NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 75, noviembre de 2010, páginas 143–158

Pesadas sorprendentes, cálculos ingeniosos y muchas tablas

J. A. Rupérez Padrón y M. García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Soluciones a los ejercicios propuestos en el anterior NÚMEROS, con especial incidencia en la metodología de su resolución. Comentarios sobre problemas anteriores. Comentarios de nuestros lectores. Los Torneos de Problemas. Nueva propuesta de problemas de cálculo aritmético para resolver.

Palabras clave Resolución de problemas. Metodología. Estrategias. Organizar la información.

Abstract Solutions to the exercises in the previous NÚMEROS issue, with special emphasis on the methodology of its resolution. Comments on previous problems. Comments from our readers. Tournaments Problem. New proposal of arithmetic problems to solve.

Keywords Solving math problems. Methodology. Strategies. Organize information.

Uno de nuestros lectores, Sergio Alexander Hernández Hernández (Alex para los amigos) nos propone revisitar un problema anteriormente propuesto y parcialmente resuelto por nosotros en el número 73 de la revista NÚMEROS (Problemas Comentados XXIV).

El problema se presentaba así:

Cinco chicos se pesan de dos en dos, de todas las maneras posibles. Los pesos de las parejas son: 90kg, 92kg, 93kg, 94kg, 95kg, 96kg, 97kg, 98kg, 100kg y 101kg.

El peso conjunto de los cinco chicos es:____.

Y nosotros hacíamos las siguientes indicaciones:

> "Hay dos ideas básicas que los alumnos deberán poner en juego:
>
> 1º, cuántas parejas se pueden realizar, para comprobar que los datos del problema están ajustados, y
>
> 2º, que ocurre si sumamos todas las pesadas que forman el conjunto de datos.
>
> A partir de ahí es un sencillo problema aritmético de sumar y dividir."

Pues bien, nuestro amigo Alex nos envía este comentario:

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón**, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y **Manuel García Déniz**, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife). mgarciadeniz@gmail.com / jaruperez@gmail.com

Cinco amigos y una pesa.

Cinco amigos se pesan de dos en dos de todas las formas posibles. Los pesos de las parejas son:

90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100 y 101 kilos. ¿Cuál es el peso del conjunto de los cinco?

I. Comprender:

Durante esta fase enseguida aparecen los datos, y el objetivo ya que están de forma explícita.

Datos: 5 chicos, los pesos: 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100 y 101.

Objetivo: Peso de todos los chicos.

Relación: Se pesan en parejas.

También puede plantearse el objetivo secundario de hallar el peso de cada uno, y en la relación se puede comentar que el peso de la pareja es la suma de cada chico. Aunque lo verdaderamente interesante de esta fase es que tenemos la oportunidad de investigar para ver si los datos son de fiar.

¿Cuántas formas posibles de emparejar cinco chicos hay?

Esta pregunta debe aparecer en esta fase, ya que nos hace introducir combinatoria y obliga a los alumnos a organizar la información.

Representando el peso de cada chico con las letras: A B C D E, las parejas serán:

A B	B C	C D	D E
A C	B D	C E	
A D	B E		
A E			

Hay diez parejas y en el enunciado aparecen diez pesos.

Se pueden calcular de otra forma, siempre que nos aseguremos de que no falte ninguna. Por ejemplo una tabla de doble entrada, sin las casillas repetidas.

II. Pensar:

En este problema parece que organizar la información puede ser un buen planteamiento, ¿cómo organizarla?

En un primer momento hay que hacer un análisis de los datos, observando los diez pesos se puede deducir algo que facilitará la resolución: ninguna cantidad se repite, por tanto ninguno de los cinco chicos pesa lo mismo que otro compañero.

De esta forma podemos suponer que A<B<C<D<E.

Entonces podemos asignar los pesos de cada dos, para ello usemos una tabla de doble entrada sesgada:

+	A	B	C	D	E
A	X	X	X	X	X
B	90	X	X	X	X
C	92	95	X	X	X
D	93	96	98	X	X
E	94	97	100	101	X

A+B=90
A+C=92
A+D=93
A+E=94
B+C=95
B+D=96
B+E=97
C+D=98
C+E=100
D+E=101

Ahora falta resolver este sistema de ecuaciones.

III. Ejecutar:

Como el objetivo es el total de pesos, realizando una suma de todas las ecuaciones nos queda:

A+B+A+C+A+D+A+E+B+C+B+D+B+E+C+D+C+E+D+E=90+92+93+94+95+96+97+98+100+101

4A+4B+4C+4D+4E=956

A+B+C+D+E=239 **La solución es 239kg**

IV. Respuesta:

Antes de dar la respuesta debemos hacer la comprobación, ¿cómo comprobamos que la solución es correcta? Una manera de hacerlo sería asignar el peso a cada chico y comprobar que el total de todos es el calculado. Es decir, aparece la necesidad de seguir investigando y lograr el objetivo secundario que planteábamos al principio.

Volvamos a esas ecuaciones, ¿trabajamos con todas? No, sólo las necesarias, cinco ecuaciones para cinco incógnitas:

A+B=90	B=90-A	93-A+94-A=101	A=43
A+C=92	C=92-A	2A=86	B=47
A+D=93	D=93-A	A=43	C=49
A+E=94	E=94-A		D=50
D+E=101			E=51

Comprobemos la solución: 43+47+49+50+51=240kg

¿Qué ocurre? ¿No da 239 kg?

No hemos hecho ningún cálculo mal, lo que ocurre es que el problema no tiene solución. Aunque al principio todo parecía correcto, lo cierto es que el sistema de ecuaciones inicial es incompatible; sí, nosotros elegimos cinco ecuaciones y no tuvimos problemas pero nuestra solución no cumple todas las ecuaciones, por ejemplo C+D=98.

Hay otra forma de darnos cuenta de que algo fallaba, sin necesidad de trabajar sistemas de ecuaciones; volvamos a mirar la tabla de doble entrada:

+	A	B	C	D	E
A	X	X	X	X	X
B	90	X	X	X	X
C	92	95	X	X	X
D	93	96	98	X	X
E	94	97	100	101	X

Fijémonos en la fila D y E:

93→94 ; 96→97; 98→**100** ¿?

Tendría que ser 99, ya que el peso E es 1 kg mayor que D. Buscando regularidades se puede ver la incongruencia en los datos iniciales.

La respuesta será:

No tiene solución, no existen cinco pesos que al distribuirlos en parejas den los diez valores del enunciado.

Comentarios:

Este problema puede resultar interesante para trabajar en el aula, ya que ayuda a que los alumnos entiendan la utilidad de la comprobación de la solución numérica, ya que esta puede ser errónea como respuesta aunque todos los pasos dados sean correctos. Además, es una solución no válida que no salta a la vista, (como la típica en que es un valor negativo), que sirve también para que ellos vean que al eliminar ecuaciones eliminamos información, a veces importante, y como guinda final se les puede mostrar cómo, si hubieran analizado los datos de entrada con más detalle, se hubieran ahorrado mucho trabajo, lo que sin duda les hará ser más cuidadosos en otras ocasiones.

Como pueden apreciar nuestros lectores no podemos dar nada por supuesto en la resolución de problemas. Lo importante no es la cantidad de problemas que planteemos y resolvamos en clase, sino la calidad del trabajo realizado con nuestros alumnos. Gracias, Alex, por tu contribución.

Y ahora es el momento de presentar las soluciones y comentarios a los problemas planteados en nuestro anterior artículo.

El Mercado de Libros

Susy y Lilly, que han recibido como regalo de sus abuelos 16,20 euros cada uno, los ponen juntos y deciden ir al mercado de los libros y DVDs.

Ese día las ofertas especiales son las siguientes:

- Un DVD al precio de 3,60 euros. Comprando tres, pueden comprar otro a mitad de precio.

- Un libro por el precio de 2,50 euros. Dos libros por el precio de 4 euros.

Antes de regresar a casa Susy y Lilly también deben ir a pagar el juego que tomaron la semana anterior y que cuesta 6,10 euros.

Susy y Lilly gastan todo el dinero recibido de los abuelos.

¿Qué han comprado Susy y Lilly en el mercado?

Explica cómo encontraste la respuesta.

Una vez determinados los datos, el objetivo y la relación entre ambos, de la manera que utilizamos siempre según el proceso de resolución habitual, debemos entender que sólo necesitaremos las operaciones aritméticas elementales (suma, resta y multiplicación) con números decimales sencillos y organizar adecuadamente el trabajo y las condiciones del mismo, de manera sistemática y con la ayuda de un diagrama lógico adecuado.

En primer lugar, nuestras amigas Susy y Lilly pagan el juego que tomaron la semana anterior: 32,40 - 6,10 = 26,30 euros, que es el dinero disponible para la compra y que, además, sabemos que gastarán totalmente.

Una manera de trabajar para distribuir ese dinero en la compra de libros y DVDs puede ser mediante ENSAYO Y ERROR: haciendo una hipótesis sobre el número de DVDs comprados y analizar si la cantidad sobrante puede ser utilizada para comprar libros o no. También se puede proceder al revés, partiendo de la hipótesis de los libros comprados.

Pero organizando la información mediante una tabla será mucho más eficaz el procedimiento. No olvidar la existencia de ofertas cada cierto número de objetos comprados: cada tres DVDs, el siguiente cuesta sólo 3,60 : 2 = 1,80 euros; cada dos libros comprados, el segundo cuesta 4 - 2,50 = 1,50 euros.

En cada caso pararemos al superar la cantidad total disponible para la compra: 26,30 euros.

Nº de objetos	DVD	Oferta 1	Total DVD	Libros	Oferta 2	Total Libros
1	3,60		3,60	2,50		2,50
2	3,60		7,20		1,50	4
3	3,60		10,80	2,50		6,50
4		1,80	12,60		1,50	8
5	3,60		16,20	2,50		10,50
6	3,60		19,80		1,50	12
7	3,60		23,40	2,50		14,50
8		1,80	25,20		1,50	16
9	3,60		28,80	2,50		18,50
10					1,50	20
11				2,50		22,50
12					1,50	24
13				2,50		26,50
14						

Observamos cuatro cosas importantes:

1.- Se puede comprar un máximo de nueve DVDs o un máximo de trece libros, pero en cualquiera de ambos casos no se gasta la totalidad del dinero disponible.

2.- Para gastar los 26,30 euros en su totalidad ha de combinarse el número de DVDs y libros a fin de que las partes decimales de sus costos respectivos se combinen en esa cantidad de 30 céntimos necesaria.

3.- Para combinar 30 céntimos con los enteros de libros sería necesaria una cantidad de DVDs que resultara 30 céntimos en su parte decimal y NO LA HAY.

4.- Para combinar 30 céntimos con los decimales de libros, que son siempre 50 céntimos, sería necesaria una cantidad de DVDs que resultara un cantidad decimal que sumada con 50 céntimos diera como resultado 30 céntimos y eso SÓLO ES POSIBLE con el decimal de 80 céntimos: 0,50 + 0,80 = 1,30.

Las únicas posibilidades se dan con 10,80 y con 19,80. Bastará con encontrar una cantidad en la columna de los totales de los libros que al ser sumada con cualquiera de estas dos dé un resultado de 26,30 y tendremos la solución o soluciones.

10,80 + 14,50 = 25,30 euros ………… resultado corto

10,80 + 18,50 = 29,30 euros ………… resultado largo

19,80 + 6,50 = 26,30 euros …………… resultado correcto

Y leyendo en la tabla vemos que estas cantidades se corresponden con la compra de 6 DVDs (19,80 euros) y de 3 libros (6,50 euros), respectivamente.

Respuesta: **Susy y Lilly han comprado 6 DVDs y 3 libros en el mercado.**

Números para encontrar

Julio examina el número 1313 y observa que:

- si suma sus cuatro cifras obtiene 8 (1 + 3 + 1 + 3 = 8),
- si multiplica sus cuatro cifras obtiene un número impar (1 x 3 x 1 x 3 = 9).

Julio se pregunta cuantos otros números de cuatro cifras tienen 8 como suma de sus cifras y un número impar como producto de esas mismas cifras.

Ayudad a Julio a encontrar la respuesta.

Lo interesante es que los alumnos, a partir de la lectura, interpreten matemáticamente las condiciones. Hacer una pequeña investigación a partir del ejemplo propuesto ayudará a determinar que:

1.- La cifra 0 no puede formar parte de los números, porque la multiplicación de las cuatro cifras daría 0 y no 9.

2.- Las cifras pares (2, 4, 6, 8) no pueden aparecer, porque la multiplicación daría par y no podría nunca ser 9.

3.- Las cifras superiores a 5 no pueden estar, porque la suma sería superior a 8, aunque las otras tres cifras fuesen 1.

Por tanto, bastará con formar todos los grupos de cuatro cifras donde puedan entrar las cifras 1, 3 o 5, con suma 8. Después se obtendrán todas las combinaciones diferentes ente sí de cada grupo de cuatro cifras escritos a partir de las condiciones anteriores.

Con el 5: 5 + 1 + 1 + 1 = 8. Se obtienen cuatro números: 1115, 1151, 1511 y 5111.

Con el 3: 3 + 3 + 1 + 1 = 8. Se obtienen seis números: 1133, 1313, 1331, 3113, 3131, 3311.

Para obtener estas combinaciones sin que falte ninguna, los alumnos habrás de ser sistemáticos y ordenados en su trabajo. Hay que exigirlo.

Respuesta: **Hay nueve números más con esas características, es decir, encontramos los siguientes diez números 1115, 1151, 1511, 5111, 1133, 1313, 1331, 3113, 3131, 3311.**

¡Ay! ¡Tantos exámenes para corregir!

Pedrosa tenía una enorme pila de exámenes para corregir. El lunes, lleno de energía, despachó la mitad de los exámenes. El martes, ya sólo vio un tercio de los que quedaron. El miércoles, corrigió sólo una cuarta parte de los que faltaban. El jueves, ya saturado, vio un quinto de los que tenía pendientes de corregir. El viernes, comprobando que le faltaban menos de dos docenas, decidió poner fin a la tortura y corrigió todo. **¿Cuántos exámenes tenía Pedrosa?**

Tres estrategias diferentes nos pueden llevar a la solución. En las tres hemos de recurrir al lenguaje algebraico para expresar las relaciones.

Organizar la información

Utilizaremos una tabla y partimos de llamar N al número de exámenes:

Día de la semana	Exámenes corregidos	Exámenes pendientes
Lunes	N/2	N – N/2 = N/2
Martes	(1/3) x N/2 = N/6	N/2 – N/6 = N/3
Miércoles	(1/4) x N/3 = N/12	N/3 – N/12 = N/4
Jueves	(1/5) x N/4 = N/20	N/4 – N/20 = N/5
Viernes	N/5	0

Sabemos, por las informaciones del problema, que N/5 es menor que dos docenas, es decir,

$$N/5 < 24, \text{ por tanto } N < 24 \cdot 5,\ N<120.$$

Como N es un número entero, tendrá que ser múltiplo de los denominadores de las diversas fracciones que aparecen a lo largo del proceso: 2, 3, 4, 5, 6, 12 y 20. El menor múltiplo común de este conjunto de números es $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Luego, N es múltiplo de 60 (60, 120, 180,…) pero menor que 120. Sólo es posible N=60.

Eliminación

Como el viernes el número de exámenes por corregir era menor de 24, tenemos que N/5 < 24 osea N < 120. Además, N tiene que ser múltiplo de 5 al tratarse siempre de resultados enteros.

Como el lunes fueron corregidos la mitad de los exámenes, N ha de ser par. Juntando estas informaciones, N es múltiplo de 10. Las posibilidades para N son: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 y 110.

Como el martes los exámenes pendientes de corregir eran N/3, N tiene que ser múltiplo de 3, lo que reduce las posibilidades para: 30, 60 o 90.

El miércoles, los exámenes por corregir eran N/4, luego N es múltiplo de 4. La única posibilidad es, por tanto, 60.

Ir hacia atrás

Sea N el número total de exámenes y x el número de exámenes corregidos el último día, viernes, (x < 24).

Si el jueves corrigió un quinto de los que todavía tenía pendientes, entonces tenía en ese día (5/4)x, porque $4/5 \cdot (5/4)x = x$.

Si el miércoles corrigió un cuarto de los que tenía todavía por corregir, entonces ese día tenía (5/3)x, porque $3/4 \cdot (5/3)x = (5/4)x$.

Si el martes corrigió un tercio de los que tenía aún pendientes, entonces tenía ese día (5/2)x, porque 2/3 · (5/2)x = (5/3)x.

Si el lunes corrigió la mitad de los exámenes, entonces tenía ese día 5x, porque 1/2 · 5x = (5/2)x.

Como x es divisible por 2, por 3 y por 4, entonces $x = 2^2 \cdot 3 = 12$, no admitiendo ningún otro factor ya que x < 24.

Por la última conclusión del proceso de ir hacia atrás, referida al lunes, Pedrosa tenía ese día N = 5x exámenes, o sea, N = 5 · 12 = 60 exámenes.

Se aprecia claramente que la solución es la misma con las tres estrategias utilizadas.

Corrigió: el lunes N/2 = 60/2 = 30; el martes N/6 = 60/6 = 10; el miércoles N/12 = 60/12 = 5; el jueves N/24 = 60/20 = 3; y, finalmente, el viernes N/5 = 60/5 = 12.

Comprobación: 30 + 10 + 5 + 3 + 12 = 60.

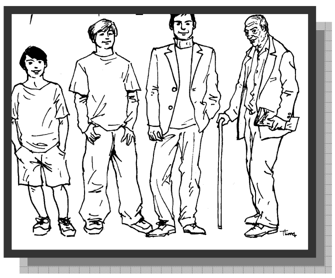
Respuesta: **La tortura de Pedrosa consistió en corregir 60 exámenes (¡Hay quien se queja por nada!). Corrigió 30 el lunes, 10 el martes, 5 el miércoles, 3 el jueves y 12 el viernes.**

¿Vieron los problemas de sucesiones de la página recomendada?

http://personales.upv.es/jlgonz/sucesiones/problemas_de_sucesiones.htm

Se darían cuenta entonces de que el número 10 era el problema de Josefo y que la sucesión del número 9 es similar a la del problema de Pedrosa con agua y un pozo, tratado de forma generalizada para n términos.

Un abuelo longevo



Acabo de cumplir 91 años, dice el abuelo, y esta edad es la diferencia entre el cuadrado del número de nietos que tengo y el cuadrado de las nietas que tengo. ¿Cuántos nietos tengo en total? ¿Cuántas son hembras?

Sea x el número de nietos e y el número de nietas. Entonces: $x^2 - y^2 = 91 = 7 \cdot 13$, así que

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 7 \cdot 13$$

Y al ser x e y números naturales, serán $x + y = 13$ y $x - y = 7$, con lo que resolviendo este sencillo sistema se obtiene:

$$\boldsymbol{x = 10} \quad \textbf{e} \quad \boldsymbol{y = 3.}$$

Por tanto la respuesta es: tiene 13 nietos y de ellos, 3 son nietas.

Y lo podemos comprobar al ver que $10^2 - 3^2 = 100 - 9 = 91$.

El abuelo, ¿chochea?

Le dice el abuelo a su nieto mayor, que ya estudia bachillerato,

- A ver cómo andas de matemáticas: Si alguien dice que invirtiendo el orden de las cifras de su edad, la cantidad disminuye a la mitad, ¿se trata de un niño, un adolescente, un adulto, un viejo como yo, o simplemente es un mentiroso?

Si esa persona no ha cumplido los 100 años, podemos indicar las dos cifras de su edad con *x* e *y*, siendo *x* las decenas e *y* las unidades.

Luego, al invertir el orden de las cifras:

$$10y + x = (10x + y)/2;\ 10y + x = 5x + y/2;\ 20y - y = 10x - 2x;$$

Por tanto: $19y = 8x$

Pero por otro lado, *x* es inferior a *10y;* no puede igualarse a *19.*

Si ya pasó de los 100 años, su edad tiene que terminar en cero, para que al invertir las cifras se lea como un número menor que 100; es decir: 100, 110, 120…; pero ni 1, ni 11, ni un número que termine en 1 será mitad de estas edades más que centenarias.

Por tanto el abuelo está hablando de un mentiroso. ¡O le falla la azotea y chochea!

La Sociedad Canaria “Isaac Newton” de Profesores de Matemáticas sigue fiel a sus actividades y realizó el XXVI Torneo de Problemas de Secundaria, en sus dos fases habituales. Toda la información sobre el mismo se encuentra como de costumbre en su sitio web y, de manera especial, recomendamos visitar y bajar la página que contiene los problemas propuestos.

http://www.sinewton.org/cms/images/torneo/torneo26/torneo26problemas.pdf

También se realizó el IV Torneo de Problemas de Primaria. De igual forma la información en el sitio web y los problemas propuestos en la página:

http://www.sinewton.org/cms/images/torneoprim/torneoprim4/torneoprim4problemas.pdf

Los problemas de ambos Torneos son muy interesantes, pero queremos llamar la atención sobre uno del Torneo de Secundaria que no fue resuelto correctamente por ninguno de los alumnos presentados. Sólo hubo una media docena de ellos que lo acometieron y dieron con algunos aciertos parciales. Pero el 98% de los alumnos lo dejaron en blanco. La mayoría no explicaban siquiera por qué lo descartaban; pero hubo bastantes que indicaban su imposibilidad de acometerlo porque “***no sé lo que es un paralelepípedo***”.

Se trata de alumnos que cursan 2º de Educación Secundaria Obligatoria, que han cursado seis años de Primaria y dos de Secundaria. Y no se trata de alumnos cualesquiera, no; son alumnos seleccionados por sus profesores, dos por aula, por su buen rendimiento en matemática y, especialmente en la resolución de problemas.

¿Qué estamos haciendo con la geometría?

Creemos que es bueno considerar la situación y tratar de enmendar ese empeño en realizar una enseñanza fundamentalmente aritmética y algebraica, relegando la geometría para los últimos días (a veces ni eso). La geometría es estimulante y educadora, proporciona un desarrollo fuerte de las competencias básicas y, para los alumnos, es altamente gratificante.

Veamos el problema en cuestión.

Cubos escondidos

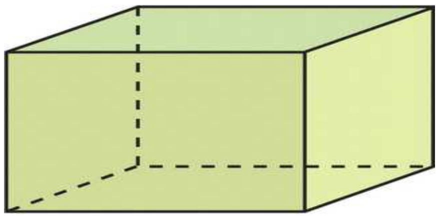
Julia tiene 86 cubos blancos y 34 negros todos de las mismas dimensiones. Usando todos sus cubos Julia construye un paralelepípedo rectángulo.

Puesto que los cubos negros no le gustan, los coloca de manera que no se vean cuando el paralelepípedo está apoyado sobre su escritorio de madera.

¿Cuáles pueden ser las dimensiones del paralelepípedo que Julia construye usando todos sus cubos**?**

Halla todas las posibilidades.

Con un poco de aritmética, multiplicación y descomposición en factores, y algo de geometría, paralelepípedo rectángulo, volumen y caras laterales, tenemos para salir airosos.



Al leer el enunciado, se debe comprender que la construcción deberá estar compuesta de 86+34=120 cubos y que hay varias posibilidades para las dimensiones del paralelepípedo: las ternas de números naturales cuyo producto es 120, es decir, desde 1x1x120 hasta 4x5x6.

Si el paralelepípedo está apoyado, los cubos del interior del piso base no son visibles, mientras que sí lo son los situados en el piso superior y los situados en las caras laterales.

El número de cubos no visibles debe ser mayor o igual a 34 y depende de la cara que se piensa apoyar sobre el escritorio. Depende por tanto del número de cubos de altura.

Si se quieren «esconder» los cubos negros, el paralelepípedo debe tener al menos 2 cubos de altura y al menos 3 cubos para las otras dos dimensiones.

Debemos escribir una colección completa de las construcciones posibles, con todas las ternas que tengan valores mayores o iguales que 2 para una de las dimensiones (la altura) y mayores que 2 para cada una de las otras dos dimensiones: 2 x 3 x 20; 2 x 4 x 15; 2 x 5 x 12; 2 x 6 x 10; 3 x 4 x 10; 3 x 5 x 8; 4 x 5 x 6. Cada terna se podrá repetir tantas veces como pares de valores mayores de 2 diferentes se puedan obtener para formar la base, siendo la tercera dimensión la altura. Esto sólo es posible con las tres últimas, no con las cuatro primeras.

Se calculará, para cada paralelepípedo, el número de cubos no visibles, según la altura elegida, $(a - 2) \times (b - 2) \times (h - 1)$, donde a y b son las dimensiones de la base y h la altura del paralelepípedo. Si el número de cubos ocultos es igual o superior a 34 será una solución válida.

Organizar toda esta información requiere el uso de una tabla.

Dimensiones del paralelepípedo total	Altura	Dimensiones del paralelepípedo interior no visible	Número de cubos ocultos
2 x 3 x 20	2	1 x 1 x 18	18
2 x 4 x 15	2	1 x 2 x 13	26
2 x 5 x 12	2	1 x 3 x 10	30
2 x 6 x 10	2	1 x 4 x 8	32
3 x 4 x 10	3	2 x 2 x 8	32
3 x 4 x 10	4	1 x 3 x 8	24
3 x 4 x 10	10	1 x 2 x 9	18
3 x 5 x 8	**3**	**2 x 3 x 6**	**36 > 34**
3 x 5 x 8	5	1 x 4 x 6	24
3 x 5 x 8	8	1 x 3 x 7	21
4 x 5 x 6	**4**	**3 x 3 x 4**	**36 > 34**
4 x 5 x 6	5	2 x 4 x 4	32
4 x 5 x 6	6	2 x 3 x 5	30

Observamos que hay sólo dos disposiciones que permiten esconder todos los cubos negros.

Respuesta:

A) el paralelepípedo con 3 cubos de altura y 5 y 8 para las otras dos dimensiones

B) el paralelepípedo con 4 cubos de altura y 5 y 6 para las otras dos dimensiones

Vamos ahora a proponerles trabajar un tipo de problemas que se encuentran en los cuadernillos de pasatiempos que venden en los quioscos y también en las páginas de pasatiempos de los periódicos. Son problemas sencillos de contenido aritmético, fundamentalmente operatorio y que se resuelven, casi siempre, por ensayo y error. Son interesantes siempre que exijamos a nuestros alumnos a utilizar el ENSAYO Y ERROR DIRIGIDO, para poner en juego las propiedades de las operaciones utilizadas y el razonamiento lógico. Deben buscarse todas las soluciones posibles o, al menos, estar absolutamente seguros de que la solución encontrada es única. Para ello hay que ser muy ordenado, organizado, sistemático y exhaustivo. ¿Qué más queremos exigir?

Veamos uno de ejemplo.

Del 1 al 9

Coloca los números del 1 al 9 en cada cuadrícula, sin repetir ni saltarte ninguno, de manera que al sumar las líneas horizontales y verticales sean iguales a los números dados. *Tabla I.*

			11
		8	**13**
			21
13	**14**	**18**	I

Resolvemos:

Debemos siempre iniciar el trabajo en la columna o fila a la que pertenezca el valor conocido. En este caso elegimos la fila. Como el valor conocido es 8 y la suma ha de valer 13, está claro que la suma de los otros dos valores es 5. Sólo es posible obtener 5 como suma de 4 + 1 o de 2 + 3. Es cuestión de probar ambas parejas, pero, además, en ese orden y también en el contrario. Empecemos con la primera pareja. *Tabla II.*

			11
4	1	8	13
			21
13	14	18	II

Ahora nos fijamos en la columna del 8 (tercera columna). Como la suma ha de ser 18, la pareja de números que faltan tienen que ser 9 y 1, 8 y 2, 7 y 3 o 6 y 4 (números distintos).

Pero alguno de ellos ya está siendo utilizado (el 1, el 4 y el 8) por lo que esas parejas que los contienen han de eliminarse. Sólo nos queda la pareja 7 + 3, que podemos utilizar en ese sentido o en el contrario. En cualquiera de los dos casos los únicos números que quedan por colocar son el 2, el 5, el 6 y el 9.

Si el 7 está en la tercera fila, podremos colocar en ella el 5 y el 9 ocupando los espacios vacíos. Evidentemente tendría que ser en ese orden y no en el contrario, pues 9 + 4 = 13 y el 0 no se puede colocar. *Tabla III.* Colocando los dos números restantes en los cuadros vacíos, vemos que no cuadran ninguna de las tres sumas restantes, las de resultado 11 (primera fila), 13 (primera columna) y 14 (segunda columna).

		3	11
4	1	8	13
5	9	7	21
13	14	18	III

Por lo tanto, no tenemos solución.

Lo mismo sucede cuando está el 3 en la tercera fila. Observamos que con los números que quedan (2, 5, 6 y 9) no se puede sumar 21 en la tercera fila. Tampoco tenemos solución.

Y si cambiamos el orden de la pareja 4 y 1, vamos a tener de nuevo, con un razonamiento similar, la misma conclusión: no hay solución.

		3	11
1	4	8	13
9	5	7	21
13	14	18	IV

Encárguese, querido lector, de comprobarlo usted mismo con unas tablas similares a las utilizadas anteriormente. Llegaríamos a una situación como la de la *Tabla IV.* Donde, en cualquier caso, al colocar la pareja que falta 2 + 6 no se obtienen valores correctos en ninguna de las diferentes opciones.

Hemos de probar ahora la otra pareja, 2 y 3, para la segunda fila. Primero en ese orden. *Tabla V.*

		6	11
3	2	8	13
		4	21
13	14	18	V

De nuevo nos fijamos en la columna del 8 (tercera columna). Como la suma ha de ser 18, la pareja de números que faltan tienen que ser 9 y 1, 8 y 2, 7 y 3 o 6 y 4 (números distintos). Pero alguno de ellos ya está siendo utilizado (el 1, el 3 y el 8) por lo que esas parejas que los contienen han de eliminarse.

Esta vez nos quedan dos parejas, la 9 + 1 y la 6 + 4, que podemos utilizar en ese sentido o en el contrario. Colocada la pareja 1 + 9, con el 1 en tercera fila, quedan por colocar el 4, el 5, el 6 y el 7. Es imposible completar 21 en la tercera fila con esos números. No hay solución.

Con el 9 en tercera fila, se pueden colocar 5 y 7 (en ese orden o en el contrario) en ella para completarla y sumar 21 (en ambos caso). *Tablas VI y VII*

4	6	1	11
2	3	8	13
7	5	9	21
13	14	18	VI

6	4	1	11
2	3	8	13
5	7	9	21
13	14	18	VII

El lector deberá ahora comprobar, con el mismo procedimiento, que con la pareja 6 y 4 en tercera columna (en cualquier orden), y quedando por colocar los números 1, 5, 7 y 9, no es posible completar los 21 de la tercera fila. No hay solución para este caso.

Toca probar ahora invirtiendo la pareja 2 y 3 en segunda fila. Con la pareja 1 + 9 en tercera columna, no hay solución si el 1 está abajo. Compruébelo, una vez más el lector.

Si el 9 está abajo: 5 + 7 + 9 = 21 sí hay solución. Pero ni colocándolas en ese orden ni en el contrario, encontramos solución para colocar las dos cifras restantes, 4 y 6.

Ahora queda por probar con 3 y 2 en segunda fila y con 6 y 4 en tercera columna.

En cualquiera de los órdenes posibles, con los números que quedan por colocar (el 1, el 5, el 7 y el 9) no se puede cuadrar la tercera fila. No hay solución. Nuestro sufrido lector puede, una vez más, comprobarlo.

Respuesta:

Sólo hemos encontrado estas dos soluciones:

6	**4**	**1**	**11**
2	**3**	**8**	**13**
5	**7**	**9**	**21**
13	**14**	**18**	

4	**6**	**1**	**11**
2	**3**	**8**	**13**
7	**5**	**9**	**21**
13	**14**	**18**	

Y, además, el proceso exhaustivo utilizado nos hace estar completamente seguros de que son las únicas posibles. Y ambas son correctas. Basta con comprobar que están todos los dígitos del 1 al 9, sin repetir, y ejecutar las seis sumas correspondientes a las tres filas y las tres columnas y verificar que todas son correctas.

Otra manera de abordar la solución del problema, con alumnos algo mayores ya que no está tan detallada, es la siguiente:

A	B	C	**11**
F	G	H	**21**
D	E	**8**	**13**
13	**14**	**18**	

Ponemos letras en las celdas vacías e intercambiamos las filas 2ª y 3ª para simplificar el cuadro.

Y puesto que en la tercera línea es donde tenemos más información, comenzamos analizando por ahí el problema.

D + E deben sumar 5, mientras que C + H deben sumar 10.

Los pares posibles son para el (D, E): (4, 1); (1, 4); (3, 2) y (2, 3), y para el (E, H): (9, 1); (1, 9); (7, 3) y (3, 7). No consideramos los pares (8, 2) y (2, 8) por estar ya usado el 8.

Simultáneamente sólo pueden coexistir (4, 1) ó (1, 4) con (7, 3) ó (3, 7) pues son incompatibles, por repetirse el valor 1 o el 3, las otras parejas posibles; y los pares (3, 2) ó (2, 3) con (9, 1) ó (1, 9).

Continuemos analizando este último caso.

Si D + E = 3 + 2 y C + H = 9 + 1, veamos qué valores toman A y B con respecto a los posibles valores de C, estando los tres en la misma fila y donde no influyen los valores de D ni de E. En la siguiente tabla, que creemos no necesita más explicaciones, queda esquematizado el análisis.

C	A + B	A	B	A	B
9	2	No puede ser			
1	10	~~9~~	~~1~~	Valor ya usado	
		~~8~~	~~2~~	Valor ya usado	
		~~7~~	~~3~~	Valor ya usado	
		6	4	4	6

Así pues, para D + E = 3 + 2 y C + H = 9 + 1, en cualquier orden que se tomen, el único resultado posible es: A = 6 y B = 4 ó A = 4 y B = 6.

Veamos que ocurre en la segunda línea donde F + G + H = 21, para los dos valores de H:

H	F + G	F	G	F	G
9	12	~~9~~	~~3~~	No es posible	
		~~8~~	~~4~~	No es posible	
		7	5	5	7
1	20	No puede ser			

Por tanto son los valores 5 y 7 los únicos que puede tomar. Comprobemos los resultados en la tabla. Primero para A = 6 y B = 4:

6 4 1 5 7 9 D = 3 (2) ——— = 14 (No vale)	6 4 1 5 7 9 D = 2 (3) ——— =13 14 (¡Vale!)	6 4 1 7 5 9 D = 3 ——— = 16 (No vale)	6 4 1 7 5 9 D = 2 ——— = 15 (No vale)

Ahora para A = 4 y B = 6:

4 6 1 5 7 9 D = 3 (2) ——— = 12 (No vale)	4 6 1 5 7 9 D = 2 (3) ——— =11 (No vale)	4 6 1 7 5 9 D = 3 (2) ——— = 14 (No vale)	4 6 1 7 5 9 D = 2 (3) ——— = 13 =14 (¡Vale!)

Tenemos dos conjuntos de soluciones:

A	B	C	D	E	F	G	H
6	4	1	2	3	5	7	9
4	6	1	2	3	7	5	9

Analizar el otro caso, donde D + E = 4 + 1 y C + H = 7 + 3, como antes, cualquiera que sea el orden en que se tomen los sumandos, lo dejamos como ejercicio para nuestros lectores. Encontrarán que no hay más soluciones.

Proponemos, para resolver, los siguientes. Los veremos detalladamente en el próximo artículo.

Del 1 al 9

Coloca los números del 1 al 9 en cada cuadrícula, sin repetir ni saltarte ninguno, de manera que al sumar las líneas horizontales y verticales los resultados sean iguales a los números dados en las casillas amarillas.

	5		14
			16
			15
12	20	13	

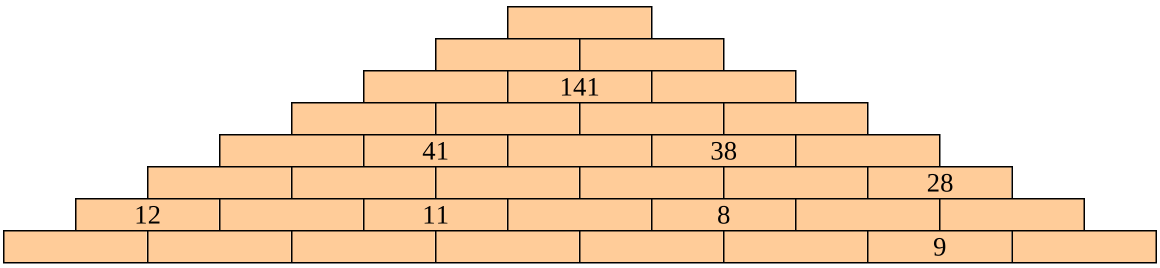
Calculogramas

Añade los números del 1 al 9 de forma que las equivalencias sean correctas. Te damos un número para hacértelo más fácil.

	x		+		19
-		x		-	
	:	4	+		5
+		x		+	
	+		+		14
3		8		13	

Pirámide numérica

Completa la pirámide colocando un número (de uno o más dígitos) en cada casilla de manera que cada uno dé la suma de los dos inferiores. Ya están colocados algunos números.



Y aquí queda todo por ahora. Pero insistimos, hagan como el amigo Alex y ésta será una sección muy viva de la revista. Leer el artículo está bien; usarlo con los alumnos es fantástico. Pero aportar comentarios, soluciones, propuestas o simplemente el rico anecdotario acerca del comportamiento de la clase al resolver uno de estos problemas es realmente maravilloso. Anímense.

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**