

Transformaciones en el plano utilizando software de geometría dinámica

Gabriel Sosa Felipe (Instituto de Enseñanza Secundaria Canarias Cabrera Pinto)

Fecha de recepción: 15 de septiembre de 2010

Artículo solicitado al autor por la revista

Resumen

Se presenta una experiencia sobre el estudio de las isometrías en el plano en la educación secundaria, utilizando software de geometría dinámica. Se construye y estudia las propiedades de los distintos movimientos (traslaciones, giros y simetrías). La actividad se desarrolla en la clase de informática con apoyo de programas como GeoGebra y applets de CabriWeb. Se tratan elementos invariantes, composición de movimientos y motivos que teselan el plano.

Palabras clave

Transformaciones, isometrías, traslaciones, giros, simetrías, elementos invariantes, composición de movimientos, GeoGebra

Abstract

An experience on the study of plane isometries in Secondary Education using dynamic geometry software. Students study the characteristics of the different movements (translations, rotations and simetries) and build their own models. The activity will be developed in computer class by using software programmes such as GeoGebra and applets from CabriWeb. Students work with invariant elements, movement composition and plane tessellation factors.

Keywords

Transformations, isometries, translations, rotations, simetries, invariant elements, movement composition, GeoGebra

1. Introducción

La enseñanza de la Geometría, y en particular el estudio de las Isometrías, suele quedar muchas veces relegada a un segundo plano. Los temas de Geometría son, normalmente, aquellos en los que no se profundiza cuando no hay tiempo para desarrollar todo el temario.

El tema de las Transformaciones en el Plano es especialmente motivador, ya que abarca aspectos matemáticos que caracterizan a la geometría, tales como representación, situación, clasificación y dimensión, por otra parte, los conceptos matemáticos de este tema los podemos contextualizar en el entorno cotidiano y permiten cultivar el gusto por la belleza de las formas geométricas.



Este artículo presenta una experiencia de aula que muestra el estudio de las isometrías en el plano en la educación secundaria, utilizando software de geometría dinámica (applets de CabriWeb¹ y GeoGebra²). Las razones para usar este software fueron las siguientes:

- a. Esta unidad suele presentar ciertas dificultades en la enseñanza cuando se realiza sólo en pizarra, o con papel y lápiz. Las TIC se presentan *a priori* como una herramienta potente para la enseñanza y aprendizaje de las isometrías, ya que los softwares de geometría dinámica permiten visualizar los movimientos.
- b. Nos planteamos cambiar el método de impartir docencia utilizando el ordenador como elemento motivador, que cambia no sólo el aspecto y la dinámica del aula, sino el tipo de actividades que podemos plantear.
- c. El uso de presentaciones dinámicas (applets y GeoGebra) puede mejorar los métodos de exposición por parte del profesor.
- d. El alumno puede interactuar con objetos matemáticos (puntos, ángulos, segmentos, rectas, figuras) de forma simple y natural favoreciendo su autonomía en el aprendizaje.
- e. Se facilita la construcción de las isometrías y los lugares geométricos, comprobando propiedades, tratando elementos invariantes y composición de movimientos.

2. Objetivos

En esta experiencia se diseñó y se puso en práctica una unidad didáctica sobre las transformaciones en el plano en la que se pretendía que los alumnos consiguieran los siguientes objetivos:

- i. Descubrir en la naturaleza y en las artes transformaciones geométricas y cultivar el gusto por la belleza de las formas geométricas.
- ii. Construir lugares geométricos (circunferencia, bisectriz de un ángulo y mediatriz de un segmento).
- iii. Identificar propiedades comunes entre una figura y la que se obtiene mediante una transformación geométrica.
- iv. Conocer, clasificar, utilizar los distintos movimientos en el plano (traslaciones, simetrías centrales, simetrías axiales y giros).
- v. Reconocer los distintos movimientos en el plano.
- vi. Determinar las distintas características de cada movimiento.
- vii. Identificar los elementos invariantes de cada movimiento.
- viii. Realizar la composición de movimientos.
- ix. Utilizar un navegador de Internet para aprender a través de páginas web (con applets) los movimientos en el plano.
- x. Utilizar de forma básica un programa informático para hacer geometría (GeoGebra), para construir figuras donde se utilicen las isometrías y lugares geométricos.

¹ Para más conocimiento sobre CabriWeb puedes visitar la página del departamento de matemática del IES Marqués de Santillana: <http://www.iesmarquesdesantillana.org/departamentos/tallerma/cabri.htm>

² Página del software GeoGebra: <http://www.geogebra.org/cms/>

3. Contenidos

El contenido matemático de la experiencia desarrollada en el aula se dividió en las siguientes unidades:

Unidad I: *Elementos básicos y lugares geométricos*

Punto, recta, segmento, ángulo y arco.

Lugares geométricos: Circunferencia; Mediatriz de un segmento; Bisectriz de un ángulo.

Unidad II: *Introducción a los vectores*

Vector fijo. Características de un vector fijo. Vectores libres. Suma de vectores.

Unidad III: *Traslaciones*

Traslación (vector de traslación). Elementos invariantes. Composición de traslaciones.

Unidad IV: *Giros*

Giros (centro y ángulo de giro). Elementos invariantes. Composición de giros (del mismo centro y de distinto centro).

Unidad V: *Simetría Central*

Simetría Central (centro). Elementos invariantes. Composición de simetrías centrales (del mismo centro y de distinto centro).

Unidad VI: *Simetría Axial*

Simetría Axial (eje de simetría). Elementos invariantes. Composición de simetrías axiales (de ejes paralelos, de ejes secantes).

Se trabajaron procedimientos de identificación, reconocimiento, obtención y construcción, así como la manipulación de applets y uso del software de geometría dinámica (GeoGebra). Además se fomentó las actitudes de curiosidad, interés, sensibilidad y confianza.

Los **contenidos** que se presentan son los que aparecen en el currículo de matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias (Decreto 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias):

En su introducción del Área se indica que “*El uso de programas informáticos específicos de geometría supone un apoyo para afianzar y comprender distintos conceptos, transformaciones y construcciones geométricas, comprobaciones de propiedades, etc.*”

En los contenidos del curso de tercero, en el bloque IV de Geometría se indica: “*Movimientos en el plano: traslaciones, simetrías y giros. Elementos invariantes de cada movimiento. Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas*”.



Además, se trabaja en esta unidad otros contenidos de geometría, dentro del mismo bloque: “Elementos básicos para la descripción de las figuras geométricas en el plano: punto, recta, segmento, ángulo y arco”. “Determinación de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugares geométricos: mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo y circunferencia”.

4. Metodología

La experiencia se llevó a cabo en el Instituto de Secundaria *Canarias Cabrera Pinto*, localizado en el centro de La Laguna (S/C de Tenerife), en el que trabajan unos 80 profesores y profesoras y que cuenta con alrededor de 32 grupos de alumnos. El centro tiene 4 aulas de informática, con 16 ordenadores cada una (las máquinas son Pentium IV con el sistema operativo Windows XP), y en todas ellas hay proyector LCD. Las clases se realizaron en alguna de las aulas de informática del Centro (trabajamos en tres aulas diferentes según la disponibilidad). Para los alumnos no supuso ningún problema trabajar en las aulas de informática, ya que conocen el funcionamiento de las mismas porque en ella desarrollan otras materias, como Tecnología.

La unidad se realizó con alumnos del tercer curso de la secundaria obligatoria (15 años), procedentes de clase social media (25 de los 27 alumnos tenían ordenador e Internet en su casa).

Los alumnos trabajaron en equipo, en parejas por cada PC y se les dio libertad para elegir a su compañero de equipo. En la clase había 27 alumnos, por lo que se formó un grupo con el profesor (coincidió con el alumno más tímido del grupo y que se quedó aislado).

Normalmente se desarrolló la clase con las siguientes pautas de actuación:

- Se solicita que analicen y estudien el concepto matemático a tratar (lugar geométrico, movimiento, elementos invariantes, composición de movimientos) utilizando el material web que se les aporta.
- Se realiza una explicación por parte del profesor utilizando GeoGebra en las construcciones.
- Se pide a los alumnos que realicen ellos mismos las construcciones y que las guarden en un fichero para su evaluación (deben realizar cada construcción, los dos alumnos del equipo).

Intentamos fomentar la autonomía en el aprendizaje del alumno, propiciando el gusto por la geometría, teniendo siempre el apoyo del profesor y de otros alumnos.

4.1 Recursos didácticos

El **material** didáctico utilizado fue el siguiente:

- Unidad didáctica en formato Web, donde el alumno puede interactuar con applets (creados con CabriWeb) para la comprensión y aprendizaje de los contenidos. Por defecto en todas las máquinas hay instalados, dos navegadores de Internet, pudiendo usar cualquiera de ellos.
- Unidad didáctica en Word, mismo contenido que la web, pero en un formato para que el alumno pueda desarrollar luego determinadas actividades con regla, compás, escuadra y cartabón.
- Software de geometría dinámica (GeoGebra). Utilizamos GeoGebra al ser software gratuito y de libre uso, fácil de adquirir e instalar

- Ficha de trabajo que servirá para la evaluación del alumnado (se muestra en el apartado de evaluación)
- Se dispuso de algunas copias impresas de las actividades a disposición de aquellos alumnos con problemas de uso de medios tecnológicos fuera del centro.
- Los alumnos tenían su libreta de clase, para la toma de apuntes (que utilizan para cumplimentar el trabajo de evaluación). Algunos alumnos tomaban las notas directamente en el ordenador utilizando un procesador de textos (lo guardaban normalmente en un PenDrive -memoria USB-, o bien se lo enviaban por e-mail)

4.2 Preparación del aula de informática

Se solicita al coordinador de informática del Centro la instalación del programa GeoGebra (esto se realiza automáticamente utilizando la consola de servicios del Proyecto Medusa³).

Copiamos en la zona genérica (unidad del servidor del centro, accesible para los alumnos) el material utilizado. Se copian los materiales al escritorio de los PCs de los alumnos para trabajar desde el disco duro de cada ordenador. Se fomenta que los alumnos copien dichos materiales (de forma digital, en unidades externas), para que puedan repasar los contenidos en otras máquinas.

Se comprueba que funcionen los applets en la unidad didáctica, en aquellos que no funciona se instala el plugin de Java⁴ correspondiente (dicha instalación la realiza el coordinador medusa del Centro, que es el que tiene perfil de instalador superior, lo que le posibilita instalar programas)

Antes de cada sesión de clase, dejan las máquinas preparadas para su uso y evitar problemas de última hora.

Los recursos que usamos del aula de informática son:

16 ordenadores Pentium IV con 1Gb de RAM. Con sistema operativo Windows XP.

Proyector LCD.

Todos los ordenadores están conectados en red, dominados por el servidor del Centro con conexión a Internet.

³ El Proyecto Medusa es un Proyecto de Integración de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) en los entornos escolares, realizado por la Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias:

<http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/4/Medusa/GCMWEB/Code/Default.aspx>

⁴ Software necesario para que funcionen los applets creados con CabriWeb. Se puede obtener en la dirección <http://www.java.com/es/download/>



5. Temporalización y desarrollo de las sesiones de clase

Se utilizaron 12 sesiones en trabajar la unidad. Cada sesión consta de 55 minutos. El peso curricular de la materia es de 4 sesiones semanales, desarrollándose la unidad en tres semanas

1ª Sesión: *Introducción y elementos básicos*

Los alumnos van de su aula normal de clase a una de las aulas de informática. Se expone el material que se utilizará y el lugar donde se encuentra (escritorio de su ordenador y en la zona compartida del servidor del Centro). Además se le pone a su disposición unas copias impresas de las actividades. A cada alumno se le da, la ficha de evaluación, y se les explica cómo se les evaluará esta parte de la Geometría.

Se empieza a trabajar con GeoGebra dibujando puntos, rectas, segmentos y ángulos (con distinta orientación), se dan las definiciones de dichos elementos.

2ª Sesión: *Lugares geométricos (definición, circunferencia y mediatriz)*

Se define lugares geométricos. Se dibuja una circunferencia en GeoGebra y un punto sobre la misma, observando que la distancia del punto al centro siempre es la misma, calculando esta distancia y moviendo el punto sobre la circunferencia se ve la equidistancia. Los alumnos lo realizan en sus ordenadores.

Se realiza la construcción de la mediatriz de un segmento con GeoGebra (de la misma forma que se haría con instrumentos de dibujo). Se sitúa un punto sobre la mediatriz y se miden las distancias de dicho punto a los extremos del segmento, observando que equidista. Se mueve el punto sobre la mediatriz y se comprueba la equidistancia de los puntos a los extremos del segmento.

Se pide a los alumnos que realicen la construcción, les puede servir de guía el applet con dicha construcción que se encuentra en el material web (en estos momentos tienen en sus pantallas dos ventanas una con el applet y otra con GeoGebra). La actividad la realizan los dos componentes del equipo (esto será siempre de la misma forma) y al final la guardan en un soporte externo.

3ª Sesión: *Bisectriz e Introducción a las transformaciones en el plano*

Se procede con la Bisectriz de la misma forma que con la mediatriz.

El profesor realiza una introducción a las transformaciones en el plano, y solicita de los alumnos que se lean la actividad de introducción en formato web (ver punto 6 *Ejemplo de actividad*) y que realicen un esquema de las transformaciones geométricas en el plano dando ejemplos de su entorno.

4ª Sesión: *Vectores. Traslaciones*

Se define vector fijo, características de un vector, vectores equipolentes, vector libre y se ve el procedimiento para realizar la suma de vectores, estas explicaciones con el soporte de GeoGebra.

Se les pide que refuercen la explicación estudiando la actividad de vectores en formato web.

Utilizando GeoGebra se explica el concepto de traslación de un punto y de una figura (se toma un polígono de ejemplo). Los alumnos realizan la construcción de una traslación de un punto y de una figura según un vector. Variando el vector ven como varía la figura homóloga

5ª Sesión: *Elementos invariantes y composición de traslaciones*

Se definen elementos invariantes de un movimiento.

Se construye con GeoGebra la traslación de una recta, observando que al variar el vector de traslación y hacerlo paralelo a la recta, la recta homóloga se convertía en la propia recta (se solicita a los alumnos que realicen esta actividad en el ordenador).

Se hace la traslación de un punto y se observa que cuando el vector se le hace tender a un punto (módulo cada vez menor), el punto y su homólogo tienden a ser el mismo.

Se realiza con GeoGebra la composición de de dos traslaciones y se comprueba que el resultado coincide con la traslación de la suma de los vectores de cada una de las traslaciones a componer (como siempre se solicita a los alumnos que realicen esta construcción con GeoGebra).

6ª Sesión: *Giros*

Se define (utilizando GeoGebra) el giro de centro un punto y amplitud un ángulo (de un punto y de una figura). Se pide al alumnado que realice estas construcciones (ver ejemplos de construcciones con GeoGebra más adelante).

Se explica con GeoGebra cómo obtener el centro y el ángulo de giro al darnos una figura y su homóloga (primero se realiza el giro, se oculta el centro y el ángulo, luego se calculan las mediatrices de dos segmentos formados por un punto de la figura y su homólogo, el punto de corte de las mediatrices es el centro del giro ¿por qué?; el ángulo de giro será $\angle AOA'$ donde A es un punto de la figura, A' su homólogo y O el centro de giro). Se pide a los alumnos que realicen dicha construcción.

7ª Sesión: *Elementos invariantes y composición de giros del mismo centro*

Se recuerda la definición de elementos invariantes y se define punto doble.

Se les pide a los alumnos que respondan a las preguntas: ¿Qué punto es doble en cualquier giro? ¿Qué amplitud debe tener un giro para dejar invariante a cualquier figura? ¿Qué giros dejan invariantes a una circunferencia?

Con GeoGebra se realiza la composición de dos giros del mismo centro y se observa que es un giro de mismo centro y de amplitud la suma de las amplitudes. Se les pide a los alumnos que realicen dicha construcción en sus máquinas.

Por falta de tiempo no se realiza la composición de giros de distintos centros, se indica que los alumnos que tengan interés lo pueden ver en la unidad didáctica en web, donde existe un applet con la explicación.



8ª Sesión: Simetría central y elementos invariantes. Composición de simetrías centrales del mismo centro

Se define la simetría central de un punto y de una figura, usando construcciones con GeoGebra y se le pide a los alumnos que las realicen.

Se define figura simétrica respecto a un punto y se les pide que contesten a las preguntas: ¿Qué punto es doble en cualquier simetría central? ¿Dónde debe estar el centro de simetría para que una circunferencia sea figura invariante? ¿Y para una recta?

Se realiza (con GeoGebra) la composición de dos simetrías centrales del mismo centro observando que es una identidad (la figura se transforma en sí misma). Se les pide a los alumnos que realicen la construcción.

9ª Sesión: Composición de simetrías centrales de distinto centro. Definición de simetría axial

Se realiza la composición (de una figura) de dos simetrías centrales de distinto centro con GeoGebra. Se toma un punto P sobre la figura inicial, se realiza la composición de dicho punto (obteniendo los puntos P' y P''). Se forman los vectores PP' y P'P'', el vector suma será PP''. Moviendo el punto inicial sobre la figura se observa que el vector suma siempre es el mismo. Se traslada la figura inicial según este vector suma y se observa que coincide con la figura homóloga por la composición, comprobando que la composición de simetrías centrales de distinto centro es una traslación. Se les pide a los alumnos que realicen la construcción.

Se define mediante una construcción con GeoGebra la simetría axial de eje e de un punto y de una figura y se solicita a los alumnos que realicen la construcción.

Se explica por qué la simetría axial es un movimiento impropio. En la figura inicial se define un ángulo con GeoGebra y se observa que el ángulo formado por los puntos homólogos del primero tiene distinta orientación (en GeoGebra si el primer ángulo es 40° el segundo será 320°).

10ª Sesión: Elementos invariantes y composición de simetrías axiales

Se pide a los alumnos que contesten a las siguientes preguntas: ¿Qué puntos son dobles en cualquier simetría axial? ¿Las rectas perpendiculares al eje son invariantes? ¿Por qué? ¿Toda circunferencia cuyo centro este en el eje de simetría se transforma en sí misma?

Se realizan construcciones con GeoGebra para contestar a las preguntas:

- Se realiza la simetría respecto a un eje de un punto, al ir moviendo el punto y situarlo sobre el eje se observa que es doble.
- Se realiza la simetría de una recta respecto a un eje, se va variando la pendiente y se observa que al ser perpendicular al eje se transforma en sí misma.
- Se realiza la simetría de una circunferencia respecto a un eje, al llevar el centro de la circunferencia al eje se observa que la circunferencia se transforma en sí misma.

Se les pide a los alumnos que realicen dichas construcciones.

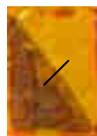
Se define eje de simetría de una figura.

Utilizando GeoGebra se realiza la composición de dos simetrías de ejes paralelos comprobando que se trata de una traslación de vector perpendicular a los ejes y de módulo el doble de la distancia entre ellos.

11ª Sesión: *Composición de simetrías axiales. Trabajo de evaluación*

Utilizando GeoGebra se realiza la composición de dos simetrías axiales de ejes no paralelos y se comprueba que es un giro de amplitud el doble del ángulo formado por los ejes y de centro el corte entre los ejes.

Se solicita a los alumnos que realicen dicha construcción.



En todas las sesiones se hizo referencia al trabajo de evaluación, para que la fueran cumplimentando a lo largo del desarrollo del tema. Parte de la hora de clase se destina a completar dicho trabajo.



12ª Sesión: *Trabajo de evaluación (verla en el epígrafe de evaluación)*

Los alumnos elaboran el trabajo de evaluación resolviendo dudas con el profesor y sus compañeros de clase.

Se trabajo sobre la actividad 8 (motivos que teselan el plano) para reconocer el motivo mínimo que tesela un mosaico y los movimientos utilizados en su construcción.

6. Ejemplo de actividad

En este apartado vamos a mostrar un ejemplo de actividades correspondiente a la Sesión “Introducción a las transformaciones en el plano”.

Las transformaciones geométricas han sido una constante en la práctica totalidad de nuestras culturas desde los tiempos remotos hasta la actualidad

Si observas la pintadera⁵ de la derecha, a partir de uno de los triángulos rectángulos puedes construir toda la figura, **trasladándolo** verticalmente y horizontalmente

Además, si giramos 180° el triángulo inicial con respecto al centro de la hipotenusa obtenemos el otro triángulo (este tipo de transformación se llama **simetría central** – respecto al punto medio de la hipotenusa).

Observemos ahora el banco que se encuentra situado en la Plaza de Los Patos en S/C de Tenerife. Se ven motivos que trasladándose van construyendo toda la figura; por otro lado, si observas el suelo son losetas cuadradas trasladándose.

⁵ Símbolo de la cultura aborigen canaria





Si nos acercamos a uno de los motivos de la cerámica que tapiza el banco, vemos que una loseta se obtiene de otra, realizando un **giro** de 90° respecto del centro de un cuadrado formado por cuatro losetas.

Este tipo de transformaciones es muy común en elementos de nuestro entorno:



a) En la Naturaleza



La hoja de palmera presenta una simetría respecto a un eje (simetría axial)



Cada pétalo de la flor se podría obtener girando otro 72° ($360:5$)

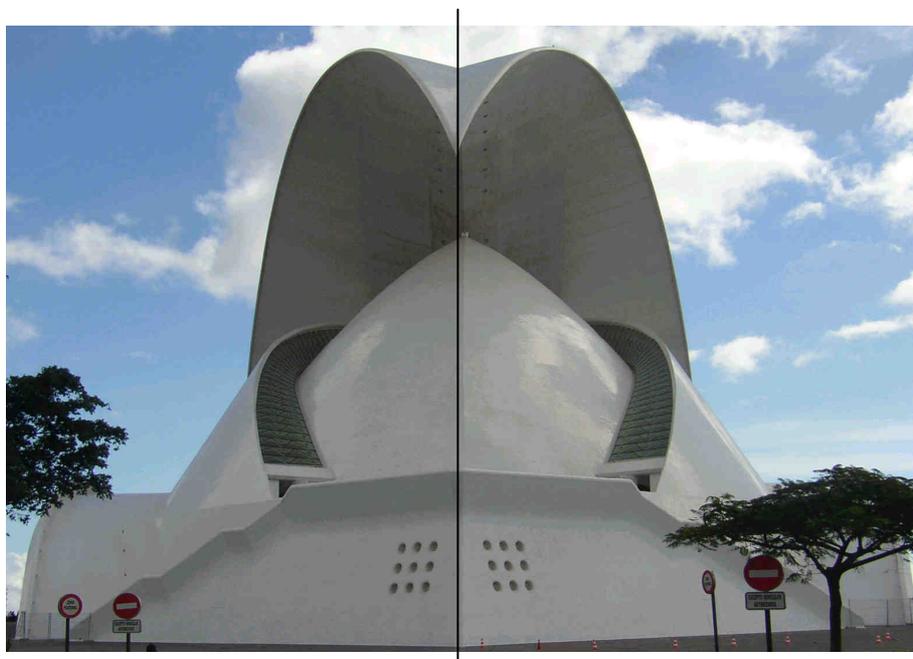
b) En la arquitectura



Friso

Observa la fachada del edificio del Círculo la Amistad XII de Enero (en S/C de Tenerife), que presenta simetría axial respecto a un eje que iría desde la base del edificio hasta la cabeza del ángel en la parte más alta. Observa asimismo, cómo se forma el friso⁶ por traslación de un motivo que también presenta simetría axial. Además parte de la fachada es un ángel que se traslada.

El auditorio de S/C de Tenerife de igual modo presenta una simetría axial, parece como si la zona de la derecha de la imagen se superpusiera sobre la zona de la izquierda, si doblamos la figura sobre la recta. La recta dada es el eje de simetría.



⁶ Elemento decorativo en forma de faja muy alargada y seguida

c) En la Escultura

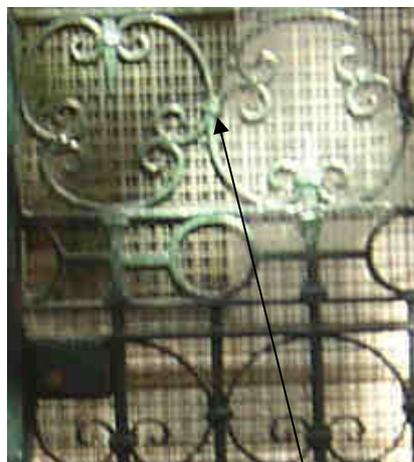


Escultura que se encuentra frente al edificio de la oficina principal de CajaCanarias en S/C de Tenerife. Cada tira de peces se puede obtener trasladando uno de ellos verticalmente

Escultura que encontramos en la plaza del auditorio de S/C de Tenerife presenta simetría axial respecto de un eje vertical

d) En las rejas, logotipos, llantas, etc.

En la siguiente puerta de una casa en la Rambla de General Franco de S/C de Tenerife se observan varias transformaciones que conservan las formas y el tamaño. Mirando la puerta globalmente las hojas de la puerta presentan simetría axial (¿cuál es el eje?). Si observamos el detalle de la derecha, se observa que uno de los motivos presenta un giro de 180° respecto al punto donde se tocan (simetría central), y otros motivos se trasladan.



Centro de simetría.



Si observamos el logotipo de la Mercedes, cada aspa presenta simetría... Además, girando un aspa... grados respecto al centro del círculo obtendríamos otra...



¿Qué transformaciones geométricas se pueden observar en la llanta de la figura?

En todas las transformaciones geométricas vistas hasta ahora, traslaciones Giros, Simetría Central (giro de 180°), Simetría axial:

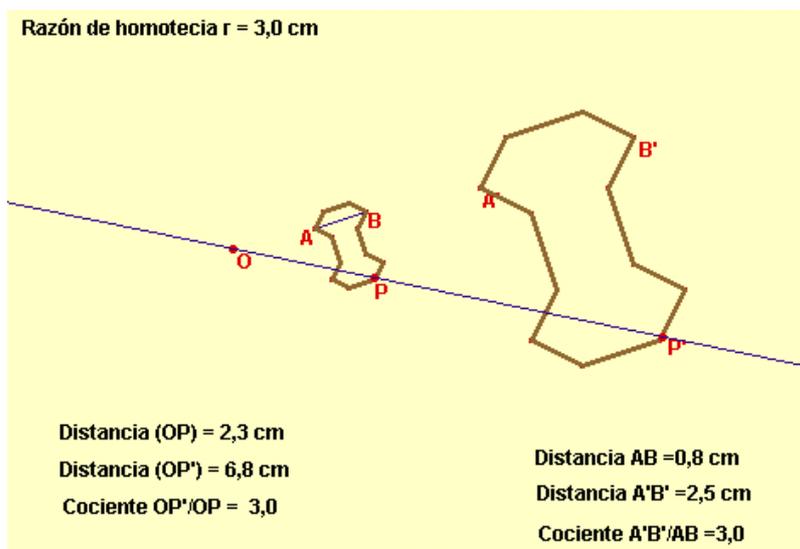
¿Se conserva **la forma** (ángulos)? ¿Se conserva **el tamaño** (distancias)?

Traslaciones	
Giros	
Simetría Central (giro de 180°)	
Simetría axial	

Este tipo de transformaciones geométricas se llaman **MOVIMIENTOS o ISOMETRÍAS** y será el objeto fundamental de nuestro estudio.



Hay otro tipo de transformaciones geométricas que *conservan la forma pero no el tamaño*, piensa en la proyección de una figura a través de un retroproyector, o de un cañón que proyecta una imagen de ordenador, o de la proyección de una diapositiva. Este tipo de transformaciones, que ya conoces del curso anterior, se llaman *semejanzas u homotecias*. Observa las dos figuras de la imagen que son semejantes u homotéticas:



Podemos considerar otro tipo de transformaciones que no conservan ni la forma ni el tamaño:

a. *Sombras proyectadas por el Sol.* Se observa en la reja de la foto que no se conservan los tamaños y tampoco las formas (un cuadrado no se tiene que transformar en un cuadrado). Lo que sí ocurre es que rectas se transforman en rectas y rectas paralelas en rectas paralelas. Además, dos segmentos en la misma recta iguales entre sí en el original se transforman en dos segmentos de longitud distinta a los originales pero también iguales entre sí. Este tipo de transformaciones se denominan **afines**:



b. *Sombras proyectadas por focos.* Como se observa en la foto, no se conserva la forma ni el tamaño. Lo que sí sucede es que una recta se transforma en un recta, pero rectas paralelas no tienen por que transformarse en rectas paralelas. A este tipo de transformaciones se denominan **proyectivas**.



Ejercicio: Realizar una clasificación de las diferentes transformaciones en el plano indicando para cada una de ellas un ejemplo en la vida real.

7. Ejemplos de construcciones con GeoGebra

A continuación exponemos algunos ejemplos de construcciones con el Geogebra, en el que se indican los pasos a seguir.

7.1 Giro de centro O y de amplitud α

1. Abrir GeoGebra



2. Hacer que no se muestren los ejes: *Vista/Ejes* (en barra de menús), para trabajar en un tapiz limpio.
3. Construir el ángulo de giro α :

- a. Construir una circunferencia dando su centro A y de radio 1 cm utilizando la herramienta *Circunferencia dado su Centro y su Radio*.



- b. Dibujar un radio horizontal (segmento AB) que será el lado fijo del ángulo (utilizar la herramienta *Segmento entre Dos Puntos*).

- c. Fijar el punto B , para que no se pueda mover (clic derecho sobre el punto, *Propiedades/Básico/ObjetoFijo*).



- d. Dibujar otro radio (segmento AC) que será el lado móvil del ángulo de giro.

- e. Quitar los rótulos de los segmentos AB , AC y de la circunferencia (para dejar limpio el dibujo hacer clic derecho sobre cada objeto –también se pueden seleccionar todos a la vez-, *Propiedades/Básico/Muestra Rótulo* – desactivado).

- f. Definir el ángulo BAC , usando la herramienta *Ángulo*.



- g. Hacer que no se muestre la circunferencia (clic derecho sobre la circunferencia, *Propiedades/Básico/Muestra Objeto* - desactivado).

4. Situar el centro de giro utilizando la herramienta *Nuevo Punto* (renombrar el punto y llamarlo O – clic derecho sobre el punto y elegir *Renombra*).

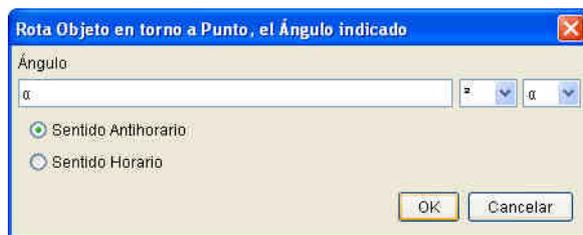


5. Dibujar un polígono sobre el que se realizará el giro, eligiendo la herramienta *Polígono* (podría ser un cuadrilátero). Hacer que no se muestren los rótulos del polígono para simplificar el dibujo (seleccionar todo el polígono arrastrando el ratón, luego clic derecho *Básico/Muestra Rótulo* – desactivado).



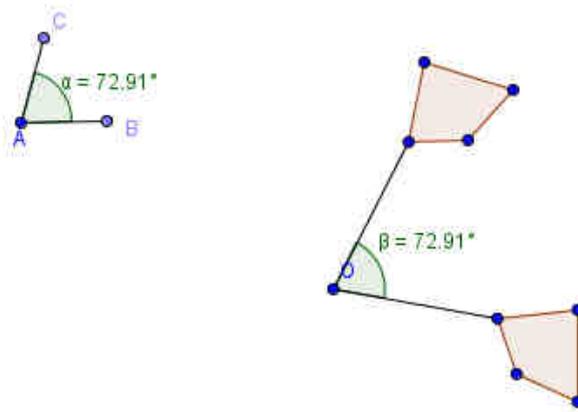
6. Realizar el giro de centro O y amplitud α utilizando la herramienta *Rota Objeto*: Señalar el polígono, luego señalar el centro O y por último elegir el ángulo α (borrar previamente el 45°)





Ocultar los rótulos del polígono homólogo.

- Variando el lado móvil (mover punto C), se obtienen los giros de la figura.



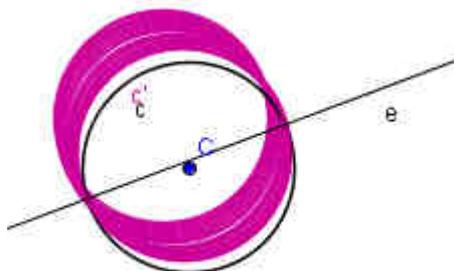
7.2 Simetría axial de una circunferencia, observando que se convierte en un elemento invariante cuando el centro está sobre el eje

- Dibujar el eje de simetría y renombrarlo con **e** utilizando la herramienta *Recta que pasa por Dos Punto*.
- Dibujar una circunferencia utilizando la herramienta *Circunferencia dado su Centro y uno de sus Puntos*.
- Realizar la simetría axial de la circunferencia respecto al eje **e** utilizando la herramienta *Refleja Objeto en Recta*.



Podrías cambiar el color de la circunferencia homóloga para destacarla

- Seleccionando la circunferencia inicial (utilizar previamente la herramienta *Elige y Mueve*), arrastrarla para hacer coincidir el centro de la circunferencia con el eje observando que se transforma en sí misma.



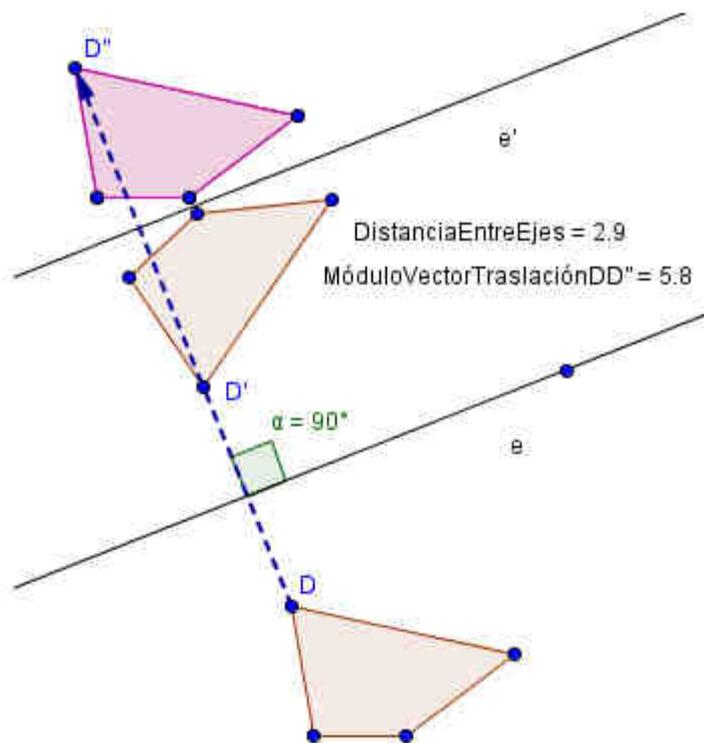
7.3. Composición de de simetrías axiales de ejes paralelos, comprobando que se trata de una traslación de vector perpendicular a los ejes y de módulo el doble de la distancia entre los ejes.

1. Dibujar el primer eje e (herramienta *Recta que pasa por Dos Puntos*). 
2. Dibujar el segundo eje e' dibujando una recta paralela a la primera (herramienta *Recta Paralela*). 
3. Dibujar la figura sobre la que se realizará la composición (por ejemplo un cuadrilátero). Hacer que no se muestren los rótulos (seleccionar todo el polígono arrastrando el ratón, luego clic derecho *Básico/Muestra Rótulo* -desactivado). 
4. Realizar la composición de las dos simetrías axiales (respecto a los ejes e y e' respectivamente) utilizando la herramienta *Refleja Objeto en la Recta* (hacer que no se muestren los rótulos de los cuadriláteros homólogos para una mejor visión). 
5. Muestra los rótulos de un punto del cuadrilátero inicial (D) y de sus homólogos por las simetrías (D' y D'') (clic derecho sobre el punto y activar *Muestra Objeto*).
6. Dibujar el vector formado por los puntos DD'' (utilizar la herramienta *Vector entre Dos Puntos*). 
7. Realiza la traslación de la figura inicial según el vector DD'' utilizando la herramienta *Traslada Objeto por un Vector*. Observar que coincide con la homóloga mediante la composición, por lo tanto la composición de simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación. 

Vamos finalmente a comprobar que el vector de traslación tiene por módulo el doble de la distancia entre los ejes y además es perpendicular a estos.

8. El módulo del vector es el doble de la distancia entre ejes:
 - a. Medir la distancia entre las rectas (utilizar la herramienta *Distancia o Longitud*). 
 - b. Medir el módulo del vector utilizando la misma herramienta y señalando los puntos DD'' . Se observa que el módulo del vector es el doble de la distancia entre las rectas.
9. Medir el ángulo que forma el vector con el eje e , para comprobar que es recto:
 - a. Definimos una recta auxiliar que contenga al vector DD'' (herramienta *Recta que pasa por Dos Puntos*).
 - b. Con la herramienta *Ángulo* medimos el ángulo formado entre el eje e y el vector DD'' . Nos dará 90° . 
 - c. Para un mejor aspecto de la construcción ocultamos la recta auxiliar (podemos utilizar la herramienta *Expone/Oculto*).
10. Podríamos variar las posiciones del eje inicial e , del eje paralelo e' y del cuadrilátero observando la consistencia de la construcción.





8. Evaluación

Para evaluar los avances de los alumnos en la adquisición de las capacidades (objetivos didácticos) y competencias básicas se utilizaron los *criterios de evaluación* siguientes:

1. Construir la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.
2. Reconocer las propiedades (forma y tamaño) que una figura básica mantienen en las transformaciones geométricas.
3. Aplicar traslaciones, giros y simetrías a figuras planas sencillas.
4. Reconocer el tipo de movimiento que convierte una figura en otra.
5. Determinar los elementos que caracterizan al movimiento de una figura (vector de traslación en las traslaciones, centro y amplitud en los giros, centro en la simetría central y eje de simetría en la simetría axial).
6. Determinar elementos invariantes en los movimientos.
7. Realizar la composición de movimientos.
8. Reconocer el motivo mínimo en un mosaico y los movimientos utilizados en la construcción del mosaico.
9. Utilizar software de matemáticas y páginas web, para profundizar en el conocimiento de la geometría.

Para evaluar la adquisición de las capacidades y la actitud del alumnado se utilizó:

- La observación sistemática del trabajo en el aula (tomando notas en la ficha personal de evaluación del alumno) durante las sesiones de clase (30% de la nota).
- Analizando el trabajo de evaluación al final de la unidad (70% de la nota).

Se valoró la *actitud*, observamos que la mayoría del alumnado mostró *interés* por aprender, preguntando dudas y realizando observaciones. El alumnado prestaba *atención* a las explicaciones del profesor y de sus compañeros y en general estaban centrados en el trabajo. Muy pocos alumnos, y en determinadas clases (principalmente en las primeras), utilizaron el ordenador para otro uso que no fuera el programado. Hubo *cooperación* entre los alumnos, tanto de su propio equipo como con otros equipos. Por último observamos que alumnos no destacados en el área de matemáticas, eran competentes en el trabajo con el ordenador, implicándose más en la materia e intercambiando conocimientos entre ellos. El *trabajo* de los alumnos fue bueno salvo en dos casos, uno no presentó el trabajo de evaluación y otro lo hizo de manera incorrecta.

Los resultados de la evaluación de la unidad fueron: 3 sobresalientes; 19 notables; 2 bien; 1 suficiente y 2 insuficientes. Éstos resultados mejoran a los finales (de todo el curso) que fueron: 5 sobresalientes, 6 notables, 7 bien, 5 suficientes y 4 insuficientes.

En el anexo se puede encontrar la ficha de evaluación de la unidad.

9. Conclusiones

Desarrollar un trabajo en el aula de informática supone casi siempre ciertas dificultades de las que no fuimos exentos en nuestra experiencia. Así, tuvimos algunas dificultades en poder conseguir un aula de informática, ya que la mitad de las horas estaban ocupadas por las clases de Tecnología, y tuvimos que trabajar en 3 aulas distintas según los días. Esto supuso preparar las tres aulas de la misma manera con una mayor carga de trabajo. Además el Centro tiene dos edificios (secundaria obligatoria y bachiller), dos aulas de informática se encuentran en un edificio y las otras dos en el otro. La tercera parte de las sesiones las tuvimos que dar en el aula de informática de bachiller teniendo que acompañar a los alumnos para que cruzaran la calle que separa a los edificios (los alumnos están acostumbrados a este cambio ya que en el edificio de bachiller se encuentra la biblioteca, los museos⁷ y la secretaría).

En el aula de informática “siempre hay una máquina que falla” y teníamos que perder algún tiempo en realizar correcciones (reiniciar el ordenador, cambiar de ordenador, redistribuir a los alumnos).

Una dificultad importante para terminar lo programado en las sesiones fue la gran demanda que ejercen los alumnos del profesor cuando tienen que realizar las construcciones con el ordenador, varios equipos de trabajo se quedaban bloqueados sin poder continuar, no teniendo tiempo de atenderlos a todos. A veces nos ayudaban otros alumnos que tenían más experiencia con los ordenadores y terminaban las actividades con antelación. Sería ideal que hubiera dos profesores llevando la clase, como esto es difícil que se pueda dar, podría ser interesante preparar previamente a dos o tres alumnos destacados que puedan ayudar luego al profesor en la clase.

En la programación del Departamento de Matemáticas se dedican 4 semanas (16 horas) al contenido de Geometría, en esta experiencia tuvimos que utilizar 5 semanas (además de lo trabajado en esta unidad hay otros contenidos como: aplicaciones del teorema de Thales y de Pitágoras, planos de simetría de una figura y coordenadas geográficas y husos horarios), lo que supuso un retraso de una semana, pero al final haciendo las correcciones correspondientes se pudo terminar todo el temario. Por falta de tiempo no se pudo trabajar la composición de movimientos de distinto tipo. El desarrollo de la

⁷ Para conocer los museos del IES Canarias Cabrera Pinto puede visitar su página de cultura: <http://iescabrerapinto.com/cultura.php>



unidad mejoraría bastante si se le hubiera dedicado una semana más en su temporalización. Para el curso próximo propondremos que se dediquen 4 sesiones más al bloque de Geometría en la programación.

El tiempo de dedicación a preparar las clases fue al menos tres veces más que el tiempo dedicado a otras sesiones de clase en su aula habitual, puede que esto se deba a la poca experiencia en trabajar con software de matemáticas para dar clases.

El alumnado se quejó de la dificultad de las actividades del trabajo de evaluación, por lo que les dimos una semana más de plazo para su presentación y tuvimos que dedicar algún tiempo de otras sesiones a responder a dudas. Habría que insistir en que éste se vaya realizando al tiempo que se desarrolla la unidad.

Nos costó mucho la corrección de los trabajos de evaluación, para cada uno se necesitábamos al menos 45 minutos

Por otra parte, gracias a este método de trabajo desarrollamos la unidad didáctica de manera satisfactoria, creemos que en el aula tradicional no se podría haber trabajado la mitad de los contenidos. Se profundizó más en los contenidos y mejoraron el tipo de actividades. Los alumnos agradecieron el salir del aula de clase a las aulas de informática. En general hubo una mayor motivación por el trabajo.

Concluyendo, tanto el alumnado como el profesorado nos sentimos satisfechos del trabajo realizado, avanzando en la adquisición de las capacidades y competencias mediante actividades, métodos y recursos adecuados.

Bibliografía

- Arriero, C. & García, I (2000). Descubrir la Geometría del entorno con CABRI. Ed. Narcea del Ministerio de Educación y Ciencia. Materiales de 12 a 16.
- Amigo, C., Peña, P., Pérez, A., Rodríguez, A. & Sivit, F. (1997). Matemáticas de 4.º de la ESO Opción B. Editorial Mac. Graw Hill.
- Carrillo de Albornoz, A. & Llamas, I. (1999). Cabri Géomètre II para Windows. Construcciones y lugares geométricos. Editorial Ra-Ma.

Páginas web utilizadas:

GeoGebra en España: <http://www.geogebra.org/cms/>

Página del departamento de matemática del IES Marques de Santillana (uso de CabriWeb): <http://www.iesmarquesdesantillana.org/departamentos/tallerma/cabri.htm>

Página oficial de Maurits Cornelius Escher: <http://www.mcescher.com/>

Geoclic: Paquete de clic de Jaume Bartolí Brugués (unidades de la 13 a la 19): http://clic.xtec.cat/db/act_es.jsp?id=1308

Movimientos en el plano con Descartes:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Movimientos_en_el_plano/index_movi.htm

Portal del Proyecto Medusa:

<http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/4/Medusa/GCMWEB/Code/Default.aspx>

Decreto 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias:

<http://www.gobcan.es/boc/2007/113/001.html?categoria=2713>

Gabriel Sosa Felipe, catedrático de matemáticas de Enseñanza Secundaria. Centro de trabajo: IES Canarias Cabrera Pinto. Lugar de residencia: San Cristobal de La Laguna (S/C de Tenerife). Lugar de nacimiento: Caracas (Venezuela) el 15/04/1960.



ANEXO

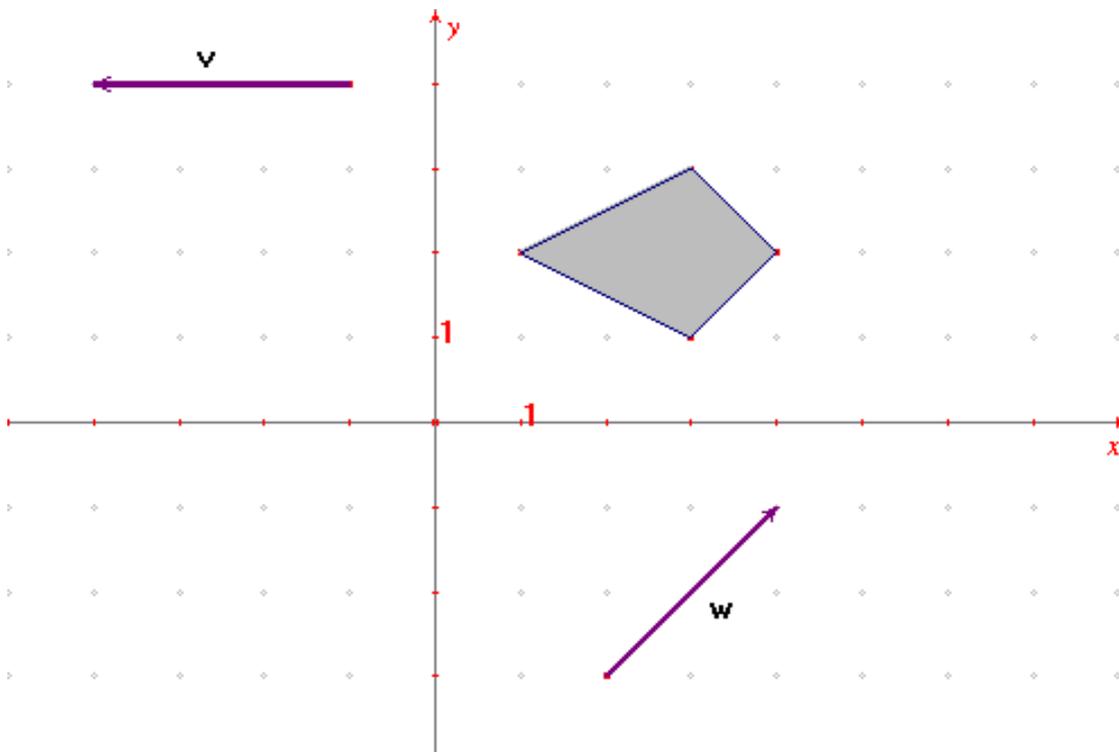
Transformaciones en el plano: trabajo a realizar para evaluación del contenido

1. Definir y dibujar: Punto, recta, ángulo, circunferencia, mediatriz de un segmento y bisectriz de un ángulo
2. Realizar una clasificación de las transformaciones en el plano, ilustrándola con dibujos y ejemplos de la vida real
3. **Vectores.** Definir y dibujar
 - a. Vector fijo
 - b. Características de un vector
 - c. Vectores equipolentes
 - d. Vector libre

Indicar el procedimiento para sumar dos vectores (dibujarlo)

4. **Traslaciones:**
 - a. Definición de traslación de un punto y de una figura según un vector (con dibujos)

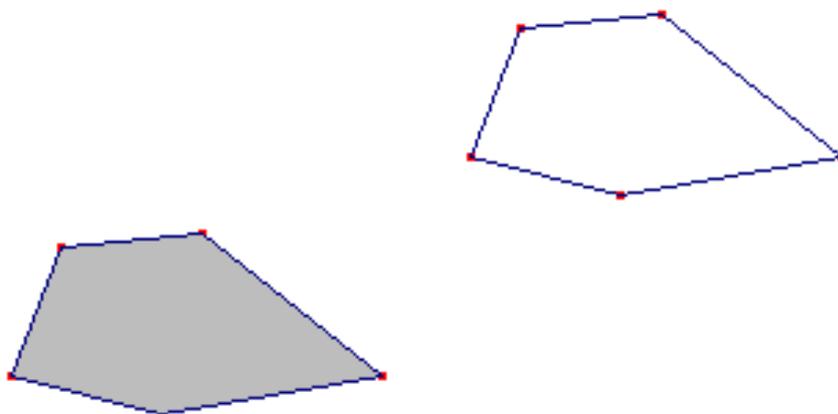
Ejercicio 1: Trasladar el trapecoide de la figura según los vectores dados



Una vez trasladada la figura según el vector v , ¿qué vector hace que la figura vuelva a su punto de partida?

- b. Dada una figura y su trasladada saber obtener el vector de traslación

Ejercicio 2: Dibuja el vector que traslada la figura oscura en la transparente



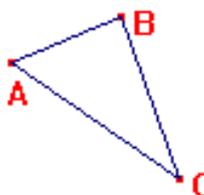
c. Definir elementos invariantes

¿Cuál es la traslación de una recta respecto a un vector paralelo a ella? Por lo tanto toda recta paralela al vector de traslación es un.....

¿Existen algún punto que al trasladarse se convierta en sí mismo?

d. Composición de dos traslaciones: “Es una nueva traslación que tiene por vector de traslación la..... de los vectores de traslación de cada una de las traslaciones a componer”

Ejercicio 3: Realizar la traslación del triángulo por composición de las traslaciones definidas por v y por w . ¿Cuál es el vector que define a dicha composición?

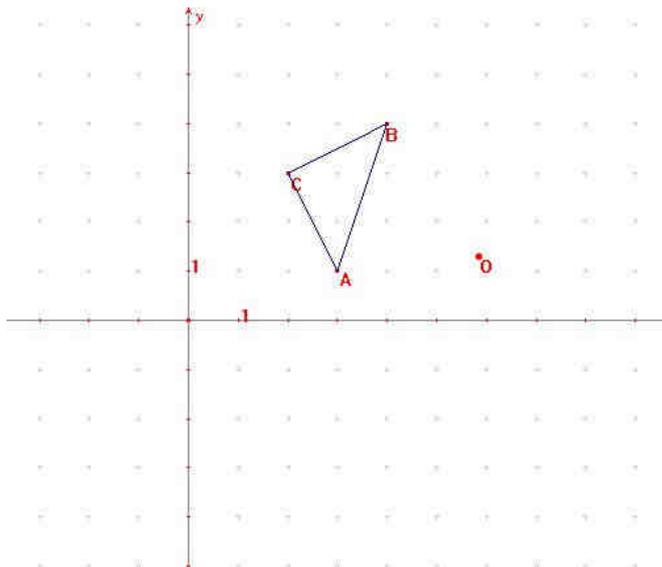


5. Giros:

- a. Definir giro de centro un punto **O** y de amplitud un ángulo α de un punto y de una figura

Ejercicios:

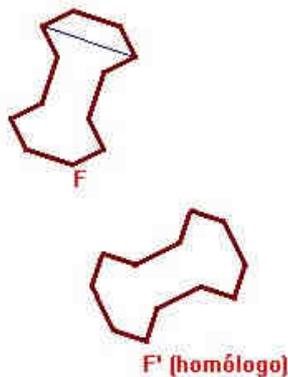
1. Está bien la frase: "Di a mi vida un cambio de rumbo radical, le di un giro de 360° "
2. ¿Qué giro ha efectuado el minutero de un reloj al pasar de las 10 a las 10:20'?
3. ¿Que giro ha efectuado el horario de un reloj en 50'? ¿y el minutero?
4. Dibuja utilizando el transportador el transformado del triángulo mediante un giro de centro O:
 - a) Y amplitud 90° en sentido negativo b) Amplitud 180° c) Amplitud 45°



¿Cambia el sentido de giro de los ángulos de una figura al realizar un giro?

- b. Elementos invariantes
 1. Definir punto doble
 2. Contestar a las preguntas
 1. ¿Qué punto es doble en cualquier giro?
 2. ¿Qué amplitud debe tener un giro para dejar invariante a cualquier figura?
 3. ¿Qué giros dejan invariantes a una circunferencia?
- c. Obtención del centro y amplitud de un giro dadas las figuras

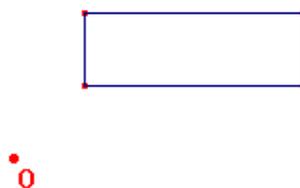
Ejercicio: Encuentra el centro y ángulo que definen el giro que se muestra en la figura



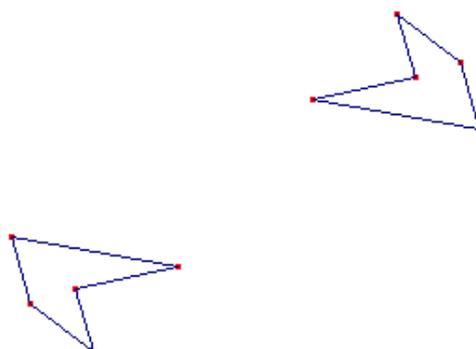
6. Simetría central:

- a. Definir simetría axial de un punto y de una figura
- b. Realizar las actividades:

1. Dibuja el rectángulo simétrico del dado respecto al punto O:



2. En la figura aparece una figura y su simétrica respecto al punto O, ¿dónde se encuentra dicho punto?



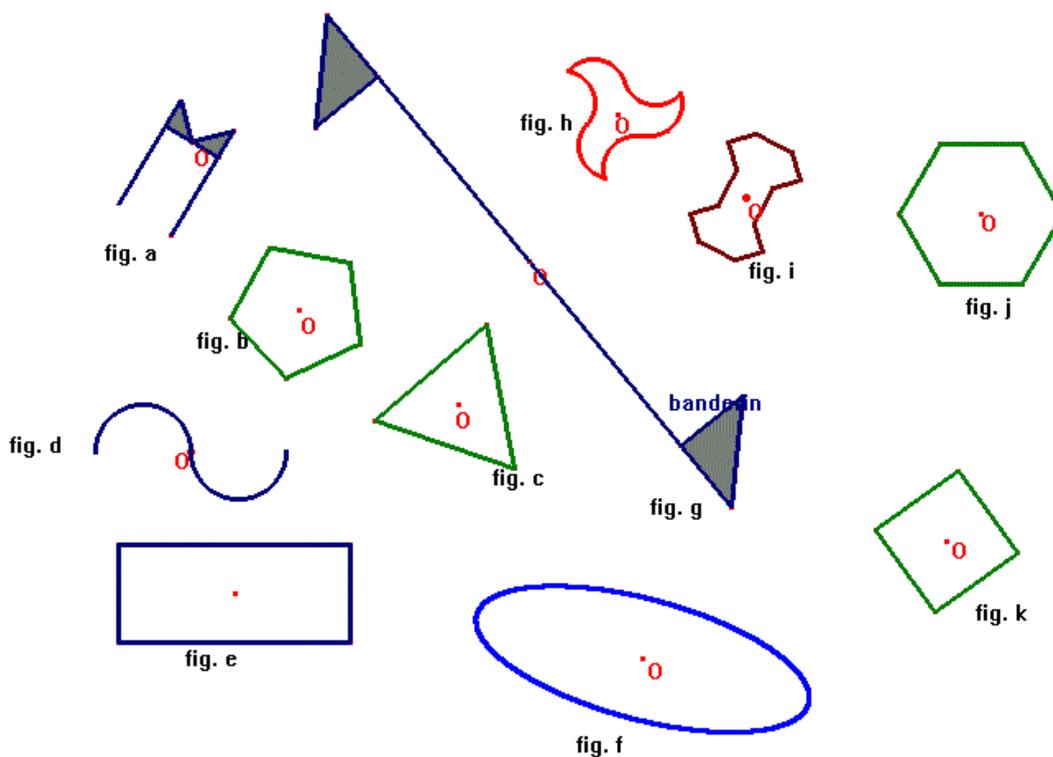
3. Dibuja un triángulo rectángulo BCA cuyos catetos midan tres y cuatro unidades (rectángulo en A). Halla su simétrico tomando como centro:

- a) El vértice A (ángulo recto) b) El vértice B c) El vértice C

c. Elementos invariantes: Realizar las actividades

- 1. ¿Qué punto es doble en cualquier simetría central?
- 2. ¿Dónde debe estar el centro de simetría para que una circunferencia sea figura invariante? ¿Y para una recta?
- 3. La circunferencia es..... respecto al.....
- 4. La recta es..... respecto a cualquier punto que esté sobre la.....
- 5. Indicar las figuras simétricas respecto al punto O



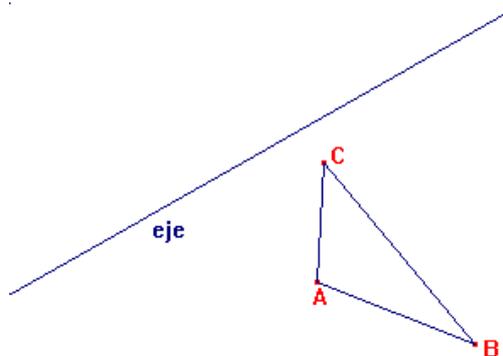


- d. Busca en tu entorno figuras geométricas que tengan simetría central
 e. Composición de simetrías:
 1. Del mismo centro es una.....
 2. De distinto centro es una.....

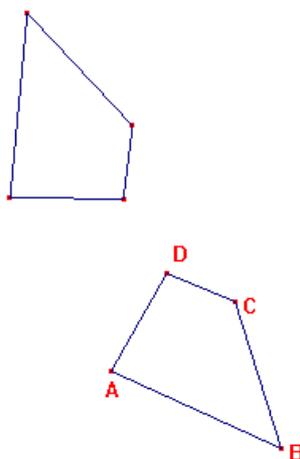
7. **Simetría axial:**

- a. Definir simetría axial respecto a un eje de un punto y de una figura
 b. ¿Por qué a la simetría axial se le llama movimiento impropio?
 c. Ejercicios:

1. Hallar el simétrico del triángulo respecto al eje en la siguiente figura:



2. Dados los dos polígonos simétricos, hallar el eje de simetría que transforma uno en el otro:



d. Elementos invariantes:

1. ¿Qué puntos son dobles en cualquier simetría axial?
2. ¿Las rectas perpendiculares al eje son invariante? ¿por qué?
3. ¿Toda circunferencia cuyo centro este en el eje de simetría se transforma en sí misma?

Ejercicios:

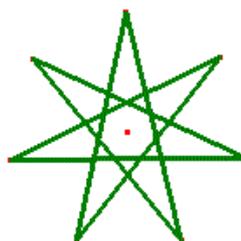
1. Localiza y describe tres formas y tres objetos que sean simétricos respecto de alguna recta.
2. Encuentra los ejes de simetría de cada una de las figuras, ¿cuántos ejes de simetría tienen?:



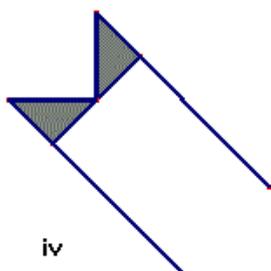
i



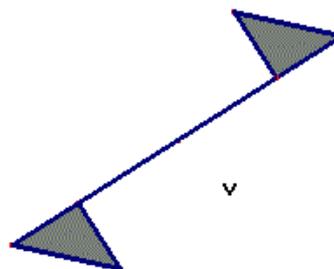
ii



iii



iv



v

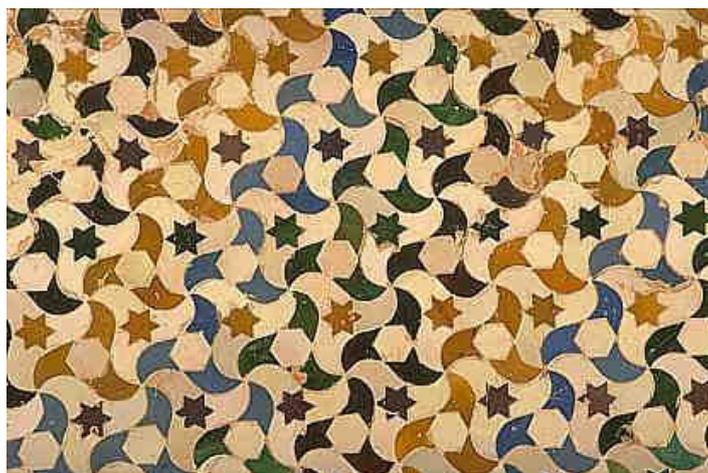


e. Composición de simetrías axiales:

1. De ejes paralelos: es una..... de vector perpendicular a los ejes y de módulo el de la distancia entre los ejes.
2. De ejes no paralelos: es un giro de amplitud el del ángulo que determinan los dos ejes y de centro el de los ejes.

8. Motivos que teselan el plano:

¿Cuál es el motivo mínimo que tesela el plano en los siguientes mosaicos?, ¿Qué transformaciones del plano realizarías para construir el mosaico? De estos tres mosaicos ¿cuales pertenecen a Escher⁸ y cuál de Alhambra de Granada?



⁸Maurits Cornelius Escher: <http://www.mcescher.com/>