

Miscelánea, es decir, de todo un poco

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz

-Club Matemático¹-

Resumen Soluciones a los ejercicios propuestos en el anterior NÚMEROS, con especial incidencia en la metodología de su resolución. Comentarios sobre problemas históricos análogos. Nueva propuesta de problemas para resolver.

Palabras clave Resolución de problemas; Metodología; Problemas históricos.

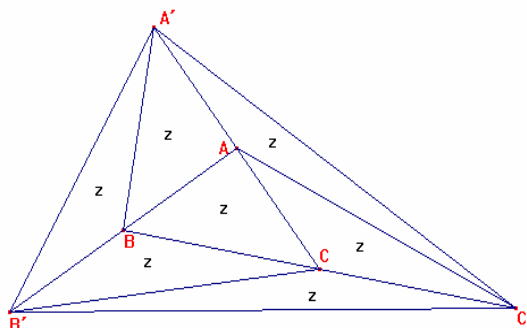
Abstract Solutions to the exercises in the previous issue, with special emphasis on the methodology of its resolution. Comments on similar historical problems. New proposal for solving problems.

Keywords Solving math problems; Methodology. Historical Problems.

Cuando ya estaba editado nuestro anterior artículo nos llegó, a través del correo electrónico, una aportación del Profesor Dones Colmenárez de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Barquisimeto, Venezuela). Hacía referencia al problema *Comparación de Triángulos*, cuya solución y comentarios aportábamos. Nos ofrecía su propia solución y es la siguiente:

“Los triángulos ABC y $BB'C$ tienen la misma área z , pues tienen igual base y altura. Por lo tanto el área del triángulo ABC es la mitad del área del triángulo $AB'C$. De la misma forma el área del triángulo ABC es la mitad del área del triángulo $AC'B$ y del triángulo $CA'B$.

Por otro lado, los triángulos CBB' y $C'CB'$ tienen igual base y altura, por lo que tienen igual área z . De igual forma, los triángulos $AA'C'$ y $BB'A'$ tienen área z . En conclusión el área del triángulo $A'B'C'$ es $7z$, es decir, 7 veces el área del triángulo ABC . Así, el cociente de sus áreas es 7 ”.



¹ El Club Matemático está formado por los profesores José Antonio Rupérez Padrón, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y Manuel García Déniz, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife). mgarciadeniz@gmail.com / jaruperez@gmail.com

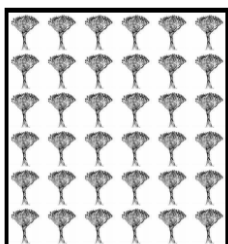


Es importante para nosotros la aparición de estas colaboraciones y, por ello, damos cumplida cuenta de su llegada.

También nos quedaron pendientes de resolver algunos problemas, *El Vivero* y *Trece Ratones*, del Torneo de Primaria, que nos parecieron interesantes para ser trabajados durante un tiempo más.

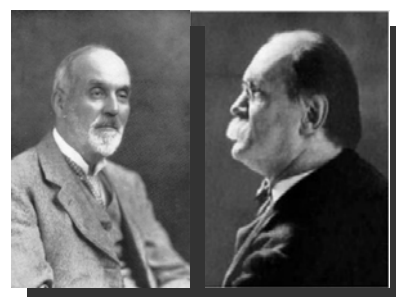
Ahora es el momento de revisarlos.

El Vivero



El tío Armiche tiene un vivero de dragos organizado tal y como se ve en el dibujo. Debe quitar doce dragos de forma que queden en el vivero cuatro en cada fila y cuatro en cada columna. ¿Puedes ayudarlo?

Comentábamos que dicho problema “nos sonaba a Loyd (derecha) o Dudeney (izquierda)”, y preguntábamos: ¿Se atreven a buscar una solución?



Pues comenzamos por buscar algunos referentes históricos de este problema. Hemos encontrado en “Nuevos acertijos de Sam Loyd”, (existen versiones digitalizadas y una página “propia”: <http://www.samloyd.com/>) seleccionados por Martin Gardner (Imagen de la izquierda realizada con fichas de dominó), y publicados por Granica Ediciones, las siguientes:

Apostando Piquetes



Coloque las dieciséis piezas

He aquí un pequeño problema de táctica militar que puede resolverse cómodamente utilizando un tablero común de ajedrez de sesenta y cuatro casillas. El acertijo consiste en poner en el tablero dieciséis piezas, de tal modo que no haya más de dos alineadas en sentido vertical, horizontal o diagonal. Hay otra condición. Las dos primeras piezas deben ponerse sobre dos de las cuatro casillas centrales del tablero.

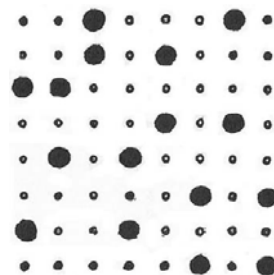
Si las dieciséis piezas son apostadas correctamente, una bala de cañón viniendo de cualquier dirección posible no podría acertarles a más de dos piezas. Es un acertijo muy interesante, en cierto sentido similar al de situar ocho reinas en un tablero de ajedrez logrando que ninguna de ellas pueda ser comida por ninguna de las otras.

Las diferencias con el problema de *El Vivero* son:

- el tablero, que es de 8x8 en lugar de 6x6;
- las piezas a dejar, que son dos en cada fila, en lugar de cuatro;
- se cubren las diagonales y no sólo filas y columnas;
- aparecen privilegiados los cuatro cuadrados centrales del tablero.

El propio Loyd da su respuesta:

El diagrama adjunto muestra cómo se sitúan las dieciséis piezas. El hecho de que dos hombres deban ocupar casillas en el centro deja afuera muchas respuestas que de otro modo hubieran sido tan correctas como la que aquí proponemos.



Un Estudio en Huevos

Las dos gallinas están tratando de imaginar cuántos huevos pueden poner en la caja sin que haya más de dos en ninguna línea, incluyendo todas las líneas diagonales. Ya se han colocado dos huevos, de modo que no se permite ningún otro en esa diagonal larga.

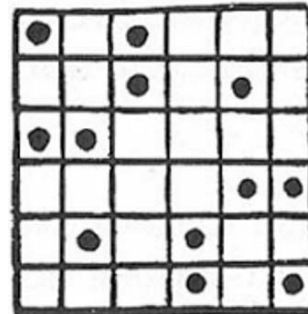
Las concomitancias con el problema de EL VIVERO son, ahora, mayores que las diferencias:



- el tablero es también de 6x6;
- las piezas a dejar, que son dos en cada fila, en lugar de cuatro;
- se cubren las diagonales y no sólo filas y columnas;
- aparecen dos huevos ya colocados, forzando la respuesta.

También aquí, Loyd da su respuesta:

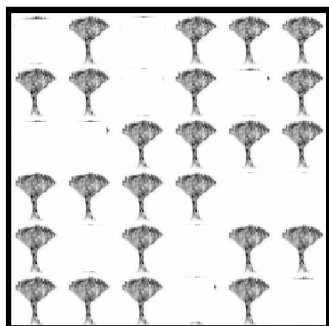
Se pueden poner doce huevos de la siguiente manera:



¿Cuántos huevos entran en la caja?

Lo sorprendente es que, si nos fijamos bien, la respuesta que da Loyd para este último problema es “complementaria” del que queríamos resolver, *El Vivero*. Si dejamos un dragón en cada casilla vacía de esta solución y eliminamos los dragones de las casillas señaladas con un punto, tendremos respuesta para nuestro problema.

Por supuesto, si adaptamos al tablero de 6x6 la solución de Loyd para el problema de *Apostando Piquetes* (quitando dos filas y dos columnas y añadiendo los puntos que faltan), tendremos de nuevo una solución para el problema de *El Vivero*.



Está claro que los alumnos de Primaria deberán enfrentar un problema como éste a través de **ensayo y error**, ayudándose tal vez (si lo desea o puede) de una **modelización**. Si es ordenado y sistemático probablemente encuentre una solución con cierta rapidez.

Nuestros alumnos, incluso los más pequeños, son capaces de sorprendernos continuamente, resolviendo con facilidad cosas que a nosotros nos parecen difíciles.



Vamos ahora con el segundo de los problemas:

Trece Ratones

Los trece ratones que rodean a este gato están condenados a ser devorados por él. Pero el gato ha decidido comérselos en cierto orden. Comenzando por uno de ellos, cuenta trece siguiendo el sentido de las manecillas del reloj. Se come al que hace el trece y sigue la cuenta. ¿Por donde habrá de empezar a contar para comerse el ratón blanco en último lugar?



También hacíamos algún comentario sobre su “sonido Loyd o Dudeney” similar al anterior. También apuntábamos al *Problema de Josefo*, al ensayo y error (algo tedioso, tal vez), a ir hacia atrás, y volvíamos a preguntar: ¿Se atreven con éste también?

Pues si buscamos referentes históricos para este problema, encontramos en “Amusements in Mathematics” de Henry Dudeney, el siguiente, que damos en su forma original:

CATCHING THE MICE



"Play fair!" said the mice. "You know the rules of the game."

"Yes, I know the rules," said the cat. "I've got to go round and round the circle, in the direction that you are looking, and eat every thirteenth mouse, but I must keep the white mouse for a tit-bit at the finish. Thirteen is an unlucky number, but I will do my best to oblige you."

"Hurry up, then!" shouted the mice.

"Give a fellow time to think," said the cat. "I don't know which of you to start at. I must figure it out."

While the cat was working out the puzzle he fell asleep, and, the spell being thus broken, the mice returned home in safety. At which mouse should the cat have started the count in order that the white mouse should be the last eaten?

When the reader has solved that little puzzle, here is a second one for him. What is the smallest number that the cat can count round and round the circle, if he must start at the white mouse (calling that "one" in the count) and still eat the white mouse last of all?

And as a third puzzle try to discover what is the smallest number that the cat can count round and round if she must start at the white mouse (calling that "one") and make the white mouse the third eaten.

Como podemos apreciar, en éste problema hay en realidad tres problemas encadenados, de los cuales el primero es el que se corresponde con nuestros *Trece Ratones*. El segundo hace referencia a comerse el ratón blanco empezando a contar en él mismo, tratándose de encontrar el número de cuenta que hay que hacer, de seis en seis, de nueve en nueve,... ya que no podrá ser de trece en trece, tal y como se exige en el primero. Y, finalmente, el tercero pide encontrar el número de cuenta más pequeño para empezar a contar en el ratón blanco y que éste sea comido en tercer lugar.

Para resolver el caso que nos ocupa bastará con hacer ensayo y error repetidamente hasta encontrar la solución correcta. Aunque pueda parecer que esto va a ser largo, no ocurre así; basta con hacer una prueba con cualquier ratón (ojo, no parar aunque el ratón blanco sea comido pronto; debe llegarse hasta el final) y, cuando ya se sepa cuál es el último ratón comido, observar lo lejos que está del ratón blanco. A partir de esa posición ajustar el punto de partida de la cuenta. Con dos o, a lo sumo, tres pruebas se consigue encontrar que el primer ratón en comenzar la cuenta debe ser el **séptimo**, en sentido horario a partir del ratón blanco (que es el 1).

Otra manera de plantear la búsqueda de la solución es utilizando una **modelización**. Tomaríamos trece tarjetas en blanco que ordenaríamos alfabéticamente a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m (trece letras consecutivas). Las contaríamos cíclicamente eliminando la que hace 13. Cada paso de la baraja reduce en una el total. Cuando sólo queda una, su letra se corresponde con el lugar donde emplazar el ratón blanco (el 13) y, colocando de nuevo las tarjetas en orden alfabético, la letra a indica el número de orden del ratón a partir del cuál se ha de empezar a contar (el 7 a partir del ratón blanco, en sentido horario). Observen de nuevo la ilustración de Dudeney. ¿Qué lugar ocupa el ratón negro por el que se debe empezar a contar? Efectivamente, el que está señalando el rabo del gato. Era muy propio de Dudeney este tipo de ocurrencias o bromas.

Tanto Dudeney como Loyd fueron unos grandes creadores de acertijos, pero gran parte de su producción consistió en “recrear” grandes problemas históricos. Este problema del gato y los ratones no es más que una recreación del problema de Josefo:

“Durante la rebelión judía contra Roma en el siglo I d.C., 40 judíos se encontraron acorralados en una cueva. Para evitar ser atrapados y convertirse en esclavos, prefirieron la muerte y decidieron formar un círculo, matándose entre ellos: el primero mataba al segundo y pasaba el arma al tercero, quien mataba al siguiente, y así sucesivamente, hasta que quedara uno solo, quien se suicidaría. Josefo rápidamente calculó el lugar que ocuparía el último superviviente, ocupó dicho lugar y escapó a la muerte.”

Resolver este problema es algo muy parecido a lo que hemos planteado anteriormente. Lo curioso es la aplicación a la Magia con cartas que hace de este problema el profesor de la Universidad del País Vasco, Pedro Alegría. Su sección “El Rincón Matemático” en DivulgaMAT es una auténtica delicia:

<http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/MateMagia/matemagia.asp>

Pero si queremos verlo en forma de juego (en Java) podemos hacerlo en la siguiente dirección, que a su vez contiene enlaces a variantes del problema.

<http://www.cut-the-knot.org/recurrence/flavius.shtml>

Y ahora es el momento de presentar nuevos problemas para propiciar la investigación de nuestros lectores, no sólo a la búsqueda de las soluciones, sino sobre todo a los comentarios que puedan hacerlos viables para ser trabajados en el aula con nuestros alumnos.



Del 16º Rally Matemático Transalpino, ya saben que nos gustan mucho, prueba Final, mayo 2008, hemos sacado estos dos, muy sencillos pero muy interesantes:

El Mercado de Libros

Susy y Lilly, que han recibido como regalo de sus abuelos 16,20 euros cada uno, los ponen juntos y deciden ir al mercado de los libros y DVDs. Ese día las ofertas especiales son las siguientes:

- Un DVD al precio de 3,60 euros. Comprando tres, pueden comprar otro a mitad de precio.

- Un libro por el precio de 2,50 euros. Dos libros por el precio de 4 euros.

Antes de regresar a casa Susy y Lilly también deben ir a pagar el juego que tomaron la semana anterior y que cuesta 6,10 euros. Susy y Lilly gastan todo el dinero recibido de los abuelos.

¿Qué han comprado Susy y Lilly en el mercado? Explica cómo encontraste la respuesta.

Números para encontrar

Julio examina el número 1313 y observa que:

- si suma sus cuatro cifras obtiene 8 ($1 + 3 + 1 + 3 = 8$),

- si multiplica sus cuatro cifras obtiene un número impar ($1 \times 3 \times 1 \times 3 = 9$).

Julio se pregunta cuantos otros números de cuatro cifras tienen 8 como suma de sus cifras y un número impar como producto de esas mismas cifras.

Ayudad a Julio a encontrar la respuesta.

De la Revista portuguesa Educação e Matemática, de la que hacía tiempo que no tomábamos problemas, en su Nº 84, del 2005, en la Sección “O problema deste número”, sacamos este otro:

¡Ay, tantos exámenes para corregir!

Pedrosa tenía una enorme pila de exámenes para corregir. El lunes, lleno de energía, despachó la mitad de los exámenes. El martes, ya sólo vio un tercio de los que quedaron. El miércoles, corrigió sólo una cuarta parte de los que faltaban. El jueves, ya saturado, vio un quinto de los que tenía pendientes de corregir. El viernes, comprobando que le faltaban menos de dos docenas, decidió poner fin a la tortura y corrigió todo.

¿Cuántos exámenes tenía Pedrosa?

Problemas de sucesiones en la página

http://personales.upv.es/jlgonz/sucesiones/problemas_de_sucesiones.htm

y la sucesión relacionada con el problema de Pedrosa podría ser

http://personales.upv.es/jlgonz/sucesiones/problema_de_sucesiones_9.htm

Por último, dos problemas de abuelos. Basados en los publicados recientemente por Marie Berrondo-Agrell, profesora de Matemáticas en la Universidad Leonard de Vinci de París, en ediciones CEAC, donde encontraremos otros noventa y ocho problemas agrupados por niveles de dificultad, que proponer a nuestros alumnos.

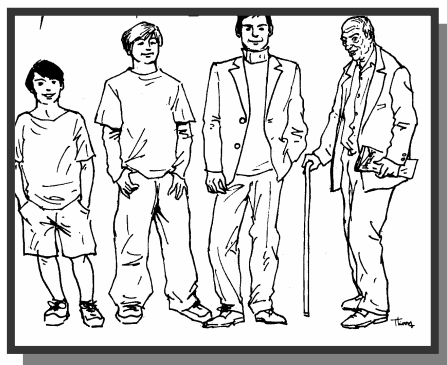
Un abuelo longevo

Acabo de cumplir 91 años, dice el abuelo, y esta edad es la diferencia entre el cuadrado del número de nietos que tengo y el cuadrado de las nietas que tengo. ¿Cuántos nietos tengo en total? ¿Cuántas son mujeres?

El abuelo, ¿chochea?

Le dice el abuelo a su nieto mayor, que ya estudia bachillerato,

- A ver cómo andas de matemáticas: Si alguien dice que invirtiendo el orden de las cifras de su edad, la cantidad disminuye a la mitad, ¿se trata de un niño, un adolescente, un adulto, un viejo como yo, o simplemente es un mentiroso?



Y aquí queda todo por ahora. Pero insistimos, la viveza de esta sección depende de nuestros lectores. No sólo al leerlos, sino con sus aportaciones: sus soluciones, sus comentarios o sus propuestas. Anímense.

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista



Un saludo afectuoso del **Club Matemático**.

A Martin Gardner, agradecidos.

