguna construcción (Boyer ,1968).

El porismo de Steiner afirma: Dados dos discos uno interior al otro, independientemente de donde empecemos, siempre conseguimos un collar de Steiner o nunca lo hacemos. Esto es, para dos circunferencias dadas una interior a la otra entonces no existe un collar de Steiner, o bien existen infinitos collares.

En el caso particular de dos circunferencias concéntricas la mayor de radio *R* y la menor de radio *r* se tiene el siguiente resultado, simple de deducir: Ellas poseen un collar o cadena de Steiner de *n* circunferencias si y sólo si:

$$sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{R-r}{R+r}$$

Y por lo tanto el porismo se cumple para esta situación.

Para establecer una demostración general del porismo de Steiner, en el caso de dos circunferencias una en el interior de la otra, se recurre a una excelente herramienta que se ubica tanto en el campo de la geometría como en el área de las funciones de variable compleja: a saber, la inversión, dicha transformación permite “poner concéntricas a dos circunferencias dadas”, reduciendo así el porismo al caso particular señalado anteriormente.

Por nuestra parte para cerrar este apartado acotamos que Seamus Bellew encontró una fórmula que generaliza la de Descartes para collares de *n* discos (Weisstein, 2009). El lector puede demostrar -utilizando la fórmula de Bellew- que la suma de las curvaturas de los discos del collar permanece constante. ¿Qué otras regularidades están presentes en una cadena de Steiner?

7. A modo de cierre

Reiteramos que cada una de las actividades antes señaladas puede ser el inicio de una amplia exploración - dentro o fuera del aula - que rápidamente puede conducir a más interrogantes que permitan encontrar sorprendentes aplicaciones en variados temas matemáticos. Recomendamos al lector revisar los trabajos de Francisco Javier García Capitán, Silvana Marini Rodrigues Lopes y el sitio web de Eric W. Weisstein, http://mathworld.wolfram.com

Bibliografía

Alsina, C. (2005). *La Geometría de lo Cotidiano: Placeres y Sorpresas del Diseño*. Editorial Rubes: Barcelona.

Balbuena, L. (2000). *Las Celosías: Una Geometría Alcanzable*. Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias: La Laguna –España.

Biembengut, M. (1998). *Modelagem Matemática e suas Implicações no Ensino*. Actas del CIBEM III. Caracas –Julio.

Boyer, C.(1968). *A History of Mathematics*. Wiley International. New York.

García, F. (2002) *El porismo de Steiner*. Disponible en el sitio web de García Capitán; http://garciacapitan.auna.com/escritos/

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM: Reston.

Parra, J; Figueroa, A. (1998). *La Geometría en las Rejas Antiguas de Maturín*. Audiovisual. UPEL: Maturín.

Rodrigues, S. (2002) *Complexidades em geometria euclidiana plana*. Tesis de maestría. Pontifícia Univesidade Católica Do Rio de Janeiro.

Romero, S y Castro, F. (2008). *Modelización matemática en secundaria desde un punto de vista superior: el problema de Dobogoko. Modelling in Science Education and Learning.* Volumen I, Nº 2. Disponible en: www.msel.impa.upv.es/cmsms/

Weisstein, E. (2009). *Soddy Circles*. Math.World. Disponible en www.mathworld.wolfram.com/SoddyCircles.html

Carlos Cortínez Núñez. Departamento de Ingeniería Electrónica del Instituto Universitario Politécnico Santiago Mariño. Maturín –Venezuela.
Email: ccortinez@cantv.net

Carlos Cortínez Torres. Departamento de Matemática. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maturín-Venezuela.
Email: cacorto@cantv.net

Fernando Castro Gutiérrez. Departamento de Matemática. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Maturín-Venezuela.
Email: fercasgu@hotmail.com