NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 73, marzo de 2010, páginas 79–88

Tras el muro misterioso, cuadrados y triángulos

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz

-Club Matemático[1]-

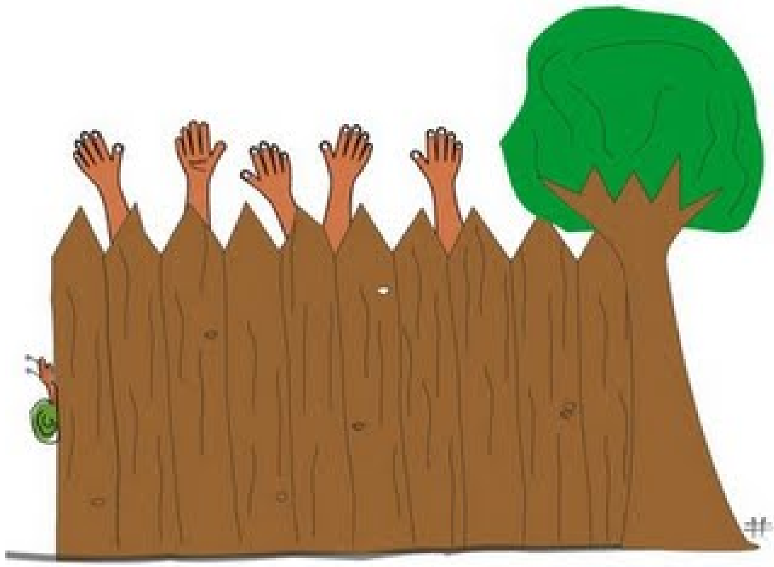
Resumen Soluciones a los ejercicios propuestos en el anterior NÚMEROS, con especial incidencia en la metodología de su resolución. Análisis de los problemas propuestos en los Torneos de Primaria de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas.

Palabras clave Olimpiadas matemáticas; Resolución de problemas; Metodología; Problemas para primaria; Problemas sin texto.

Abstract Solutions to the exercises in the previous issue, with special emphasis on the methodology of its resolution. Analysis of the problems set in the Primary Tournaments Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas.

Keywords Olympics mathematics; Solving math problems; Methodology; Problems primary; Math problems without text

Terminamos nuestro anterior artículo con un curioso problema que utilizamos en nuestras charlas para llamar la atención sobre formas de presentarlos, búsqueda de distintas soluciones y, especialmente, la relación que hay entre lectura y comprensión.



[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón**, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y **Manuel García Déniz**, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife). mgarciadeniz@gmail.com / jaruperez@gmail.com

Entre las curiosidades que presenta está el no tener ningún texto escrito, ni siquiera para hacer una pregunta. Claro que podría ponerse, pero sin duda es más interesante así; de esta manera puede proponerse a alumnos de Educación Infantil que aún no saben leer y, también, porque la comprensión incluiría la búsqueda de la pregunta del problema.

Pero eso no quita para poder proponerse a alumnos de mayor edad e, incluso, a adultos y profesores para reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas. Van a aparecer cuestiones muy interesantes sobre maneras de presentar un problema, el proceso de lectura, la comprensión, la búsqueda de soluciones múltiples, la comprobación de resultados, el uso de la estrategia de modelización en diferentes momentos del proceso, etc.

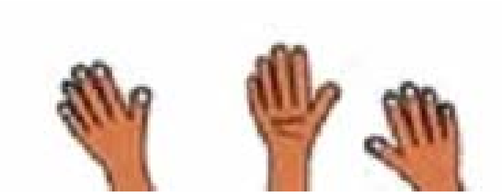
Debería empezarse, como siempre, por la fase de COMPRENDER, es decir, la búsqueda de datos, objetivo y relaciones. Aquí parece interesante comenzar por el objetivo ya que no tenemos una pregunta y dicha pregunta habrá de salir de la lectura visual, que requiere observación (mirar con inteligencia) y la idea de problema. Los niños no suelen tener complejo a la hora de ofrecer ideas. Dirán sucesivamente que la pregunta debe ser: ¿Cuántos árboles hay? ¿Cuántos caracoles hay? ¿Cuántas manos hay? ¿Cuántos tablones tiene la valla? Ahí comienza el debate. ¿Es difícil contestar a esas preguntas? No, sólo hay que contar sobre el dibujo: 1 árbol, 1 caracol, 5 manos, 10 tablones. Pues, ¡entonces no hay problema! Para que el dibujo propuesto sea un problema es necesario que la respuesta a la pregunta no sea obvia, no sea evidente, sino que, por el contrario, exija un fuerte proceso de resolución. Esa es la diferencia entre problema y ejercicio. El objetivo deberá ser algo oculto, que requiera pensar mucho antes de poder encontrarlo. No hace falta decir más; inmediatamente dirán: **¿Cuántos niños habrá detrás de la valla?** Con niños mayores pasará igual y con adultos también; si acaso la pregunta aparecerá antes, mezclada con las anteriores. Habrá de explicar por qué ésa es la buena y las otras deben descartarse.

Ahora deberá buscarse los datos. Todo lo que se ve es un posible dato; son cosas conocidas y manejables matemáticamente. Pero no todas valen, deben presentar coherencia con el objetivo. Para averiguar cuántos niños habrá detrás de la valla no me sirven el árbol, ni el caracol, ni la propia valla. Los datos son las manos. Pero se necesita un análisis de lo que se aprecia en esas manos como datos del problema: ¿Cuántas? ¿Cómo son? ¿Qué características presentan?

Y comienza así la extraordinaria tarea de resolver un problema. Las observaciones aparecen poco a poco, unas detrás de otras, en relación siempre con las preguntas que hace el profesor.

.- ¿Cuántas manos hay? Son cinco.

.- ¿Cómo son? Unas son iguales y otras no.



.- ¿En que se diferencia? Se distinguen en que unas se ven por delante y otras por detrás.

.- ¿Cómo lo sabes? Porque en unas se ven las uñas y en las otras no.

.- ¿Cuántas de cada clase? Cuatro se ven por detrás y una por delante. En la que se ve por delante no se ven las uñas pero sí se aprecian las marcas de la piel de las palmas.

.- ¿Son iguales las cuatro que se ven por detrás? No, hay tres que sí y una que no.

.- ¿En qué lo aprecias? En la posición del dedo gordo.

.- ¿Entonces? …

Y aparece la primera maravillosa idea. Los niños empiezan a mirar sus propias manos, las toman como modelos y observan una y otra vez hasta que deducen: **Tres de las que se ven por detrás son manos derechas y la otra es izquierda**.

.- ¿Y la que se ve por delante? También es derecha.

Resumiendo: **hay cinco manos, cuatro son derechas y una izquierda**.

¿Y la relación? ¿Cuál es? Si el objetivo es averiguar cuántos niños hay tras de la valla y los datos son las manos que vemos, la relación es **que cada niño tiene, normalmente, dos manos, una derecha y la otra izquierda y que puede estar enseñando una cualquiera de ellas o las dos**.

Fantástico, ¿hace falta un diagrama? No, el dibujo que representa el problema nos indica todo lo que necesitamos saber.

Viene ahora la fase de PENSAR. Hay que elegir una estrategia de pensamiento que nos permita afrontar la resolución. Podría ser la **modelización**; tenemos ya la cantidad de manos y sus características, por lo tanto los alumnos podrían dramatizar la situación y, por **ensayo y error**, ir buscando la cantidad posible de niños que puede haber tras la valla. Pero parece mejor y no muy complicado el **organizar la información** de que disponemos. Así, pues, pensar en lo que sucede si cada niño enseña una mano o si, por el contrario, puede enseñar una o las dos.

La fase de EJECUTAR nos dará una solución para cada caso. Si cada niño enseña una mano tendremos **cinco niños detrás de la valla**. Si cada niño puede estar enseñando una o las dos manos, al contar cuatro derechas esto significa que hay al menos cuatro niños (cada niño sólo puede tener una derecha). Si la izquierda es de un nuevo niño, la solución es igual a la anterior. Si es de uno cualquiera de los niños ya contabilizados, entonces hay **cuatro niños detrás de la valla**.

Pero lo maravilloso no acaba aquí. Muy rápidamente alguno piensa y se da cuenta que puede haber más niños detrás de la valla, siempre y cuando no estén enseñando alguna mano. ¿Cuántos? Todos los que quiera uno pensar. ¿Cómo expresamos esa idea? Después de algunas controversias podemos llegar a una expresión matemática que evite la aparición de cosas como "muchísimos" o, peor, "infinitos". Esa expresión es: también puede haber **más de cinco niños detrás de la valla**, contando a los que no levantan las manos. Es extraordinario pensar que hemos encontrado un problema con solución múltiple, partiendo de una situación tan simple.

Pero, claro, ahora llega la fase de RESPONDER. Hay previamente que comprobar y analizar cada una de las tres soluciones para dar una respuesta adecuada. Ahora también podemos utilizar la modelización y la dramatización para realizar estas tareas. Utilizando un biombo (o una pizarra, o una pantalla, o…) podemos pedirle a un grupo de alumnos que se coloquen detrás y que levanten las manos que crean oportunas para que se vea sobre ella lo mismo que en el dibujo del problema. Realizadas las tres comprobaciones podemos presentar nuestra

Respuesta: **Detrás de la valla puede haber cinco niños, si cada uno levanta una mano, cuatro niños, si uno de ellos levanta las dos manos, o más de cinco, si hay otros niños que no levantan ninguna mano**.

También presentamos dos problemas que habían sido descartados de la selección hecha para la XX Olimpiada Matemática Nacional.

Veamos el primero de ellos.

EL CAMPO AGRANDADO

Julián posee un terreno cuadrado vallado. Decide agrandarlo de manera que el terreno siga siendo cuadrado y tenga cada lado con un metro más. De este modo la superficie de su campo aumenta en 41 m^2.

¿Cuál era la longitud de los lados del anterior terreno de Julián?

Ahora que el terreno es más grande, el vallado de antes no es suficiente: ¿cuántos metros de valla faltan?

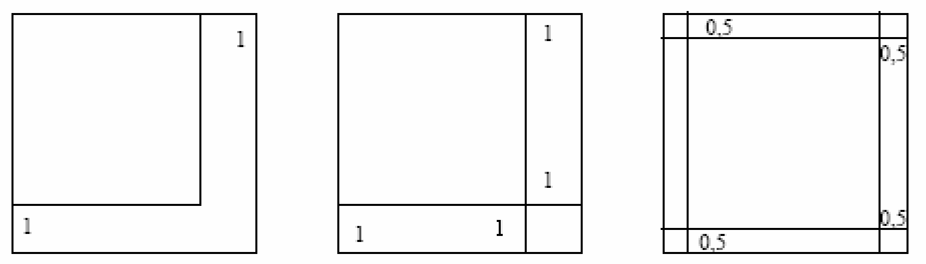
Explicad cómo habéis hallado vuestras respuestas.

Los datos del problema: terreno en forma de cuadrado (geometría).

La relación: cuando aumenta el lado en un metro, el área aumenta en 41 m^2 (medida).

El objetivo: La medida del lado del terreno original y los metros de valla que faltan (cuánto aumenta el perímetro).

El diagrama: uno cualquiera de éstos:



La segunda cuestión se resuelve fácilmente: puesto que cada lado aumenta un metro, el perímetro aumenta 4 metros; estos son los metros de valla que faltan. El área la podemos intentar por otras metodologías.

Si trabajáramos por modelización, tendríamos que dibujar y recortar las figuras sobre papel o cartulina. Recortar los trozos nuevos y ajustarlos a la figura inicial, ver cómo se prolonga el cuadrado y decidir qué figura se obtiene para relacionarlas, finalmente, entre sí.

Al descomponer la parte nueva se forman dos rectángulos y un cuadrado pequeño de 1 metro de lado. Los dos rectángulos juntos tienen por área   41-1 = 40 m^2.

Teniendo el mismo largo (el lado del viejo campo) y el mismo ancho (1 metro), tienen la misma área, que vale para cada uno de ellos 20 m^2 Los lados del viejo campo miden, por tanto, 20 metros.

Si trabajamos por ensayo y error, bastaría con utilizar una tabla en la que hacemos variar el lado, para determinar la solución correspondiente:

Medida del lado anterior (en m)	16	17	…	20	21	…
Área del cuadrado anterior (en m^2)	256	289		400	441	
Medida del lado nuevo (en m)	17	18		21	22	
Área del cuadrado nuevo (en m^2)	289	324		441	484	
Diferencia entre las áreas (en m^2)	33	35		41	43	

Rápidamente se percibe que las diferencias entre los dos cuadrados aumentan de 2 en 2 cuando vamos incrementando el lado, y que hay una sola solución.

Otra manera de tener la respuesta a la segunda pregunta a partir de esta tabla sería también sencilla, pues bastaría con realizar algunos cálculos aritméticos de suma y multiplicación para tener el perímetro del primer cuadrado y el del nuevo, y una resta para, finalmente, tener el aumento producido en el vallado.

$4 \times 20 = 80$ m; $\quad 4 \times 21 = 84$ m; $\quad 84 - 80 = 4$ m.

También se puede organizar la información en función de los conocimientos específicos que se posean acerca de la relación entre área y lado y perímetro y lado. O también utilizar un poco de álgebra.

$$(x + 1)^2 - x^2 = 41$$

Pero parece intentar matar moscas a cañonazos, ¿verdad?

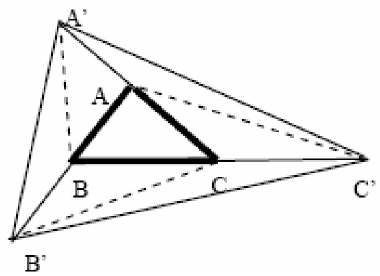
Solución: El lado del terreno original mide 20 metros y faltan 4 metros de valla.

Ahora le toca al segundo problema.

COMPARACIÓN DE TRIÁNGULOS

Para comenzar, considerad un triángulo cualquiera ABC.
Después prolongad:

- el segmento AB a partir de B en un segmento de la misma longitud de AB, obteniendo así el punto B';
- el segmento BC a partir de C en un segmento de la misma longitud de BC, obteniendo así el punto C';
- el segmento CA a partir de A en un segmento de la misma longitud de CA, obteniendo así el punto A';



Comparad las áreas de los triángulos AB'C, BC'A y CA'B con la del triángulo ABC.
¿Cuál es la razón o cociente entre las áreas de los dos triángulos A'B'C' y ABC?
Explicad cómo habéis encontrado vuestras respuestas.

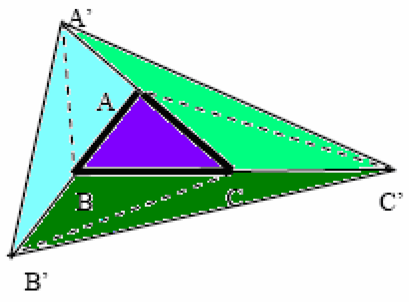
Volvemos a tener un problema en el que se unen la geometría (del triángulo) con la medida (área del triángulo, comparación de áreas).

Pero sobre todo es valioso por dos aspectos interesantes: primero, por la interpretación del dibujo que se presenta y su utilización, y, segundo, por el uso de esa escritura geométrica descriptiva tan singular y a la que tan poca atención se presta últimamente.

Debemos conocer claramente que el área de un triángulo vale la mitad del producto de la longitud de un lado por la longitud de la altura correspondiente al mismo.

Luego, los conceptos gráficos de base y de altura son fundamentales para analizar todos los casos de igualdad de área que se presentan.

Considerar el triángulo ACB' y darse cuenta que está formado por dos triángulos, CBA y CBB', que tienen la misma área puesto que tienen la misma altura respecto a los lados iguales AB y BB'. De modo análogo, constatar que el triángulo BAC' está formado por dos triángulos, ACB y AC'C, con la misma área, y que el triángulo CBA' está formado por dos triángulos, BAC y BA'A, con la misma área. Concluir, por consiguiente, que cada uno de los triángulos ACB', BAC', CBA' tiene área doble que la de ACB.



Descomponer el triángulo A'C'B' en 7 triángulos. Después observar que, utilizando el mismo tipo de razonamiento del apartado anterior, los triángulos B'BC y B'CC' tienen la misma área, igual a la de ACB, así como C'CA y C'AA' y también A'AB y A'BB'. Deducir que tenemos entonces 7 triángulos de área igual a la de ACB, que componen el triángulo A'C'B'.

La razón requerida es, por tanto, 7.

Respuesta: Cada uno de los tres triángulos ACB', BAC', CBA' tiene un área que mide el doble que el área de ACB. La razón entre las áreas de los triángulos A'B'C' y ABC es 7.

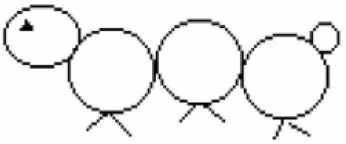
En diversos artículos de esta serie hemos prestado atención a diferentes concursos de problemas que se realizan. Con respecto a la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas hemos mencionado ya, en numerosas ocasiones, el Torneo para alumnos de 2º de E.S.O. y, en nuestro último artículo, las XX Olimpiadas Nacionales por ella organizadas.

Pero no habíamos hecho ningún comentario, hasta ahora, del Torneo de Primaria que dicha Sociedad organiza para alumnos de 6º de E. P. La razón es que ha sido muy recientemente cuando se ha podido llevar a efecto, a pesar de haberlo intentado en muchas otras ocasiones. Por fin se cuentan ya con tres ediciones de este Torneo y ya está en marcha la Convocatoria del Cuarto.

Hoy vamos a comentar un poco los problemas aparecidos en las ediciones anteriores.

El **I Torneo de Matemáticas** de Educación Primaria presentó estos cinco problemas:

1.- El cuerpo del gusano está formado por círculos. ¿Cuántos gusanos diferentes hay, si 3 de las 5 partes de su cuerpo son amarillas y las otras 2 son verdes?



Es un problema bien sencillo, que presenta una iniciación a la combinatoria sin necesidad de teorías ni fórmulas de cálculo. Basta con una pequeña **investigación** que se puede realizar repitiendo el dibujo y coloreando o simplemente con un código de letras para representar colores, del tipo AAVAV. El orden y la exhaustividad garantizarán la búsqueda de todos los gusanos diferentes. Un conteo final dará la respuesta.

2.- Roberto hace un túnel con cubos (figura 1). Cuando se aburre, lo deshace y forma la pirámide de la figura 2.
¿Cuántos cubos del túnel original le han sobrado, después de hacer la pirámide?

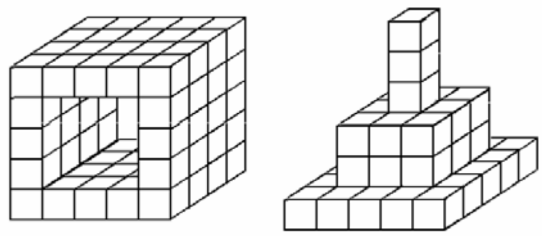


Figura 1 Figura 2

Es éste un problema de conteo inteligente. Cada persona tiene sus estrategias personales de conteo. Aquí se pueden evidenciar todas ellas y garantizar el conocimiento compartido entre todos los alumnos para, así, mejorar sus propias estrategias. El ideal está en imaginar agrupaciones de cubos fácilmente contables y utilizar las operaciones de sumar, restar y multiplicar para el cálculo final.

3.- Cinco chicos se pesan de dos en dos, de todas las maneras posibles. Los pesos de las parejas son: 90kg, 92kg, 93kg, 94kg, 95kg, 96kg, 97kg, 98kg, 100kg y 101kg.
El peso conjunto de los cinco chicos es:

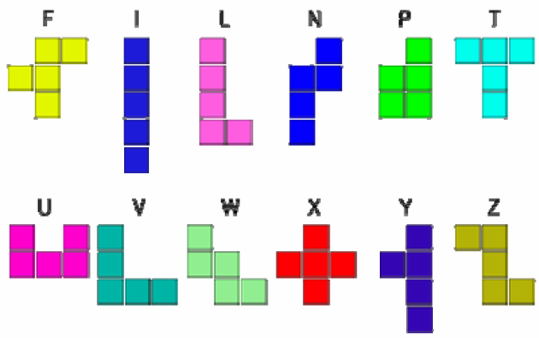
Hay dos ideas básicas que los alumnos deberán poner en juego:

1º, cuántas parejas se pueden realizar, para comprobar que los datos del problema están ajustados, y

2º, que ocurre si sumamos todas las pesadas que forman el conjunto de datos.

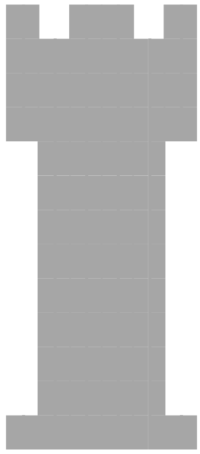
A partir de ahí es un sencillo problema aritmético de sumar y dividir.

4.- Un pentaminó es una figura geométrica compuesta por cinco cuadrados unidos por sus lados. Existen doce pentaminós diferentes, que se nombran con diferentes letras del abecedario.



P R O B L E M A S

Usándolos todos, construye la siguiente torre:



Parece bastante complejo que un alumno pueda realizar este problema correctamente y en un tiempo limitado, como es el de una prueba. Pero puede hacerse manipulativamente, dando a cada uno un juego de doce pentaminós y una plantilla del objetivo. Si están acostumbrados a trabajar este tipo de actividades, pueden incluso realizarlo dibujando o coloreando sobre la plantilla. No olvidemos que este material es uno de los más utilizados en la Escuela Primaria para desarrollar el sentido espacial. En un artículo anterior de esta revista hemos dado una guía de actuación con los pentaminós o pentaminos o pentominós, como gustéis… Por si están interesados, al final del artículo se encuentra una posible solución.

5.- Coloca los signos matemáticos que hagan falta para convertir las siguientes expresiones en ciertas:

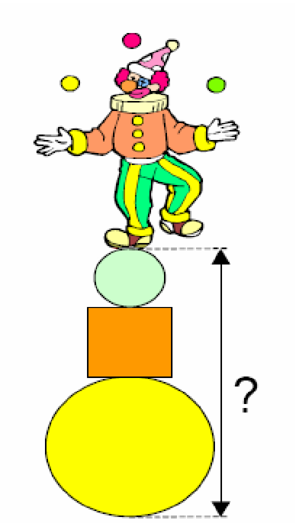
	signo		signo			
2		**2**		**2**	=	**9**
3		**3**		**3**	=	**9**
4		**4**		**4**	=	**9**
5		**5**		**5**	=	**9**
6		**6**		**6**	=	**9**
7		**7**		**7**	=	**9**
8		**8**		**8**	=	**9**
9		**9**		**9**	=	**9**

Normalmente este problema pide buscar los números a partir de los signos operativos. Aquí se procede al revés. El alumno procederá por ensayo y error acercándose sucesivamente, a partir de los resultados previos, a los aciertos. Comenzará buscando los más evidentes, como en el último caso, donde con una suma y una resta resuelve la situación. O como en el segundo caso, donde resuelve con dos multiplicaciones. Pero, ¿habrá alguna que no pueda ser resuelta? ¿Cuál o cuáles?

El **II Torneo de Matemáticas** de Educación Primaria presentó los siguientes problemas.

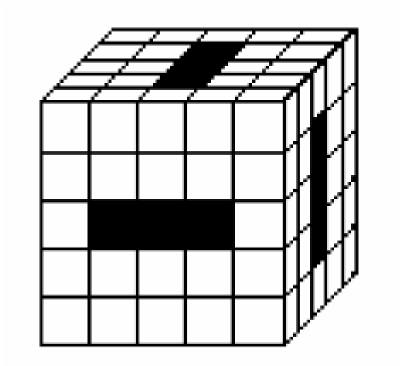
Problema 1. Equilibrio

La figura muestra un payaso en equilibrio encima de dos bolas y una caja cúbica. El radio de la bola inferior es 6 dm, el radio de la superior es tres veces menos. La arista de la caja cúbica es 4 dm más larga que el radio de la bola superior. ¿A qué altura sobre el suelo está el payaso?



Relación entre diámetro y radio, las relaciones "tres veces menos" y "4 dm más larga", más las operaciones aritméticas adecuadas y ya tenemos respuesta.

Problema 2. Los túneles



Se hacen túneles que atraviesan el cubo grande en la forma indicada en la figura. ¿Cuántos cubos pequeños quedan?

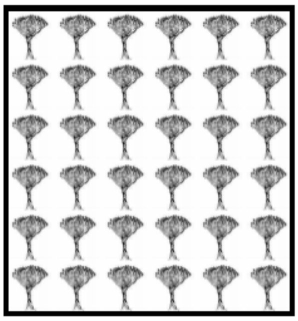
A partir de la cantidad total de cubos de la figura sin túneles, 5x5x5, eliminar todos los cubos de los tres túneles. Pero, ¡cuidado!, cuando se trabaje con el segundo túnel algún cubo pueden haber sido quitado ya; y lo mismo va a suceder cuando se trabaje con el tercero. Es un problema de control del conteo, de atención.

Problema 3. Las hermanas

Alicia y Alba son hermanas. Alicia tiene 4 años más que Alba. Alba tiene más de 4 años y menos de 9. La media de las dos edades es de 9 años. ¿Qué edad tiene cada una?

No olvidemos que estos alumnos, generalmente, no usarán el álgebra. Pero sí deben tener el concepto, aunque sea intuitivo, de media. Mediante tanteos, casi ningún alumno fallará este problema.

Problema 4. El vivero

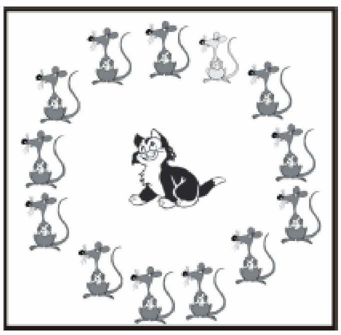


El tío Armiche tiene un vivero de dragos organizado tal y como se ve en el dibujo. Debe quitar doce dragos de forma que queden en el vivero cuatro en cada fila y cuatro en cada columna. ¿Puedes ayudarle?

Un problema que nos suena a Loyd o Dudeney, tan interesantes siempre a pesar del paso del tiempo. ¿Se atreven a buscar una solución?

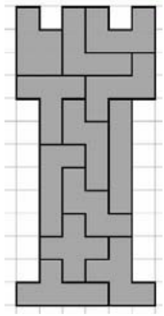
Problema 5. Trece ratones

Los trece ratones que rodean a este gato están condenados a ser devorados por él. Pero el gato ha decidido comérselos en cierto orden. Comenzando por uno de ellos, cuenta trece siguiendo el sentido de las manecillas del reloj. Se come al que hace el trece y sigue la cuenta. ¿Por donde habrá de empezar a contar para comerse el ratón blanco en último lugar?



Tiene el mismo “sonido” que el anterior, y también nos remite a problemas clásicos como el de Josefo. El ensayo y error puede ser muy tedioso y los alumnos se cansarían, no tienen la suficiente paciencia. Pero con una estrategia de “ir hacia atrás”… ¿Se atreven con éste también?

Los problemas propuestos en el **III Torneo de Matemáticas** de Educación Primaria los ofreceremos en un próximo artículo. De todas formas, si desean conocer algo más de este Torneo pueden dirigirse al sitio Web de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, cuya dirección es www.sinewton.org



Esta es la solución de la torre.

Y aquí queda todo por ahora. Pero insistimos, la viveza de esta sección depende de nuestros lectores. No sólo al leernos, sino con sus aportaciones: sus soluciones, sus comentarios o sus propuestas. Hágannos caso, escríbannos.

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**