NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 75, noviembre de 2010, páginas 105–120

Una alternativa para trabajar con límites especiales

María del Socorro García González (Unidad Académica de Matemáticas, Guerrero, México)
Catalina Navarro Sandoval (Unidad Académica de Matemáticas, Guerrero, México)

Fecha de recepción: 8 de marzo de 2010
Fecha de aceptación: 13 de mayo de 2010

Resumen El presente trabajo propone una alternativa enfocada a alumnos de Nivel Medio Superior, por medio de la cual podrían visualizar y deducir los límites especiales: $lím_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$ y $lím_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$, al momento en que son vistos en clase, utilizando para ello recursos tales como, gráficas de funciones y tablas de valores. Ésta fue desarrollada con dos grupos de estudiantes de los estados de Oaxaca y Guerrero, México, respectivamente.

Palabras clave Límites especiales, Visualizar, Deducir.

Abstract The developed work proposes an alternative focused on students of Bachillerato, it through they will be able to visualize and to deduce the special limits: $lím_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$ and $lím_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$, at moment in that are seen in class, using for it such resources as, graphs of the some functions and values table. It was developed with two groups of students from the states of Oaxaca and Guerrero, México, respectively.

Keywords Special Limits, Visualize, Deduce.

1. Introducción

Con base en la revisión de diferentes Planes y Programas de Estudio de Nivel Medio Superior (NMS) en México, se concluye que los límites especiales deben ser abordados durante el bachillerato, sin embargo, en una investigación reciente sobre dichos límites (Navarro, 2004), se encontró que estos deberían ser abordados hasta la universidad por la complejidad que representan. Esto último, a consecuencia de los resultados de una entrevista aplicada a profesores en servicio del NMS, quienes sostienen que la mayoría de los alumnos, cuando llegan al curso de cálculo diferencial e integral, no tienen conocimientos básicos suficientes para comprender las demostraciones de los límites: $lím_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$ y $lím_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$ de ahí, que represente un problema el cálculo de los mismos, pues en el NMS no existe rigor matemático como en el caso de Nivel Superior. Ante esta problemática, Navarro (2004), diseña una propuesta dirigida a profesores en servicio de NMS para abordar los límites especiales sin tanto formalismo.

Tomando en cuenta lo descrito en el párrafo anterior y la incidencia que tienen dichos límites en la enseñanza del cálculo, cuando se aborda la demostración de la derivada del *sen x*; en el presente trabajo nos hemos interesado en elaborar una propuesta enfocada a estudiantes de NMS en México, con la intención de que éstos puedan visualizar y deducir los límites especiales al momento en que son abordados en clase.

2. Antecedentes, Marco Teórico y Metodología

2.1. Antecedentes

Para abordar las deducciones de los límites especiales, Navarro (2004), diseña una secuencia didáctica para profesores en servicio de NMS, basada en la visualización de gráficas de funciones algebraicas y trigonométricas, en donde por medio del análisis de los parámetros de las funciones algebraicas, pone en evidencia comportamientos similares de las funciones trigonométricas y muestra que estos dos tipos de funciones tienen características comunes. Luego, a partir de este análisis aborda los límites especiales, no dejando de lado la parte analítica ni la algebraica. Los resultados obtenidos en dicha investigación, evidencian que la secuencia diseñada posibilita la comprensión de las características comunes entre las funciones algebraicas y trigonométricas, así como de los límites especiales.

Al igual que en Navarro (2004), el interés del presente trabajo, son los límites especiales, sin embargo, a diferencia de éste, la población a la que se enfoca la propuesta, son alumnos. Para el diseño de la propuesta, ha sido considerado el uso de la visualización como una herramienta importante y junto a ella, la graficación de funciones.

Respecto a la graficación de funciones, existe evidencia de que los alumnos de NMS no están familiarizados con la graficación de funciones trigonométricas, en particular con las funciones sen x y cos x, pues aunque utilizan la tabulación como método tradicional de graficación no tienen dominio total sobre éste, pues al momento de obtener los pares ordenados y ubicarlos en el plano cartesiano, los trazos que realizan no corresponden al lugar geométrico que debiera (Patiño, 2007, pp. 113-122). Por esta razón nos dimos a la tarea de buscar recursos que ayudaran al alumno a superar dicha dificultad; así, encontramos evidencias de que el uso del software como instrumento de visualización, en el aprendizaje del cálculo y en particular del concepto de límite, mejora la disposición de los alumnos al estudio de dicho contenido, además de facilitar la relación de los procesos con imágenes mentales, produciendo con ello una mejor comprensión de los conceptos (Cabezas, et al., 2004, pp. 67-75).

Para el diseño de la propuesta, se optó por implementar el Software Geometra Sketchpad 4.05 a fin de facilitar a los alumnos el trabajo con las gráficas de las funciones y junto a ello la visualización, se usó como marco teórico la Teoría de Situaciones Didácticas y como metodología la Ingeniería Didáctica.

2.2. Teoría de Situaciones Didácticas

La Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Guy Brousseau, aparece como un medio privilegiado, tanto para comprender lo que hacen los profesores y los alumnos, cómo para producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes y a los alumnos, para producir fielmente un medio de comunicación entre los investigadores y con los profesores. Brousseau, parte de ideas Piagetianas respecto de la construcción del conocimiento por parte de un sujeto, él cree que el alumno aprende, adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (Brousseau, 1986, pp. 41-43)

Por lo descrito en el párrafo anterior, en la presente investigación, nuestra tarea consistió en proporcionar a los alumnos ese *medio*, de tal forma que provocara en ellos la visualización y deducción de los límites especiales. Para ello se eligieron actividades en las que se involucraron el cálculo de límites de funciones algebraicas y trigonométricas, entre ellos, los límites especiales, dichas actividades fueron elegidas para que el alumno pudiera aceptarlas, y le hicieran actuar, hablar, reflexionar y evolucionar por sí mismo.

Desde la perspectiva de la Teoría de Situaciones Didácticas, el alumno sólo habrá adquirido verdaderamente el conocimiento cuando sea capaz de ponerlo en acción, en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza, y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada *a-didáctica*. Es importante destacar que la noción de Situación Didáctica va más allá de la idea de mera actividad práctica, ya que una situación busca que el alumno construya con sentido un conocimiento matemático, y nada mejor para ello que tal conocimiento aparezca a los ojos del alumno como la solución óptima del problema que se va a resolver. De esta forma a lo que se le denominará *aprendizaje* va a consistir y a mostrarse, en el cambio de *estrategia*, lo que implica el cambio de los conocimientos que le están asociados y la aparición de un conocimiento específico como resultado del cambio. El *contrato didáctico* es la regla de juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena. (Brousseau, 1986, pp. 43-44)

Guy Brousseau (citado en Chamorro, 2006), establece una tipología de las situaciones a-didácticas, como sigue:

Situación a-didáctica de acción: En esta fase el alumno se envía un mensaje así mismo mediante los ensayos y errores que hace para resolver el problema. El conocimiento matemático se encuentra presente bajo la forma de un modelo implícito el cual sugiere la toma de decisiones o el uso de algoritmos.

Situación a-didáctica de formulación: El alumno intercambia información con uno o varios interlocutores. El maestro puede ser uno de ellos, los dos pueden ser alumnos o grupos de alumnos. De esta manera el conocimiento aparece bajo la forma de *lenguaje*, el cual permite la producción de un mensaje, mismo que a su vez permite la generación de un modelo explícito.

Situación de validación: El alumno debe justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha, elaborar la verificación o prueba semántica que justifica el uso del modelo para tratar la situación. El conocimiento se presenta bajo la forma de una teoría que permite construir proposiciones y juicios.

Situación de institucionalización: El conocimiento toma la forma de conocimiento socialmente admitido. En ella se produce el reconocimiento del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del profesor, lo cual es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico.

El diseño y la organización de situaciones didácticas, es el objeto de lo que se denomina *Ingeniería Didáctica*. Su nombre evoca la necesidad de controlar herramientas profesionales, para producir secuencias de aprendizaje con ciertas garantías de éxito.

2.3. Ingeniería Didáctica

La Ingeniería Didáctica permite construir lo que se denomina *génesis artificial de un saber*, que no necesariamente coincide con la génesis histórica del concepto tratado. En dicha génesis artificial se busca el camino más rápido y seguro para que el alumno construya con sentido un concepto matemático, evitando los retrocesos y parones que históricamente hayan podido producirse, y reordenando los procesos de construcción de ese saber de acuerdo con pautas didácticas, haciendo su transposición didáctica de la manera más rigurosa posible, desde un punto de vista epistemológico. (Chamorro, 2006, pp. 50-52)

Según Douady (1995), una Ingeniería Didáctica, es un conjunto de secuencias de clase diseñadas, organizadas y articuladas coherentemente por un “profesor-ingeniero”, para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo de alumnos específico. Por tanto, considera que la ingeniería didáctica es, por un lado, un *“producto”* que resulta de un análisis preliminar, donde se tienen en cuenta las dimensiones cognitiva, didáctica y epistemológica del conocimiento a impartir y de un análisis *a priori*, en el cual se decide sobre qué variables didácticas son pertinentes y sobre cuales se actuará, y por otro lado, un *“proceso”* en el cual el profesor implementa el producto y realiza los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica de la clase lo exija.

Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una Ingeniería Didáctica, éstas son:

- Análisis preliminar.
- Diseño de la situación didáctica y su análisis *a priori*.
- Experimentación.
- Análisis *a posteriori* y validación.

En el análisis preliminar, se analizan y determinan, desde una aproximación sistémica, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos. Para ello, se debe tomar en cuenta: el conocimiento matemático que se desarrolla en la escuela así como su devenir en saber (*componente epistemológica*); las concepciones de los estudiantes, sus dificultades y los obstáculos que deben enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego por la secuencia implementada (*componente cognitiva*); así como la enseñanza tradicional y sus efectos, es decir, cómo vive el contenido matemático al seno de la escuela (*componente didáctica*).

En el Análisis a priori, se eligen las variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. También en esta instancia se establecen las hipótesis de trabajo, es decir; qué se espera de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, qué avances se consideran dentro de las expectativas, qué errores se perciben persistentes, qué mecanismos se prevé serán utilizados, en fin, todo lo inherente a las hipótesis de trabajo y expectativas del investigador. Es, en consecuencia, una fase tanto prescriptiva como predictiva. Una vez determinadas las variables didácticas y establecido el objetivo, se pasa al diseño de la situación didáctica en sí misma, la cual debe crear un medio propicio para que el alumno acepte la “invitación” al juego y se sienta desafiado a apropiarse del saber puesto sobre la mesa.

En la experimentación, se procede a la “puesta en escena” de la situación diseñada, es decir, se implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Los medios de perpetuar los sucesos que se desarrollen, para su posterior análisis quedan bajo la responsabilidad y elección del investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

El análisis a posteriori, consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada, es en ésta etapa que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis a priori y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuánto se desvían los resultados de lo que se esperaba. De esta confrontación entre los análisis a priori y a posteriori surge la fase que caracteriza a esta metodología de investigación, esto es, la validación de la misma. En dicha validación se confrontan lo esperado y lo que se obtuvo en realidad, esto es, las conjeturas y expectativas que fueron explicitadas en el análisis a priori y los resultados analizados y categorizados en el análisis a posteriori.

Para el diseño de la propuesta, en la presente investigación, fueron consideradas cada una de las fases que marca la Ingeniería Didáctica, por ello nos dimos a la tarea de realizar en el análisis preliminar, estudios de tipo epistemológico, cognitivo y didáctico, con respecto al tema de los límites especiales.

Para el estudio epistemológico se procedió a la revisión de artículos en los cuales se tratara la historia del concepto de límite, así como los relacionados con los límites especiales. Entre los resultados de este primer estudio, se halló que la noción de *límite* no se desarrolló de forma independiente sino que al contrario, muestra una interdependencia con otras nociones tales como, *variable*, *función*, *continuidad*, *infinito*, *infinitesimal*, *número*, *número real*, *continuo numérico*, *sucesión* y evolucionó tratando de resolver problemas diversos tales como: la relación entre lo discreto y lo continuo.

Para el estudio cognitivo, se aplicó un cuestionario a 20 alumnos que cursaban el tercer año de preparatoria de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. En dicho cuestionario, se les pedía argumentar qué entendían por los términos: *función* y *límite de una función*, de la misma forma se les propusieron algunos ejercicios en los que se les pedía calcular el límite de funciones algebraicas y trigonométricas. En este estudio, se logró observar la existencia de al menos dos dificultades de parte de los alumnos respecto al tema de límites; en primer lugar, manejan los términos ecuación y función como sinónimos, lo que obstaculiza que tengan una idea clara de lo que es el límite de una función, en segundo lugar, los estudiantes abusan del uso del algoritmo de sustitución para calcular límites, en consecuencia, les representa un obstáculo el trabajo con funciones de la forma $f(x)= g(x)/h(x)$ en donde existe un valor para x que hace que $g(x)$ y $h(x)$ sean *cero*.

En el estudio didáctico, a fin de identificar los semestres donde se abordan los *límites especiales* en el NMS, se procedió a la revisión de Planes y Programas de Estudio correspondientes a dicho nivel educativo (ver bibliografía), en ésta revisión se encontró que los semestres donde son abordados los límites especiales, varían entre el cuarto y el sexto semestre del bachillerato.

Aunado a la revisión de Planes y Programas de Estudio, se realizó una entrevista informal con un profesor en servicio y un alumno que cursaba el quinto semestre, ambos del Colegio de Bachilleres del estado de Oaxaca. El fin de esta entrevista, fue constatar lo que se había encontrado en la revisión de los Planes y Programas de Estudio, así como la forma en que los límites especiales eran tratados en clase. Como resultado se obtuvo que dichos límites son abordados en el curso de cálculo diferencial, sin demostración alguna, al cuestionar al profesor respecto de este hecho, contestó que se debía a la complejidad que envolvía al proceso de la demostración (argumento que coincide con lo reportado en Navarro, 2004); por ésta razón, él de manera personal, en clase, sólo los presenta bajo el tema de *límites trigonométricos especiales*, y posteriormente los utiliza como herramientas para calcular otros límites tales como; $lím_{x\to 0} \frac{sen(x)}{5x}$ y $lím_{x\to 0} \frac{\sec(\theta)-1}{\theta Sec(\theta)}$.

Para conocer la forma en que los límites de nuestro interés son abordados, se realizó el análisis de 5 libros de texto encontrados en la bibliografía de los Planes y Programas de Estudio revisados. En dicho análisis se halló, que los límites especiales son demostrados haciendo uso principalmente de trazos geométricos, identidades trigonométricas, fórmulas para calcular áreas de sectores y triángulos, se utilizan también medidas angulares pero en radianes. Un aspecto que nos llamó la atención en estas presentaciones es que, primero es demostrado el $lím_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ y posteriormente es utilizado para hallar el $lím_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$.

En dos de los libros revisados, encontramos una propuesta diferente de tratar a los *límites especiales* (Purcell, 1992, pp. 56-59 y Swokowski, 1995, pp. 59-61), en ellos se sugiere el uso de tablas donde se aproxime a los valores de *x* para ver qué sucede con *f(x)* y con ello tener una idea del límite de dicha función, sin embargo, se hace explícito que esta idea, aunque un tanto intuitiva, puede ayudar al alumno a la búsqueda del límite sugerido.

3. Diseño y aplicación de la propuesta

Con base en los resultados de los análisis anteriores, la propuesta para tratar a los límites especiales, consistió en el diseño de una actividad enfocada al uso de la graficación de funciones algebraicas y trigonométricas y se utilizaron recursos como la visualización, la creación de tablas de valores, la calculadora y el software graficador Geometra Sketchpad 4.05, éste último se utilizó para elaborar las gráficas de las funciones que les fueron presentadas a los estudiantes en las actividades, el alumno no utilizó directamente el software, ya que ello implicaba contar con un laboratorio de cómputo y en ese momento no se tenía.

Cabe señalar que el sentido en el que se uso el término visualización en el presente trabajo fue como la habilidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso de y reflexión en los dibujos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, con papel o con las herramientas tecnológicas, con el propósito de describir y comunicar información, pensando y desarrollando sobre la ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas (Arcavi, 1999).

La actividad diseñada, se conformó de una actividad preliminar y tres actividades posteriores (ésta puede verse en el apartado de anexos, al final de este escrito). A continuación se describen cada uno de los objetivos perseguidos por las actividades.

La *actividad preliminar*, tuvo como fin conocer las concepciones que tienen los alumnos sobre los conceptos, *función* y *límite de una función*, y así mismo percatarnos de la forma en que calculan los límites de funciones, centrando principalmente nuestro interés en los límites: $lím_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ y $lím_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$.

La *actividad número uno*, permitió mirar si los estudiantes podían o no determinar el límite de funciones y así mismo relacionarlo con las gráficas propuestas, también con ella fue posible conocer los métodos que utilizan en el cálculo de límites de funciones. En la actividad se propusieron límites de funciones, en particular, la lineal ($y=x$), la cuadrática ($y=x^2$) y la cúbica ($y=x^3$), posteriormente se trabajaron con las transformaciones gráficas y operaciones básicas entre dichas funciones, particularmente fueron abordadas la suma y el cociente de funciones.

El objetivo de la *actividad número dos*, consistió en que los estudiantes, calcularan límites de funciones trigonométricas, en particular de las funciones *sen x* y *cos x*, por ello se les presentaron las gráficas de dichas funciones y se les pidió que a través de la observación de las gráficas propuestas argumentaran sobre los límites que se les pedía calcular, en ésta actividad se pretendía que fueran capaces de utilizar como herramienta a la visualización. Posteriormente se les presentaron funciones trigonométricas con transformaciones que implicaban las operaciones suma, resta y multiplicación de los parámetros de las funciones, de ellas tenían que identificar en las gráficas presentadas el límite que se les pedía.

En la *actividad número tres*, se le pidió calcular los límites $lím_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$ y $lím_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$, el objetivo de ésta, fue que los alumnos pudieran calcular e identificar los límites con recursos que habían utilizado previamente, además se les facilitó una herramienta que no se les había propuesto anteriormente, ésta era una tabla en donde aparecían valores aproximados al que tendía *x* en el límite sugerido. Se les pidió además explicar el por qué de su resultado.

Una vez diseñada la propuesta, se aplicó a un grupo de tercer año, del Colegio de Bachilleres del Estado de Oaxaca, de la Cuidad de Pinotepa Nacional, Oaxaca, México, que había cursado la materia de cálculo diferencial. Este grupo estaba formado por 41 alumnos de edades entre 17 y 19 años, de los cuales sólo 32 participaron en la solución de la actividad, debido a que fueron quienes se presentaron el día en que se aplicó la actividad.

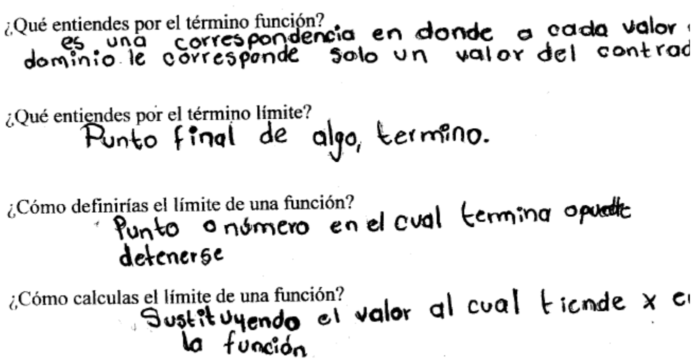
Para la resolución de la actividad preliminar se pidió trabajar individualmente, esto con el fin de enfrentar al alumno con el problema. Para el resto de las actividades se propuso trabajar en equipos, con la intención de que los alumnos pudieran intercambiar información con sus pares, y a sí mismo, justificar la pertinencia y validez de la forma en que resolvían las actividades propuestas. Los equipos se formaron por afinidad, para evitar un ambiente hostil que pudiera impedir su participación en la solución de las actividades. El tiempo que se les asignó fue de dos horas, esto debido a que en los Planes y Programas de Estudio revisados, se encontró que a estos temas les asignan en promedio 2 horas, para ser abordados en clase.

4. Resultados

A continuación mostramos por actividades los resultados de los equipos que participaron en la investigación, para constatar el cumplimiento de los objetivos perseguidos en cada una de ellas.

La actividad preliminar

La mayoría de los alumnos contestó la actividad. Respecto a las concepciones que tienen los alumnos sobre los conceptos, *función* y *límite de una función*, en las producciones analizadas, se alcanzó a observar que la mayoría concibe a la función como una correspondencia biunívoca; al término límite lo asocian con el termino de algo, de ahí que el límite de una función lo entiendan como un valor (punto, lo denominan ellos) en el cual puede detenerse la función. Ver figura 1.


¿Qué entiendes por el término función? es una correspondencia en donde a cada valor dominio le corresponde solo un valor del contrad

¿Qué entiendes por el término límite? Punto final de algo, termino.

¿Cómo definirías el límite de una función? Punto o número en el cual termina o puede detenerse

¿Cómo calculas el límite de una función? Sustituyendo el valor al cual tiende x en la función

Figura 1. Actividad preliminar

Respecto de la forma en que calculan los límites de funciones, se encontró que el algoritmo de sustitución es el más usado (ver figura 2). En esta actividad se notó que los alumnos tenían problemas al abordar los límites, en particular hubo quienes argumentaban que una función continua no tiene límite y que una función discontinua si lo tiene, (ver figura 3). Respecto a los límites especiales, los valores que los alumnos participantes asociaron a éstos, fueron infinito (∞) e indeterminado.

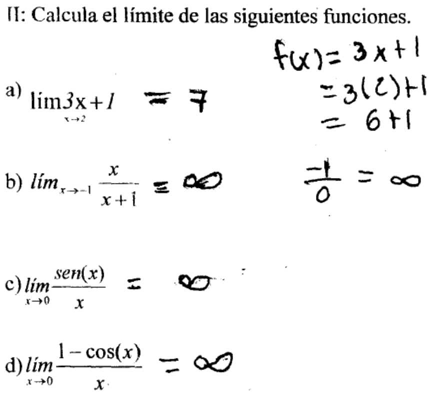


Figura 2. Actividad preliminar

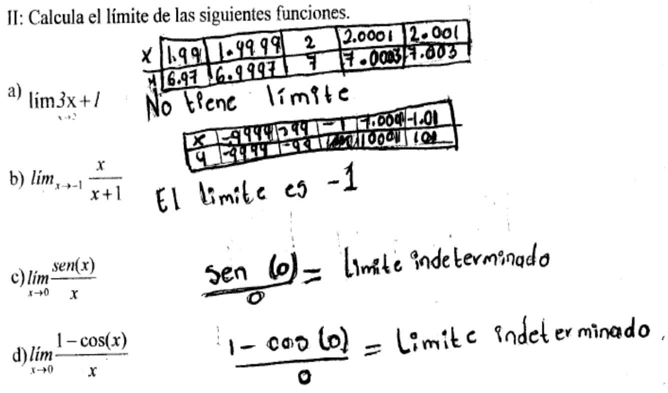


Figura 3. Actividad preliminar

La actividad número uno

Esta actividad se resolvió satisfactoriamente, pues la mayoría de los alumnos halló los límites pedidos y los identificó en cada una de las representaciones gráficas, sin embargo, hubo quienes sólo los resolvieron y no usaron las gráficas. Respecto a los métodos que utilizan para calcular los límites, notamos en las producciones, que la mayoría de los equipos optaron por el uso de tablas de valores, notamos en ello que los valores usados fueron enteros, no trabajaron con valores decimales.

Para los límites de funciones con transformaciones gráficas, observamos que hubo problemas solamente en uno de ellos, el que correspondía a un límite de la forma 0/0, pues la mayoría de los alumnos argumentaron que el límite era infinito (∞), a pesar de estar haciendo uso de tablas y de la gráfica de la función, parece que no pudieron confrontar estos dos resultados y mirar lo que realmente se les estaba presentando. En los resultados llama mucho la atención el caso de un alumno (ver figura 4), que tiene arraigada la idea de continuidad a la de límite.

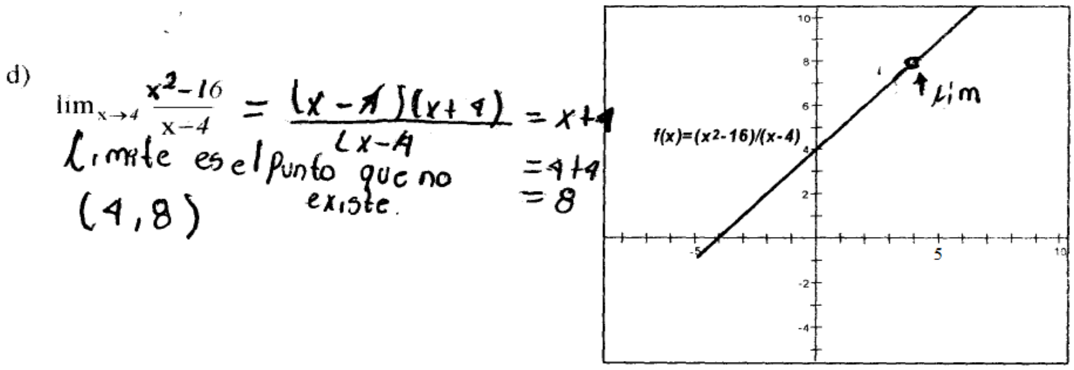


Figura 4. Actividad 1, el límite es el punto que no existe

La actividad número dos

El objetivo de esta actividad se cumplió, pues la mayoría de los alumnos, al menos con las funciones prototipo *sen x* y *cos x*, dieron sus resultados sólo a través del análisis de las gráficas propuestas, lo cual nos deja ver que implícitamente hicieron uso del recurso de la visualización (ver figuras 5 y 6), otros más siguieron utilizando los métodos de sustitución y la creación de tablas para los límites de funciones que implicaban transformaciones gráficas entre ellas, la mayoría de los estudiantes, recurrió al uso del método de sustitución.

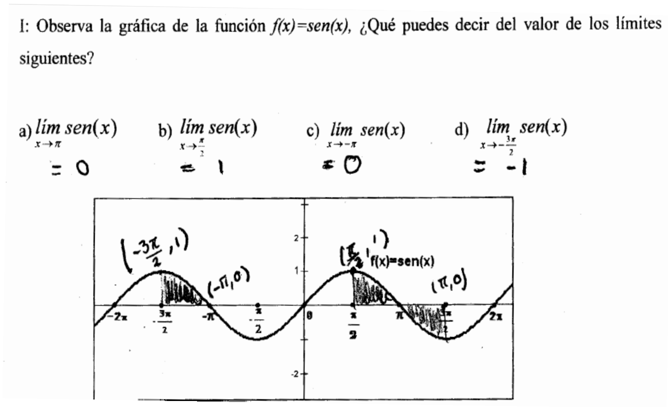


Figura 5. Actividad 2, bloque 1

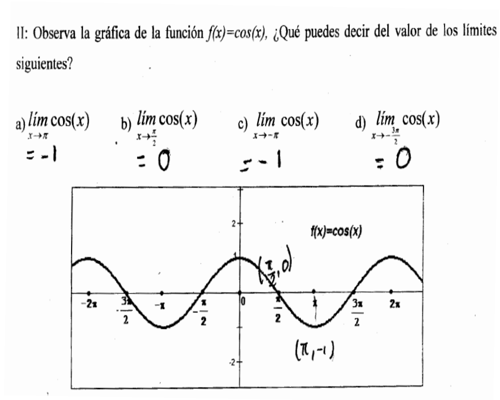


Figura 6. Actividad 2, bloque 1

En este bloque, hubo un equipo, que trabajó de la siguiente manera, primero convirtió los radianes a grados y posteriormente usando el algoritmo de sustitución halló el resultado, sólo que al evaluar los valores de *x* en *f(x)*, lo hicieron con valores aproximados a éste y no al que verdaderamente tendía *x*, lo que obstaculizó el dar un valor correcto del límite pedido, esto puede verse claramente en las figuras 7 y 8.

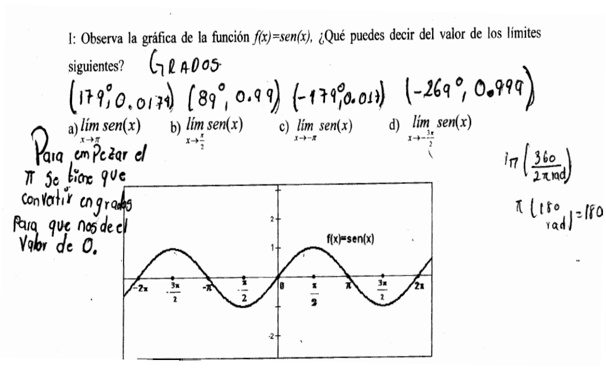


Figura 7. Actividad 2, bloque 1

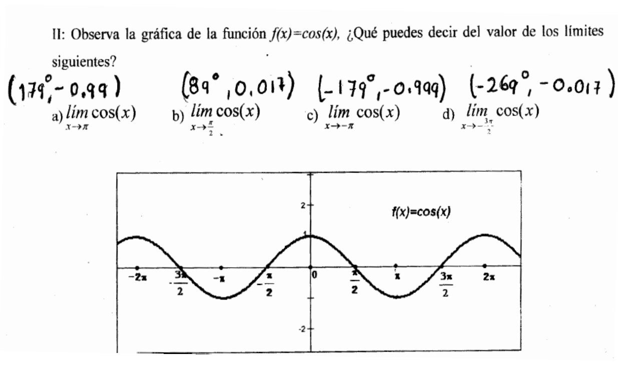


Figura 8. Actividad 2, bloque 1

La actividad número tres

Con base en las producciones de los alumnos, notamos que la mayoría pudo contestar la actividad correctamente, debido a que el trabajo del cálculo de los límites se les facilitó mucho con los recursos proporcionados en la actividad. Sin embargo, hubo algunos problemas, por ejemplo a algunos estudiantes, los recursos proporcionados lejos de ayudarlos, los confundían, pues no pudieron confrontar dichos recursos y emitir un resultado, otros más presentaron problemas al trabajar con el método de sustitución, ya que para ellos la calculadora (donde hacen las operaciones de sustitución) les decía una cosa, mientras que la gráfica les indicaba otra (ver figuras 9 y 9.1), otros más, en menor proporción, tenían muy arraigado el algoritmo de sustitución, lo que les cerró al empleo de otros métodos, esto lo argumentamos por que algunos alumnos al resolver esta actividad, sólo sustituyeron el valor de x, en la función $f(x)$, lo que les originó un cociente de la forma 0/0, que dijeron era igual a infinito(∞), y los recursos proporcionados ni siquiera los tomaron en cuenta.

II: A continuación te presentamos una tabla donde se le han asignado a x, valores próximos a 0, así mismo se han obtenidos los valores en $f(x)$, analiza éstos resultados, y junto con la gráfica de la función, calcula el límite sugerido.

Ejercicio	Tabla de valores	
el valor es infinito ∞	x	$f(x)=\frac{sen(x)}{x}$
	1.0	0.84147
	0.1	0.99833
	0.01	0.99998
	↓	↓
b) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$	0	?
Pero en la gráfica sale 1 (1,0)	↑	↑
	-0.01	0.99998
	-0.1	0.99833
	-1.0	0.84147

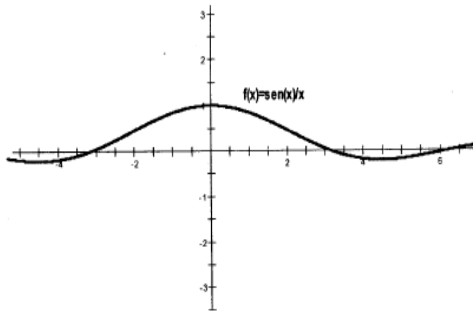


Figura 9. Actividad 3

ACTIVIDAD 3

I: A continuación te presentamos una tabla donde se le han asignado a x, valores próximos a 0, así mismo se han obtenidos los valores en $f(x)$, analiza éstos resultados, y junto con la gráfica de la función, calcula el límite sugerido.

Ejercicio	Tabla de valores	
El valor es infinito ∞	x	$f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x}$
	1.0	0.459697694
	0.1	0.049958347
a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$	0.01	0.0049999583
	0.0001	0.00004999
Por que así está representado en la grafica y así me dio el resultado de la operación	↓	↓
	0	?
	↑	↑
	-0.0001	-0.00004999
	-0.01	-0.0049999583
	-0.1	-0.049958347
	-1.0	-0.459697694

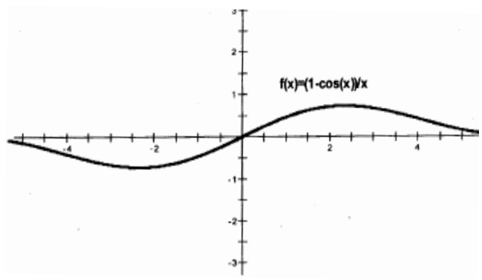


Figura 9.1. Actividad 3

Al pedirles que argumentaran el porqué de sus resultados, la mayoría coincide en que es por la visualización que brinda la representación gráfica (ver figuras 10 y 10.1), fue más simple mirar el límite al que se estaba aproximando que expresar los datos de la tabla, y ésta les resultaba menos fácil de comprender, y hubo algunos que dijeron que fue tanto el uso de la tabla cómo el de la gráfica los que les permitieron emitir el resultado.

ACTIVIDAD 3

I: A continuación te presentamos una tabla donde se le han asignado a *x*, valores próximos a 0, así mismo se han obtenidos los valores en *f(x)*, analiza éstos resultados, y junto con la gráfica de la función, calcula el límite sugerido.

Ejercicio	Tabla de valores	
	x	$f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x}$
	1.0	0.459697694
	0.1	0.049958347
	0.01	0.0049999583
a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$	0.0001	0.00004999
Por que está en la gráfica	↓	↓
	0	?0
	↑	↑
	-0.0001	-0.00004999
	-0.01	-0.0049999583
	-0.1	-0.049958347
	-1.0	-0.459697694

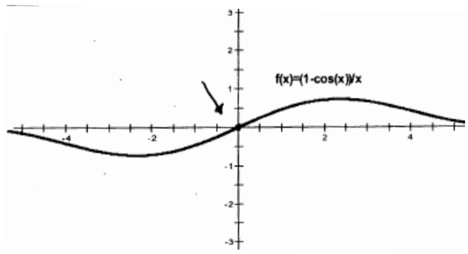


Figura 10. Actividad 3

II: A continuación te presentamos una tabla donde se le han asignado a *x*, valores próximos a 0, así mismo se han obtenidos los valores en *f(x)*, analiza éstos resultados, y junto con la gráfica de la función, calcula el límite sugerido.

Ejercicio	Tabla de valores	
	x	$f(x)=\frac{sen(x)}{x}$
	1.0	0.84147
	0.1	0.99833
	0.01	0.99998
	↓	↓
b) $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$	0	?
Lim=1	↑	↑
Por que así da la gráfica	-0.01	0.99998
	-0.1	0.99833
	-1.0	0.84147

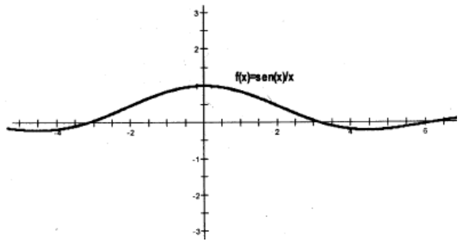


Figura 10.1. Actividad 3

5. Conclusiones

Basados en los datos recogidos de la aplicación de la actividad, podemos afirmar que la propuesta diseñada, sí permitió a los alumnos que participaron en la investigación, visualizar y deducir los límites: $lím_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$ y $lím_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$. Sin embargo, existen aún problemas, que dificultan la total comprensión de éstos resultados; como es el hecho de usar el método de sustitución en donde al evaluar *x*, en *f(x)*, les queda la expresión 0/0, así como también la lectura o interpretación de lo que se les presenta, en este caso nos referimos a las tablas y a las gráficas de las funciones. Lo cual desde nuestra opinión exige, que de ser implementados en clase estos recursos para resolver límites de la forma 0/0, requerirá primero de un trabajo previo tanto con gráficas de funciones como con tablas de aproximaciones, en el cual los alumnos puedan realmente comprender el valor y la finalidad de estos recursos, para posteriormente ser utilizados, con el fin de que en los cursos posteriores los alumnos sean capaces de manejarlos favorablemente al calcular límites.

Bibliografía

Arcavi, A. (1999). The role of visual representations in the learning of mathematic. Educational Studies in Mathematics. *Kluwer Academic Publishers. Netherlands*. 52, 215–241.

Artigue, M.(1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* 33-59. Iberoamérica: Bogotá.

Ayres, F. (1991): *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Mc Graw-Hill.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes des didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Cabezas, C., Trujillo M. y Morales J. (2004). Efectos del Uso de Software de Visualización en las Clases de Cálculo en la Actitud de los Alumnos y en el Rol del Profesor. *Memorias del Taller Internacional de Software Educativo* [en línea]. Recuperado el 15 de diciembre de 2008, de http://www.tise.cl/archivos/tise2004/pp/12.pdf

Chamorro, M. (2006). *Didáctica de las matemáticas.* México: Prentice Hall.

Colegio de: matemáticas. *Programa de estudios de la asignatura de: matemáticas VI. Áreas I y II*. Universidad Nacional Autónoma de México Escuela Nacional Preparatoria.

Coordinación de Educación Media Superior. (2000). *Programas de estudio. Área: Físico-Matemáticas.* Universidad Autónoma de Guerrero.

Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 61-96. Iberoamérica: Bogotá.

Hughes-Hallet, et al. (1995): *Cálculo.* México: CECSA.

Medina, A. (2000). Concepciones históricas asociadas al concepto de Límite e implicaciones didácticas. *Red Académica* [en línea], Recuperado el 15 de diciembre de 2008, de http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted09_08arti.pdf

Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una ingeniería didáctica basada en la visualización de los límites* $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$ y $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN: México.

Patiño, D. (2007). *Estudios de comportamientos análogos de funciones algebraicas y trigonométricas usando transformaciones* gráficas. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero: México.

Programa de matemáticas 4 (Cálculo Diferencial). Nivel Medio Superior. Instituto Politécnico Nacional.

Purcell, E. (1992): *Calculo Diferencial e integral*. México: Prentice-Hall.

Saucedo, R. (2003). Un Estudio De Límite De Funciones Racionales: Formas Indeterminadas 0/0. Recuperado el 16 de diciembre del 2005, de: http://www2.uacj.mx/MatematicasTecnologia/Calculo.htm

Secretaria de docencia. Coordinación general de la escuela preparatoria. *Programa de estudio: Cálculo Diferencial e Integral*. Universidad Autónoma del estado de México.

Secretaría de Educación Pública. Dirección de coordinación académica. *Programa de Estudio: Cálculo diferencial*. Colegio de Bachilleres del Estado de Oaxaca.

Stewart, J. (1998): *Cálculo de una variable.* México: Thomson.

Swokoski, E. (1995): *Cálculo con Geometría analítica*. México: Iberoamérica.

María del Socorro García González, Nació en Santiago Pinotepa Nacional, Oaxaca, México, el día 3 de Abril de 1986. Es licenciada en Matemática Educativa, actualmente es estudiante de la maestría en Ciencias, Área: Matemática Educativa, de la Unidad Académica de matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro).

Catalina Navarro Sandoval, Nació en la ciudad de México, el día 30 de marzo de 1977. Es maestra en Ciencias, en el área de Matemática Educativa por CINVESTAV-IPN, actualmente es profesora de Nivel Superior (Licenciatura y posgrado) de la Unidad Académica de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro).

Anexo (La actividad diseñada)

Actividad Preliminar

I: Argumenta

¿Qué entiendes por el término función?

¿Qué entiendes por el término límite?

¿Cómo definirías el límite de una función?

¿Cómo calculas el límite de una función?

II: Calcula el límite de las siguientes funciones.

a) $\lim\limits_{x\to 2} 3x+1$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen(x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$

Actividad 1

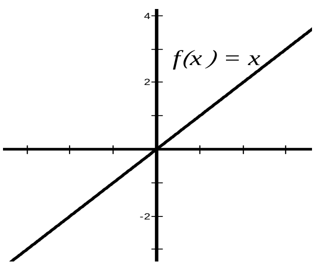
Bloque 1

I: Calcula los siguientes límites y localízalos en cada una de las siguientes representaciones gráficas

a) $\lim\limits_{x\to 0} x$

b) $\lim\limits_{x\to -1} x$

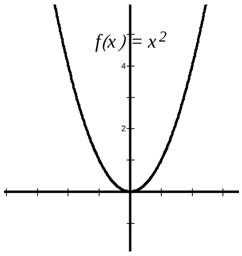
c) $\lim\limits_{x\to 1} x$



d) $lím_{x\to -2} x^2$

e) $lím_{x\to 0} x^2$

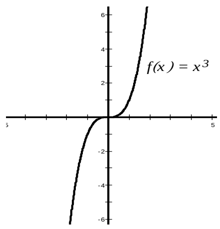
f) $lím_{x\to 2} x^2$



h) $lím_{x\to 0} x^3$

i) $lím_{x\to 1} x^3$

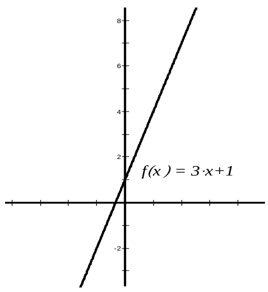
g) $lím_{x\to -1} x^3$



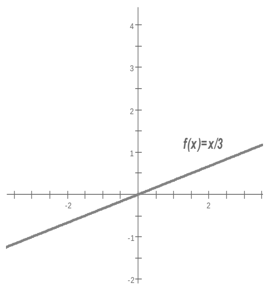
Bloque 2

I: Calcula el límite de las siguientes funciones. Representa tu resultado en cada una de las gráficas presentadas.

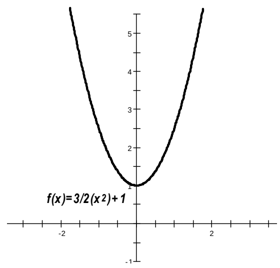
a) $\underset{x\to 2}{lím} 3x+1$



b) $lím_{x\to 2} \frac{x}{3}$



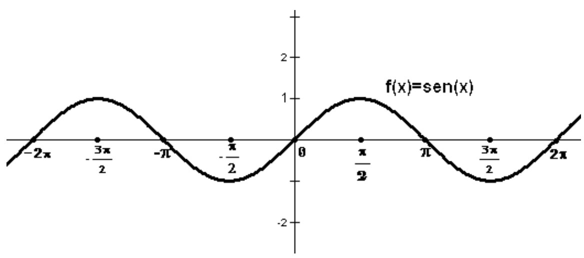
c) $lím_{x\to 2} \frac{3}{2} x^2 + 1$



Actividad 2

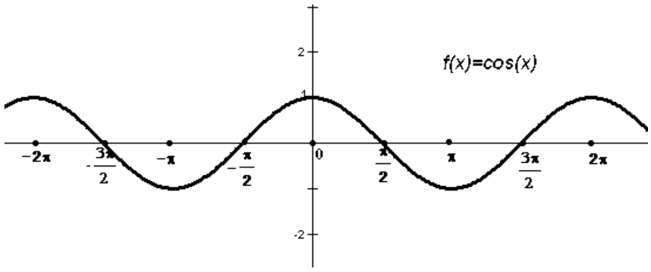
Bloque 1

I: Observa la gráfica de la función *f(x)=sen(x)*, ¿Qué puedes decir del valor de los límites siguientes?



a) $\underset{x\to\pi}{lím}\, sen(x)$ b) $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{lím}\, sen(x)$ c) $\underset{x\to -\pi}{lím}\, sen(x)$ d) $\underset{x\to -\frac{3\pi}{2}}{lím}\, sen(x)$

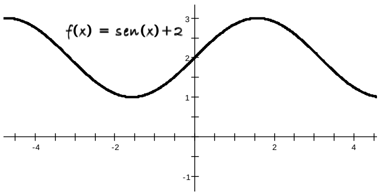
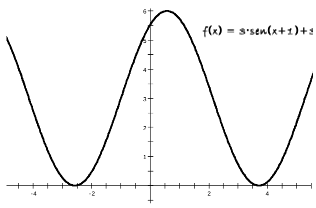
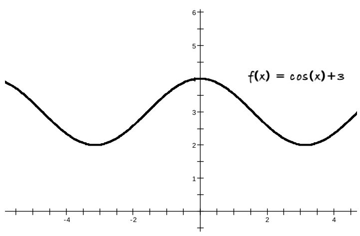
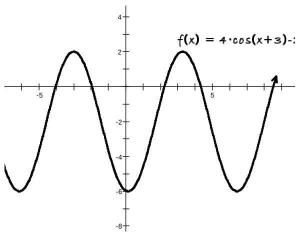
II: Observa la gráfica de la función *f(x)=cos(x)*, ¿Qué puedes decir del valor de los límites siguientes?



a) $\underset{x\to\pi}{lím}\cos(x)$ b) $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{lím}\cos(x)$ c) $\underset{x\to-\pi}{lím}\cos(x)$ d) $\underset{x\to-\frac{3\pi}{2}}{lím}\cos(x)$

Bloque 2

I: Identifica los siguientes límites en la representación gráfica dada.

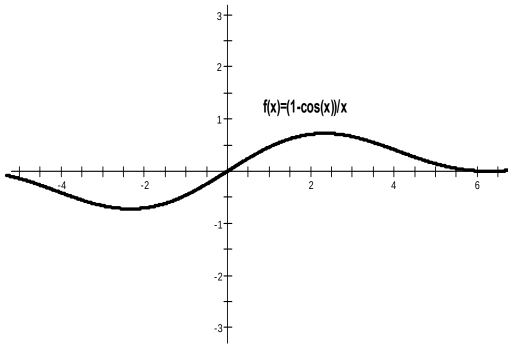
Ejercicios	Gráfica
a) $\underset{x\to 1}{lím}\, sen(x)+2$	
b) $\underset{x\to -3}{lím}\, 3sen(x+1)+3$	
c) $\underset{x\to 0}{lím}\cos(x)+3$	
d) $\underset{x\to 0}{lím}\, 4\cos(x+3)-2$	

Actividad 3

I: A continuación te presentamos una tabla donde se le han asignado a *x*, valores próximos a 0, así mismo se han obtenidos los valores en *f(x),* analiza éstos resultados, y junto con la gráfica de la función, calcula el límite sugerido.

Ejercicio	Tabla de valores	
	x	$f(x)=\frac{1-\cos(x)}{x}$
	1.0	0.459697694
	0.1	0.049958347
	0.01	0.0049999583
	0.0001	0.00004999
a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$	↓	↓
	0	?
	↑	↑
	-0.0001	-0.00004999
	-0.01	-0.0049999583
	-0.1	-0.049958347
	-1.0	-0.459697694

Gráfica



II: A continuación te presentamos una tabla donde se le han asignado a *x*, valores próximos a 0, así mismo se han obtenidos los valores en *f(x),* analiza éstos resultados, y junto con la gráfica de la función, calcula el límite sugerido.

Ejercicio	Tabla de valores	
	x	$f(x)=\frac{sen(x)}{x}$
	1.0	0.84147
	0.1	0.99833
	0.01	0.99998
b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$	↓	↓
	0	?
	↑	↑
	-0.01	0.99998
	-0.1	0.99833
	-1.0	0.84147

Gráfica