NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 76, marzo de 2011, páginas 83–103

Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV

José Antonio Juárez López (Centro de Investigación en Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Guerrero, México)

Fecha de recepción: 9 de marzo de 2010
Fecha de aceptación: 8 de junio de 2010

Resumen En este artículo se presentan los resultados de una investigación que tiene como propósito analizar la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria. Se pretendió detectar cuáles son las dificultades más comunes que presentan los profesores al tratar con los diferentes usos de la variable en el álgebra elemental. Para ello se aplicó un cuestionario de álgebra elemental a 74 profesores de matemáticas de secundaria. El Modelo 3UV sirvió como marco teórico de este estudio.

Palabras clave Profesores de matemáticas, álgebra elemental, Modelo 3UV, variable, dificultades.

Abstract In this article we present the results of an investigation that takes as an intention to analyze the interpretation of the concept of variable in teachers of mathematics of secondary. It was tried to detect what are the most common difficulties that the teachers present on having treated with the different uses of the variable in the elementary algebra. For it a questionnaire of elementary algebra was applied to 74 teachers of mathematics of secondary. The Model 3UV served as theoretical frame of this study.

Keywords Teachers of Mathematics, elementary algebra, Model 3UV, variable, difficulties.

1. Introducción

Gran parte de los estudios que se han realizado en torno a la interpretación del concepto de variable se ha centrado en estudiantes de secundaria (Booth, 1988; Stacey y MacGregor, 1996; Warren, 1999). También se conocen resultados de investigaciones realizadas con estudiantes de bachillerato (López, 1996) e incluso, se ha estudiado la evolución que tiene el uso eficiente de dicho concepto a lo largo de las etapas escolares que van desde el primer grado de secundaria hasta el primer semestre universitario (Lozano, 1998; Trigueros y Ursini, 1999; Trigueros, Ursni y Lozano, 2000). En otro estudio realizado con estudiantes universitarios que iniciaban el primer semestre de su carrera (Ursini y Trigueros, 1998) se encontró que el aprendizaje del concepto de variable es poco significativo, lo que se reflejó en las dificultades que presentaron los estudiantes para resolver problemas que involucraban dicho concepto. Más recientemente se encontró que estudiantes universitarios que habían llevado cursos de matemáticas avanzadas siguen teniendo dificultades para manejar este concepto, llegando a evitar cualquier acercamiento algebraico y retornando a procedimientos de carácter aritmético (Ursini y Trigueros, 2006).

El propósito del presente trabajo es tratar de explorar en la interpretación que tiene el profesor de matemáticas en torno al concepto de variable y los diferentes usos en el álgebra elemental. Se pretende también detectar cuáles son las dificultades que presentan dichos profesores al tratar con los diferentes usos de la variable, así como observar si son capaces de diferenciar entre ellos y pasar de uno a otro de manera flexible.

No obstante, las investigaciones realizadas hasta el momento sobre la interpretación del concepto de variable no han sido suficientes para poder dilucidar la problemática de su aprendizaje dentro del álgebra elemental en la que, sin duda, este concepto juega un papel preponderante. En particular, no existen hasta ahora estudios que indaguen las posibles dificultades que tienen los profesores de matemáticas de secundaria en torno al concepto de variable.

Para llevar a cabo esta investigación se utilizó una metodología que combina un acercamiento cuantitativo con uno cualitativo. Inicialmente se aplicó un cuestionario de 65 preguntas abiertas a una población de 74 profesores de matemáticas de secundaria en México, (D. F. y Puebla). Posteriormente se realizaron entrevistas clínicas a 6 de ellos con la finalidad de profundizar en la comprensión y las dificultades de los maestros en torno a dicho concepto, tomando como base las respuestas dadas al cuestionario.

2. Referentes teóricos y empíricos

En este apartado se discuten los resultados de algunas investigaciones en torno al concepto de variable y sus diferentes usos en el álgebra elemental. Estos usos se refieren esencialmente a la variable como incógnita específica, como número general y en relación funcional. Se comenta también acerca de algunos errores que aparecen cuando los estudiantes manejan el álgebra. Asimismo se mencionan algunos estudios realizados con profesores de matemáticas tanto en servicio como en formación y que se refieren tanto a la conceptualización y estructura de sus creencias sobre la enseñanza de la matemática así como a las que tienen sobre el desarrollo del razonamiento algebraico. Finalmente se presenta la descomposición del concepto de variable que conforma el marco teórico de este estudio.

2.1 El concepto de variable y sus diversas interpretaciones

Tal como mencionan Schoenfeld y Arcavi (1988), el tratar de definir el término “variable” con una sola palabra nos conduce a usar palabras como: símbolo, parámetro, argumento, espacio vacío, entre otras, de ahí que consideren que este término tiene diversos significados que dependen del contexto en el que aparece. Otros investigadores también han subrayado la importancia que tiene el contexto en el papel que juegan las letras cuando los estudiantes usan el álgebra elemental (Kieran, 2006; Philipp, 1992; Wagner, 1981). Esta última autora, por ejemplo, sugiere que así como las palabras del lenguaje verbal, los símbolos de variables matemáticas adquieren significado cuando aparecen en algún contexto y tienen algún referente. Tal como en el lenguaje verbal, el símbolo y su referente determinan el papel semántico de la variable, mientras que el símbolo y su contexto determinan el papel sintáctico de la variable; esto quiere decir que el contexto y el referente determinan el papel matemático de la variable. Wagner (1983), por otro lado, comenta la complejidad que tiene el uso de literales así como la dificultad que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a ellos. El concepto de variable es fundamental no sólo para el aprendizaje sino también para la enseñanza del álgebra. En el salón de clase se suele presentar como si pudiera entenderse fácilmente llegando, incluso, a manejarlo con cierta naturalidad, sin valorar la complejidad del concepto ni los significados y usos que pueden tener las letras. En este sentido, Rosnick (1981) realizó un estudio acerca de las concepciones erróneas sobre el uso de letras que presentaron algunos estudiantes de nivel superior y encontró que cuando se les presentan relaciones funcionales en forma analítica, tienden a confundirse entre la variable independiente y la variable dependiente. El concepto de variable es multifacético e incluye diversos aspectos. Usiskin (1988), por ejemplo, pone de manifiesto cuatro usos diferentes de la variable y los asocia a cuatro distintas concepciones del álgebra haciendo énfasis en la relación de éstas con los propósitos de la enseñanza del álgebra elemental. Dichos usos aparecen en la Tabla 1.

Concepción del álgebra	Usos de la variable
Aritmética generalizada	Generalizadores de patrones
Procedimientos para resolver problemas	Incógnitas, constantes
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos, parámetros
Estudio de estructuras	Marcas arbitrarias en el papel

Tabla 1. Diversas concepciones del álgebra y sus distintos usos

(Usiskin, 1988, p. 17)

Por otra parte, Ursini (1994) considera que en el álgebra elemental aparecen esencialmente 3 usos de la variable: incógnita específica, número general y en relación funcional. Señala también que un usuario competente del álgebra es capaz de interpretar la variable de modos distintos dependiendo del problema en el que aparece. Esto significa que, por ejemplo, a pesar de que las siguientes expresiones involucran el mismo símbolo literal:

$$(x+2)(x+3) \qquad\qquad (x+2)+(x+3)=24$$

el uso que se hace de éste en cada una es distinto, pues mientras en la primera expresión la letra representa un número general, en la segunda representa un valor específico y están dadas las condiciones para determinar dicho valor. Además, la misma autora señala que un usuario competente debe ser capaz de manipular las variables simbólicas sin necesidad de conocer su valor eventual. Esto quiere decir, por ejemplo, que debe poder simplificar una expresión algebraica como:

$$(2xy+3x)-(4xy-2)$$

También debe ser capaz de trabajar con la idea de correspondencia y variación cuando las variables se encuentran en una relación funcional. Por ejemplo, debe ser capaz de resolver el siguiente problema:

Dada $y = 3x + 2$, encuentra el valor de y cuando x toma valores en el intervalo $-2 \le x \le 10$

Un usuario competente debe poder también identificar la incógnita y determinar su valor específico, por ejemplo, en una ecuación:

$$3(x+2)=2(x+1)$$

Asimismo, el usuario competente debe poder reconocer y expresar simbólicamente patrones de secuencias numéricas y de figuras.

Ejemplo: Completa la siguiente sucesión y encuentra el *n-ésimo* término.

2, 7, 12, 17, 22, ___, ___, ___, . . .

n-ésimo término: __________

Observa las siguientes figuras y contesta lo que se pide:

			*
		*	* *
	*	* *	* * *
*	* *	* * *	* * * *
1	2	3	4

¿Cuántas estrellas tendrá la figura 5?
Expresa el *n-ésimo* número triangular como una regla general.

El no reconocer que la variable tiene distintos usos puede representar un obstáculo para aprender álgebra. En matemáticas se usan generalmente las mismas letras para representar distintos usos de la variable. Por ejemplo, en la ecuación $x+3=3x-5$ y en la expresión $y=3x-5$ se ha utilizado un mismo símbolo, *x*, para dos usos de la variable, como incógnita específica y en una relación funcional, respectivamente. Asimismo se usan letras distintas para representar un mismo uso de la variable, como podemos observar en las ecuaciones siguientes:

$$5(x-3)=2(x+1) \qquad \text{y} \qquad 5(m-3)=2(m+1)$$

Es muy común que los estudiantes de secundaria y bachillerato cometan errores al trabajar con el álgebra elemental. Matz (1980) sugiere que hay errores que aparecen de manera regular y plantea un modelo de competencia algebraica que pueda explicar por qué se dan dichos errores. Algunos ejemplos de estos errores se muestran a continuación:

1. Simplificando $3xy+4yz$ como $7xyz$
2. Simplificando $\dfrac{x}{2x+y}$ como $\dfrac{1}{2+y}$
3. Resolver para x, la ecuación $2x+5=11$ Respuesta incorrecta típica: $x+5=\dfrac{11}{2}$
4. Simplificando $\dfrac{Ax+By}{x+y}$ como A + B

Existen también importantes resultados de investigaciones sobre la manera en que los alumnos interpretan los símbolos literales. Así, Küchemann (1980) analizó las respuestas que más de 3000 estudiantes entre 13 y 15 años dieron a un cuestionario que implicaba el uso de los símbolos literales. Para contestar el cuestionario los alumnos debían interpretar y manipular expresiones algebraicas. “Este investigador identificó seis maneras diferentes de interpretar los símbolos literales:

1) Letra evaluada: A la letra se le asigna un valor numérico.
2) Letra no utilizada: La letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado.

3) Letra como objeto: Se considera la letra como una abreviatura del nombre de un objeto o como a un objeto en sí.
4) Letra como incógnita específica: La letra representa un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.
5) Letra como número generalizado: Se considera que la letra representa o es capaz de asumir distintos valores.
6) Letra como variable**:** Se considera que la letra representa un rango de valores no especificado y que existe una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo."

(Küchemann, 1980, p. 49)

Según este autor, estos resultados revelan esencialmente dos niveles de comprensión de los alumnos: el primero abarca las tres primeras categorías y refleja un bajo nivel de respuesta, mientras que las tres categorías restantes indican que el alumno se está acercando al álgebra. Aunque este autor propone un orden de dificultad creciente para las 6 categorías encontradas, Ursini (1994) considera que estas categorías no implican que tal orden sea recomendable para la enseñanza, pues los distintos usos de la variable pueden ser enseñados en diferentes niveles de complejidad.

En otra investigación (Lozano, 1998), se han encontrado resultados poco alentadores acerca de cómo progresa la comprensión del concepto de variable a lo largo de la enseñanza media. Se estudió la comprensión de los distintos usos de la variable que tienen alumnos de secundaria, bachillerato y estudiantes de primer semestre universitario y se observó que el grupo de primero de secundaria, que no había tenido aún una introducción formal al álgebra obtuvo una puntuación mayor de aciertos en promedio que el grupo de estudiantes recién ingresados a la universidad.

En otro trabajo donde se estudió una población de alumnos de bachillerato (López, 1996), se encontró que la mayoría de los estudiantes tienen un bajo desempeño en el manejo de la variable y que, en términos generales, los alumnos se encuentran en un nivel inferior al 50% del manejo adecuado de la variable.

Se han realizado estudios con estudiantes universitarios (Trigueros et al, 1996; Ursini y Trigueros, 1997; 1998), donde se observó que el aprendizaje del concepto de variable a través de su paso por el sistema escolar es poco significativo y se encontró, además, un anclaje a nivel de acción. En cuanto al manejo de la variable como incógnita específica, como número general y en relación funcional se encontró que los estudiantes sólo alcanzaron un nivel elemental en su manejo, permaneciendo atados a acercamientos aritméticos.

La mayoría de los estudios, sin embargo, suelen centrarse sobre un uso específico de la variable, analizando errores y dificultades que los alumnos presentan y en ocasiones, proponiendo acercamientos para superarlos. Así, ha habido estudios enfocados hacia los procesos de generalización en álgebra elemental (Ursini, 1990); el reconocimiento y la exploración de patrones numéricos y visuales (English y Warren, 1998; MacGregor y Stacey, 1993; Mason et al, 1985; Philipp y Schappelle, 1999), así como hacia la correlación entre el concepto de variable y los procesos de generalización en patrones y tablas (Warren, 1995). Todos sin duda han contribuido al esclarecimiento de la comprensión de la variable como número general.

También han aparecido numerosas investigaciones que han abordado la problemática del uso de la incógnita específica, (Filloy y Rojano, 1989; Kieran, 1984; MacGregor y Stacey, 1996; Stacey y MacGregor, 1997b). Asimismo se ha estudiado la comprensión del concepto de función (Dreyfus y Eisenberg, 1981). También se ha investigado acerca de algunas concepciones erróneas que ocurren cuando estudiantes de nivel superior se enfrentan al uso de letras en expresiones donde aparece una relación funcional (Rosnick, 1981). En estudios más recientes se ha encontrado que al enfatizar el estudio de relaciones funcionales en tareas de exploración e investigación, se favorece el desarrollo del significado para el lenguaje algebraico así como la construcción de una visión más amplia sobre el uso de los símbolos (Matos y Da Ponte, 2008)

Asimismo, se ha tratado de estudiar los orígenes de la interpretación que hacen los estudiantes de la notación algebraica. Así, por ejemplo, hay quienes argumentan que dicho origen se encuentra en las analogías que hacen los alumnos con otros sistemas de símbolos, en la interferencia con nuevos aprendizajes en matemáticas (Stacey y MacGregor, 1997a), así como en los efectos del uso inadecuado de materiales de enseñanza (Stacey y MacGregor, 1996).

En lo que se refiere a estudios realizados con profesores de matemáticas de secundaria, Juárez (2002) encontró que los profesores de matemáticas de secundaria mostraron serias dificultades para conceptualizar la variable en cada uno de sus usos, siendo en relación funcional el uso de las variables en donde se hallaron más errores. Por otro lado, existen trabajos que se refieren a las creencias que tienen tanto los profesores de matemáticas como los investigadores educativos sobre el desarrollo del razonamiento algebraico, así como sobre las estrategias en la resolución de problemas que los estudiantes presentan (Nathan y Koedinger, 2000). En este sentido, Cooney, Shealy, y Arvold, (1998) por ejemplo, analizaron la importancia que tiene la estructura de las creencias sobre la enseñanza de las matemáticas. Para ello observaron a 4 profesores de secundaria estudiando el impacto que tenían sus creencias en su manera de enseñar. Sin embargo, no se conoce hasta el momento ningún estudio que aborde la problemática relativa a las dificultades que pueden tener los profesores para la comprensión del concepto de variable, así como para lograr un manejo flexible de la variable y, menos aún, acerca de la manera en la que los profesores de matemáticas enseñan este importante concepto. Más recientemente, estos tres aspectos de la variable han servido como base para elaborar una propuesta para la enseñanza del álgebra elemental, conocido en el medio académico como Modelo 3UV (Ursini et al, 2005).

Podría pensarse que un estudio con profesores de matemáticas de secundaria en relación con un concepto matemático no tenga la justificación debida, puesto que se suele creer que un profesor de matemáticas debe dominar los contenidos que enseña. Es por ello que consideramos importante desarrollar la presente investigación ya que nos proporcionó información muy valiosa acerca de algunas de las causas que podrían haber originado tan bajo desempeño en los profesores.

3. Marco teórico

Como marco teórico para la presente investigación, se utilizó el Modelo 3UV. En este modelo se presenta una descomposición del concepto de variable en el cual se incluyen, la capacidad de interpretación, simbolización y manipulación de cada uno de los 3 usos de la variable considerados, a saber: variable como incógnita específica, variable como número general y variables en relación funcional. Dichos aspectos aparecen de manera esquemática a continuación:

3.1 Variable como incógnita específica

Se considerará que un manejo adecuado de la variable como incógnita específica implica:

- reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;

- interpretar el símbolo que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;
- sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;
- determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;
- identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una situación.

No obstante que algunos autores argumentan que una incógnita no puede ser considerada como variable (Schoenfeld y Arcavi, 1988), para esta investigación asumimos que una incógnita puede ser considerada como variable porque, mentalmente o de hecho, se realizan operaciones sobre ella para eventualmente poder determinar su valor, cuando se encuentra en una ecuación y al ejecutar estas operaciones se considera a la literal como un ente que puede tomar cualquier valor.

3.2 Variable como número general

Se considera que un manejo adecuado de la variable como número general implica:

- reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas
- interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado;
- desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variantes de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;
- manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

3.3 Variables en relación funcional

Se considera que un manejo adecuado de las variables en relación funcional implica:

- reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;
- determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;
- determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;
- reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;
- determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;
- expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.

El modelo presentado sirvió para analizar las respuestas que dieron los profesores. Esto permitió entender mejor la interpretación y el manejo que tienen los profesores de matemáticas de secundaria en torno al concepto de variable. También fue útil para averiguar las dificultades más comunes que tienen dichos profesores.

4. Metodología

Con el fin de averiguar las diversas interpretaciones del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria se aplicó un cuestionario previamente diseñado y validado a una población de 74 profesores de matemáticas de secundaria. Posteriormente se realizó el análisis tanto cuantitativo como cualitativo de las respuestas a este cuestionario. Finalmente se realizaron entrevistas a 6 profesores y se llevó a cabo el análisis e interpretación de las mismas.

4.1 Características de los participantes

Los sujetos que consideramos para este estudio son 74 profesores de matemáticas de secundaria en activo pertenecientes a secundarias tanto generales como técnicas del sistema público. Algunos de ellos se les localizó en sus propias escuelas y otros se les encontró en distintos Centros de Maestros, tanto de la ciudad de Puebla como del D. F., así como en el Centro de Actualización del Magisterio (CAM) del D. F.

De la población total de profesores, 41 de ellos, esto es el 56% de la población del estudio, cuentan con la Especialidad en Matemáticas de Normal Superior; 23 profesores, es decir, el 31% del total, son egresados de alguna carrera universitaria entre las que podemos citar: Ingeniero Textil, Ingeniero Mecánico-Eléctrico, Arquitecto, Ingeniero en Electrónica; 4 profesores, que representan el 5%, cuentan con la preparación de Normal Primaria y los 6 restantes, esto es, el 8%, no dieron este dato.

La antigüedad en el servicio docente es un factor importante en la trayectoria de cualquier profesor de educación básica pues nos dice cuál es la experiencia que ha acumulado el docente. Asimismo, la antigüedad en el servicio tiene un papel relevante en el mecanismo que permite al profesor acceder a otro tipo de ingresos. Casi una tercera parte de la población estudiada (24 profesores) cuenta con menos de 7.5 años de servicio; 14 profesores se encontraban entre 7.5 y 14.5 años de servicio; 16 profesores se localizaron entre 14.5 y 21.5 años de servicio; en los tres grupos restantes se aprecia una disminución gradual en el número de profesores, 11 profesores se encuentran entre 21.5 y 28.5 años de servicio; 6 profesores se ubican entre 28.5 y 35.5 años y 1 profesor con 39 años de antigüedad está entre 35.5 y 42.5 años de servicio; 2 profesores no proporcionaron este dato. De acuerdo con estos datos se puede concluir que la población estudiada es en su mayoría joven, tanto en edad como en antigüedad.

4.2 Instrumentos

4.2.1 El cuestionario

El instrumento que se utilizó para estudiar la interpretación de la noción de variable en la población descrita es el cuestionario de 65 preguntas abiertas que fue usado previamente en una investigación con estudiantes universitarios (Ursini y Trigueros, 1998). Dicho cuestionario contiene preguntas relacionadas con los tres diferentes usos de la variable: incógnita específica, número general y en relación funcional. Para cada uno de estos usos se incluyen aspectos que permiten diagnosticar la capacidad de interpretar correctamente la variable involucrada, simbolizar una situación en la que aparece cierta caracterización de la variable y manipular las variables que aparecen en las expresiones. El cuestionario contiene 16 preguntas relativas al uso de la variable como incógnita específica, 20 corresponden al uso de la variable como número general y 29 son relativas al uso de variables en relación funcional.

4.2.2 Las entrevistas

Una vez concluida la concentración en tablas de las respuestas dadas por los 74 profesores al cuestionario se procedió a realizar las entrevistas clínicas a 6 de los sujetos de estudio. Dichas entrevistas fueron grabadas en audio. Los profesores entrevistados fueron seleccionados de acuerdo con el porcentaje promedio de respuestas correctas dadas al cuestionario de tal forma que dicho porcentaje estuviera cercano al promedio general. Además de dicho criterio, los sujetos fueron seleccionados atendiendo a la disponibilidad de tiempo con la que contaban y a la disposición para ser entrevistados. Los profesores elegidos fueron invitados personalmente y se les pidió autorización previa para grabar la entrevista. Cabe mencionar que a los 6 profesores se les entrevistó en sus lugares de trabajo y que cedieron amablemente parte de su tiempo. Para las entrevistas se tomaron en cuenta las preguntas del cuestionario que obtuvieron el más bajo porcentaje de respuestas correctas y que, además, fueran las que la mayoría de los profesores había respondido incorrectamente.

La interpretación y el análisis de las entrevistas realizadas se llevó a cabo tomando como marco el Modelo 3UV (Ursini et al, 2005). Esto permitió reconocer las principales dificultades que presentaban los profesores entrevistados en torno al concepto mencionado. La manera en la que se realizó el análisis de las entrevistas consistió en la revisión e interpretación de las transcripciones, considerando en todo momento los diversos aspectos que implican la conceptualización de la variable en sus tres usos.

5. Análisis

5.1 Respuestas de los profesores en cada uso de la variable

Con el objeto de observar y clasificar los errores más comunes que cometen los profesores al trabajar con cada uno de los 3 usos de la variable considerados, se construyeron las tablas que a continuación aparecen. Éstas se elaboraron tomando en cuenta los porcentajes promedio para cada pregunta y se seleccionaron las preguntas que tuvieron los porcentajes promedio más bajos de aciertos. En ellas aparecen los porcentajes promedio de respuestas correctas, incorrectas y omisiones, así como algunos ejemplos de respuestas incorrectas típicas de por lo menos dos profesores así como el número de éstos que dieron el tipo de respuesta indicado.

5.2 Variable como número general

De acuerdo con las respuestas de la Tabla 2 podemos observar que las dificultades que muestran los profesores al enfrentarse a la variable como número general están relacionadas con la capacidad para interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado (preguntas 4, 13 y 34). Nótese que en el caso de la pregunta 4, 27 profesores de un total de 51 dieron su respuesta a través de la relación funcional $\frac{x}{5} = y + 7$, mientras que si hubieran escrito primero la igualdad $\frac{x}{5} = y$ y después $y + 7$, la respuesta sería correcta. Dicho tipo de respuesta sugiere que los profesores tienen dificultad para operar con la expresión $\frac{x}{5}$, la cual contiene una operación indicada y no ejecutada. Resalta el hecho de que este tipo de respuesta se encontró con alumnos de secundaria, de bachillerato y estudiantes universitarios, (ver Lozano, 1998; López, 1996 y Ursini y Trigueros, 1998). Cabe mencionar que 27 profesores dieron esta respuesta, lo que coincide con las respuestas que dieron cuatro de los seis profesores que fueron entrevistados. Lo que resalta más en cuanto a las dificultades para contestar esta pregunta es el hecho de que los profesores entrevistados no conciben la expresión ***x/5*** como un objeto con el cual se puede operar, de ahí que lo relacionen con otra variable a través del signo igual. Parece ser que la palabra resultado los induce a escribir el signo de igualdad, como se aprecia en el diálogo siguiente.

Entrevistador: ¿Por qué dice que necesariamente tiene que hallar un resultado?
Profesor 9: Porque así me lo está expresando. Aquí dice: un número desconocido dividido por 5 y el resultado (*enfatiza*) sumado a 7, es lo que yo entiendo que tengo que encontrar un resultado y le tengo que sumar 7.

Pregunta	Respuesta correcta	%Correctas	%Incorrectas	%Omisiones	Ejemplos de incorrectas	Sujetos que dan cada respuesta
4. Escribe una fórmula que exprese: Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7.	*x/5 +7*	27%	69%	4%	$\frac{x}{5} = y + 7$ $\frac{x}{5} = \frac{x}{5} + 7$ $\frac{x}{5} = 7$	27 de 51 3 de 51 4 de 51
13. Para cada una de las siguientes expresiones ¿cuántos valores puede tomar la letra? $(x+1)^2 = x^2+2x+1$	Infinitos	38%	55%	7%	Dos Un valor	18 de 40 9 de 40
34. Observa las siguientes igualdades y completa: $1 + 2 + 3 = 6$ $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ... $1 + 2 + 3 + 4 +...+n =$	$\frac{n(n+1)}{2}$	45%	39%	16%	$\frac{n \times n+1}{2}$	8 de 31
32. ¿Cuántos puntos agregas para pasar de la figura m-ésima a la siguiente?	*2m + 1*	25%	58%	17%	m +2 m + 1	6 de 40 4 de 40

Tabla 2. Respuestas de los profesores a las preguntas de variable como número general

En el caso de la pregunta 13, obsérvese que un buen número de profesores, esto es, 18 de 40 contestaron que esta expresión puede tomar dos valores, mientras que otros 9 profesores respondieron que podría tomar un solo valor. Resalta también el hecho de que 14 profesores respondieron la pregunta 34 sin escribir el paréntesis para separar los dos factores n y $n+1$, así como también quienes utilizaron otra letra para simbolizar el factor consecutivo de la serie $\frac{n \times m}{2}$.

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th>Respuesta correcta</th><th>%Correctas</th><th>%Incorrectas</th><th>%Omisiones</th><th>Ejemplos de incorrectas</th><th>Sujetos que dan cada respuesta</th></tr>
<tr><td>33. Escribe una fórmula que muestre cómo vas agregando puntos hasta llegar a la figura m-ésima</td><td>1, 3, 5, 7, ... ,
2(m –1) + 1,
(2m + 1)</td><td>0%</td><td>66%</td><td>34%</td><td>m + 2

2m + 1</td><td>4 de 47

6 de 47</td></tr>
<tr><td>46. De las siguientes expresiones n + 2 y 2×n ¿Cuál es más grande?</td><td>n + 2 < 2n
cuando n >2
n + 2 >2n
cuando n < 2
n + 2 = 2n
cuando n = 2</td><td>26%</td><td>64%</td><td>10%</td><td>2×n</td><td>35 de 50</td></tr>
<tr><td>47. Justifica tu respuesta</td><td><table><tr><td>n</td><td>n+2</td><td>2xn</td></tr><tr><td>-1</td><td>1</td><td>-2</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr></table></td><td>15%</td><td>78%</td><td>7%</td><td><table><tr><td>n</td><td>n+2</td><td>2xn</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>10</td></tr></table></td><td>47 de 59</td></tr>
</table>

Tabla 2. Respuestas de los profesores a las preguntas de variable como número general

También se aprecia la incapacidad para reconocer patrones en secuencias numéricas (preguntas 32 y 33). Con estas preguntas se observó que varios profesores las contestaron, al parecer, guiados por la secuencia numérica impar que se refiere al número de puntos que se van agregando para pasar de una figura a otra, es decir, se dan cuenta que la sucesión aumenta de dos en dos y por eso escriben $m+2$. Algunos otros escribieron $2m+1$ como respuesta a la pregunta 33 siendo que esta expresión es correcta pero para la pregunta 32. Asimismo se observó cierta debilidad en la noción de continuo numérico cuando los profesores conciben que la letra toma valores dentro de cierto campo numérico, como el de los naturales. Tal es el caso de las preguntas 46 y 47, donde observamos que un número importante de docentes contestaron que la expresión mayor es $2 \times n$ y justificaron su respuesta escribiendo los primeros términos de la serie numérica natural, sin considerar que en el caso $n=1$, $n+2$ es mayor que $2 \times n$ y en el caso $n=2$ ambas expresiones son iguales.

Otra dificultad que mostraron los profesores fue con la pregunta 13. Las respuestas más frecuentes que los profesores dan a esta pregunta fueron “dos” y “un valor”. En coincidencia con lo que Ursini y Trigueros (1998) sugieren, parece ser que los profesores sólo observan que la variable está elevada al cuadrado, por lo que deducen que la letra puede tomar dos valores sin percatarse de que se trata de una identidad. En el caso de la respuesta “un valor” parece ser que los profesores observan el término cuadrático y lo eliminan creyendo que se trata de una ecuación de primer grado.

Se aprecia además, cierta dificultad para interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado y la necesidad de fijar su valor para comprobar la igualdad, en donde la profesora había respondido que la expresión podía tomar dos valores, como podemos verlo en la afirmación siguiente:

Profesora 32: Puedo por ejemplo poner 3 + 1 al cuadrado y volvería a dar lo mismo, al resolver aquí esta ***x*** va a tener el valor de 3, 3 al cuadrado 9 más este por este, este perdón, dos veces el primero por el segundo y me va a dar la igualdad o sea este producto, este binomio al cuadrado, esta es su respuesta, al darle varios valores va a ir cambiando nada más aquí, rectifico mi respuesta.

5.3 Variable como incógnita específica

En la Tabla 3 se puede apreciar que los profesores muestran dificultad para determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias (pregunta 59), lo cual se observa con el tipo de respuesta incorrecta más frecuente: $y = 6$. Nótese que aunque este aspecto de la variable se trata con mayor atención en la escuela, parece ser que sigue representando dificultades para los profesores. En el caso de la pregunta 14, se aprecia un buen número de profesores contestaron que la letra puede tomar dos valores, lo que parece indicar que su respuesta se vio influenciada por la presencia del término cuadrático en la ecuación, sin percatarse que se trataba de una ecuación de primer grado. En las preguntas 16 y 18 se observa la dificultad que tienen los maestros para determinar los valores de la incógnita, pues sólo consideraron el valor positivo y denotan además, cierta tendencia a evitar las operaciones algebraicas o aritméticas. En el caso de la pregunta 50 se puede ver una clara tendencia a resolver el problema mediante procedimientos aritméticos y a evitar plantear la ecuación. Nótese que, no obstante que en la pregunta se pedía escribir una fórmula para resolver el problema, los profesores lo resolvieron aritméticamente e incluso hubo algunos que intentaron medir el lado del cuadrado sombreado durante la resolución del cuestionario. En el caso de la pregunta 52 se observa la dificultad para plantear una ecuación que resuelve el problema así como la tendencia a resolverlo mediante procedimientos aritméticos, lo cual se comprueba por la respuesta más común: 125. También se aprecia que cuatro maestros consideraron como una fórmula que resuelve el problema a la igualdad km = (40-25)/0.12 en la que parece ser que el símbolo km es considerado como una incógnita.

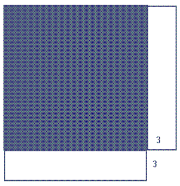
Pregunta	Respuesta correcta	%Correctas	%Incorrectas	%Omisiones	Ejemplos de incorrectas	Sujetos que dan cada respuesta
14. Para cada una de las siguientes expresiones ¿cuántos valores puede tomar la letra? $4 + x^2 = x(x + 1)$	uno	33%	60%	7%	dos	28 de 40
16. Para cada una de las siguientes expresiones escribe los valores que puede tomar la letra: $(x + 3)^2 = 36$	3 y -6	34%	64%	2%	x = 3	17 de 46
18. $\frac{10}{1+x^2} = 2$	2 y -2	31%	61%	8%	x = 2	22 de 45
50. Escribe una fórmula para resolver los siguientes problemas: El área total de la figura es 27. Calcula el lado del cuadrado sombreado. 	$x^2 + 6x = 27$	11%	61%	28%	L = $\sqrt{27}$ 5 A = $\sqrt{27}$ A = $(x - 3)^2$	3 de 45 7 de 45 2 de 45 2 de 45
52. Escribe una fórmula para resolver los siguientes problemas. Rentar un automóvil cuesta $25 por día, más $0.12 por km. ¿Cuántos kilómetros puede manejar Diego en un día, si sólo dispone de $40.	0.12**x** + 25 = 40	13%	67%	20%	125 Km =(40-25)/0.12	26 de 48 4 de 48
59. Dada la expresión 40–15x–3y=17y–5x ¿Cuál es el valor de **y** para **x** = 16?	**y**=-6	37%	33%	30%	6 -60	6 de 24 3 de 24

Tabla 3. Respuestas de los profesores a las preguntas de variable como incógnita

Para contestar esta pregunta se requiere que los profesores reconozcan e identifiquen en el problema la existencia de algo desconocido, asimismo identifiquen claramente cuál es la incógnita en este problema y la representen simbólicamente en una ecuación.

Aquí se ponen en evidencia dificultades que encuentran los profesores para conceptualizar la variable como incógnita cuando se enfrentan a problemas de tipo verbal. Esto se manifiesta por la diversidad de respuestas incorrectas y por la tendencia a resolver el problema por procedimientos aritméticos sin plantear una ecuación que puede llevarlos a la solución. Ejemplificamos lo anterior con el diálogo siguiente.

Entrevistador: Bueno entonces vamos a otra, la número 50 dice, el área total de la figura es 27 calcula el lado del cuadrado sombreado, pero para esto hay que escribir una expresión que me resuelva el problema, entonces su respuesta fue que, que sería 9 cm, ¿por qué considera que eso mide el lado del cuadrado?...

Profesora 32: Si le restamos estas áreas (*señala los rectángulos y el área del cuadradito que se forma al completar la figura con un cuadradito de 3x3*) daría esto (*señala el cuadrado sombreado*) ¿sí?, entonces si sacamos la raíz de 27, ¿cuánto sería? (*utiliza una calculadora*) sería 5.19 aproximadamente ¿sí?, menos los 3 cm que tiene aquí, porque se supone que este pedacito marca 3, mide 3 ¿no?, 3 x 3, si le quito este pedazo de 3, de aquí de cada lado, sería menos 3, sería 9, 2.19, 27... sería 2.19 por 2.19 daría ah no, pero no da, 4.79, no como que no me queda.

En el siguiente diálogo podemos observar que el profesor utiliza un símbolo para representar “una cantidad desconocida”, sin embargo ésta no corresponde con la incógnita del problema.

Profesor 15: Tomé como ***x***, o sea porque nada más me dan la medida de éste, de esta parte (*se refiere a la medida del ancho del rectángulo no sombreado*), entonces tomo como, como una cantidad desconocida a este lado de este cuadrado completo (*señala el cuadrado completado con un cuadradito de 3x3*) como ***x***, y le resté ésta que sí conozco (*señala el 3*) de los dos lados, quedaría acá, aquí quedaría este 3, entonces le quito este 3 y me queda, perdón éste, y éste también de esta parte y de este lado le quito éste, entonces me quedaría ***x*** – 3 y pues ya nada más lo elevé al cuadrado por el área de un cuadrado de lado por lado.

5.4 Variables en relación funcional

La Tabla 4 incluye un número mayor de preguntas que en las otras tablas, lo cual nos indica que éste es el uso de la variable con el que los profesores tienen mayores dificultades. Podemos decir que los profesores presentan dificultades para determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente (pregunta 54 y 65). Esto se observa en el tipo de respuestas que dieron los profesores para estas dos preguntas. En el primer caso se pedía encontrar el valor de x para el cual y alcanza su valor máximo cuando la relación se da en forma de tabla. Cuando se les pidió que determinaran el valor de x para el cual se obtiene el valor mínimo de y en forma gráfica, 15 de 32 profesores que contestaron incorrectamente escribieron $x = 0$. También se aprecia la incapacidad para expresar una relación funcional analíticamente a partir de los datos de un problema (pregunta 48), pues varios profesores respondieron estas preguntas con una diversidad de expresiones incorrectas como por ejemplo: $y = kx$, $v = at$, en el caso de la pregunta 43 y 1Kg:4cm para la pregunta 48. Se observa asimismo cierta incapacidad para reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación cuando se presenta en forma de tabla (pregunta 53).

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th>Respuesta correcta</th><th>%Correctas</th><th>%Incorrectas</th><th>%Omisiones</th><th>Ejemplos de incorrectas</th><th>Sujetos que dan cada respuesta</th></tr>
<tr><td>44. Considera la siguiente expresión: y= 3 + x Si queremos que los valores de y sean mayores que 3 pero más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar x?</td><td>0< x < 7</td><td>16%</td><td>74%</td><td>9%</td><td>1, 2, 3, 4, 5, 6</td><td>30 de 56</td></tr>
<tr><td>45. Si x toma valores entre 8 y 15, ¿entre qué valores caerán los valores de y?</td><td>11≤ y ≤18</td><td>46%</td><td>39%</td><td>15%</td><td>11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18</td><td>9 de 28</td></tr>
<tr><td>48. El peso de la mercancía que se compra en el mercado se mide con una báscula. En el puesto de Don Panchito, por cada kilogramo de peso la charola de la báscula se desplaza 4 cm. Encuentra la relación entre el peso de la compra y el desplazamiento de la charola.</td><td>d(p)=4p</td><td>21%</td><td>61%</td><td>18%</td><td>1Kg:4 cm</td><td>14 de 44</td></tr>
<tr><td>Observa los datos siguientes (para las preguntas 53, 54, 57 y 58).
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>10</td><td>100</td></tr>
<tr><td>-15</td><td>225</td></tr>
<tr><td>25</td><td>625</td></tr>
<tr><td>20</td><td>400</td></tr>
<tr><td>-10</td><td>100</td></tr>
<tr><td>15</td><td>225</td></tr>
<tr><td>-20</td><td>400</td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>54. Para qué valor de x, alcanza y su valor máximo?</td><td>$x = \pm 25$</td><td>6%</td><td>78%</td><td>16%</td><td>25
+20 y -20</td><td>38 de 58</td></tr>
</table>

Tabla 4. Respuestas de los profesores a las preguntas de variable en relación funcional

Obsérvese que la mayoría de los profesores respondieron que el valor de *y* aumenta, sin percatarse que parte de los valores de *y* también disminuyen. Lo mismo puede apreciarse cuando la relación se presenta en forma gráfica (preguntas 62 y 63). Otra dificultad que presentan los profesores es la incapacidad para determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra (pregunta 44, 45, 57, 58, 60 y 61). Nótese que en caso de la pregunta 44 y la pregunta 45, los profesores respondieron con un intervalo discreto, lo cual denota debilidad en la noción de continuo numérico. Se aprecian también dificultades con la variación conjunta y se observa la tendencia a fijar la atención en los extremos de la función, sin analizar lo que sucede en el interior del intervalo, como lo muestran las respuestas de las preguntas 57 y 58. Se observan asimismo dificultades para determinar los intervalos de variación por el tipo de respuestas que dan a las preguntas 60 y 61.

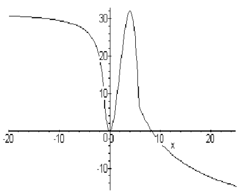
Pregunta	Respuesta correcta	%Correctas	%Incorrectas	%Omisiones	Ejemplos de incorrectas	Sujetos que dan cada respuesta
57. Si queremos que el valor de **y** esté entre 256 y 10000 ¿entre qué valores tiene que estar **x**?	$-100 \leq \mathbf{x} \leq 16$ $16 \leq \mathbf{x} \leq 100$	6%	63%	31%	16 y 100 $16<\mathbf{x}<100$	19 de 45 5 de 45
58. Si ***x*** toma valores entre -2 y 26 ¿entre qué valores estará ***y***?	$0 \leq \mathbf{y} \leq 676$	8%	64%	28%	4 y 676 $4 < \mathbf{y} < 676$	24 de 45 4 de 45
60. Para que el valor de **y** esté entre 1 y 5 ¿entre qué valores debe estar **x**?	$-6 \leq \boldsymbol{x} \leq 2$	16%	33%	61%	6 y 14 $-6 < x < -2$	2 de 27 2 de 27
61. Supón que **x** toma valores entre –5 y 5, ¿para qué valor de **x** alcanza **y** su valor máximo?	$\boldsymbol{x} = -5$	25%	27%	48%	$x = 5$	7 de 18
Dada la siguiente gráfica:  62. ¿Entre qué valores de **x**, los valores de **y** crecen?	$0< \mathbf{x} \leq 5$	39%	37%	23%	De 0 a 10 0 a 5 y 0 a -20	4 de 27 3 de 27

Tabla 4. Respuestas de los profesores a las preguntas de variable en relación funcional

Pregunta	Respuesta correcta	%Correctas	%Incorrectas	%Omisiones	Ejemplos de incorrectas	Sujetos que dan cada respuesta
En la misma gráfica. 63. ¿Entre qué valores de **x**, los valores de **y** decrecen?	$-20 \leq \mathbf{x} < 0$ $5 < \mathbf{x} \leq 25$	22%	51%	27%	5 y 10 cuando x > 5	5 de 39 5 de 39
En la misma gráfica. 65. ¿Para qué valor de **x** se obtiene el valor mínimo de **y**?	**x**=25	28%	45%	27%	0	15 de 32

Tabla 4. Respuestas de los profesores a las preguntas de variable en relación funcional

Como ejemplo de análisis presentamos la respuesta más frecuente a la pregunta 44. Esta fue: "1, 2, 3, 4, 5 y 6". Cabe mencionar que este tipo de respuesta se encontró con estudiantes de primer grado de secundaria, de quienes se puede aceptar esta respuesta como correcta dado el manejo limitado que tienen del continuo numérico, lo que no debería suceder con los profesores. Hubo 30 profesores del total de 74 que contestaron de tal forma. En un primer acercamiento podemos observar que los profesores que respondieron así tienen dificultad para concebir al intervalo de variación de una de las variables que intervienen en esta relación cuando se conoce el intervalo en el que se mueve la otra. Esto se manifiesta en el tipo de respuesta que dan: enlistan sólo los enteros que forman parte del intervalo. Esta clase de respuesta revela una debilidad en la noción del continuo numérico y una concepción discreta de la relación, lo cual ha sido ya reportado en otras investigaciones en las que se analizaron las respuestas dadas a esta pregunta por alumnos del primer semestre universitario (Ursini y Trigueros, 1998). Asimismo se aprecian dificultades para reconocer la variación conjunta, lo que se observa en el diálogo siguiente.

Profesor 33: Mayores que 3 pero más pequeños que 10, porque me está definiendo acá mayores que 3 pero a la vez esos tienen que ser pequeños, o sea más chicos que 10, por eso es que tomé 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Entrevistador: O sea que ¿esos son los valores que podía tomar *x*?

Profesor 33: Ajá.

Cabe mencionar que la secuencia numérica que dio el profesor evidentemente se refiere a los valores enteros de la variable dependiente, ***y***. Se ignora por completo la relación con la variable independiente **x**, para la cual tenía que determinar los valores posibles.

Otro ejemplo donde se aprecia la dificultad para determinar el intervalo de variación se observa en el diálogo siguiente.

Profesor 14: Bueno, aquí tenemos que la variable puede tomar también valores enteros y valores fraccionarios, o sea siempre y cuando la suma eh...perdón sí la suma de los valores de

x más la constante que es 3 cumpla las condiciones, las condiciones que tenemos que debe ser mayor que 3 y menores que 10 el valor ¿de quién?, de y, también pueden ser valores enteros y fracciones.

Entrevistador: ¿Nada más?, o sea le pregunto esto por la manera en la que lo expresó, o sea...¿serían 6 valores? como están indicados aquí 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Profesor 14: No, además los equivalentes fraccionarios, ¿sí? Sus equivalentes fraccionarios, por ejemplo sería 2/2, 4/2, 6/2, etc., o sea esos serían sus valores.

Lo que se percibe aquí es que este profesor parece tener la noción del continuo numérico cuando expresa que la variable independiente puede tomar valores enteros y fraccionarios, sin embargo, considera que tal noción se sustenta en la clase de equivalencia de los enteros que forman parte del intervalo. Esto se aprecia cuando menciona que habría más valores de la variable y que éstos podrían ser los equivalentes fraccionarios.

6. Conclusiones y reflexiones

En este aparatado se presentan las conclusiones derivadas tanto del análisis cuantitativo como del análisis cualitativo de los resultados encontrados con la población de profesores ya descrita. Asimismo se comentan algunas reflexiones en torno a la posibilidad de mejorar la actualización de los profesores de matemáticas de secundaria a través de la realización de talleres breves.

Realizar un estudio que involucre a profesores de educación secundaria no es tarea fácil. Una de las razones por lo que esto sucede es que los profesores muestran resistencia a ser cuestionados en la mayoría de los casos. Esto lo pudimos constatar cuando se les solicitaba a otros profesores dar la entrevista, quienes respondían que la falta de tiempo era su principal obstáculo. Otra razón es que los profesores no estaban por lo general dispuestos a contestar un cuestionario tan largo, ya que para resolverlo se requería de aproximadamente 2 horas. Sin embargo, creemos que gran parte del objetivo principal de este estudio fue logrado.

Uno de los primeros hechos que consideramos importante resaltar es que el porcentaje promedio de respuestas correctas a las preguntas del cuestionario fue de 52.7% lo que indica que la mayoría de los profesores tienen una pobre comprensión del concepto de variable. Cabe mencionar también que el 65% de los profesores contestó correctamente menos del 60% de las preguntas y que ninguno de ellos contestó correctamente el 100% de las preguntas del cuestionario.

Cuando se analizan los datos tomando como variable el género de la población estudiada, se encuentra que los profesores obtienen un porcentaje promedio de aciertos más alto que las profesoras. La diferencia entre los porcentajes promedio obtenidos por ambos grupos es de 13% aproximadamente. No obstante, al no ser éste un estudio de género no se profundizó en el por qué de dicha diferencia y nos limitamos a presentar los resultados. Sin embargo estos resultados llaman la atención y consideramos que ameritarían un estudio más profundo.

Acerca de los porcentajes de respuestas correctas dadas a cada pregunta del cuestionario, podemos decir que ninguna de las preguntas fue respondida correctamente por el total de los profesores. También destaca el hecho de que sólo una pregunta, que se refiere a patrones visuales y su generalización, no pudo ser contestada correctamente por ninguno de los profesores.

Los porcentajes promedio de respuestas correctas de acuerdo con cada uno de los usos de la variable muestran que las mayores dificultades se presentan cuando los profesores se enfrentan a las variables en relación funcional (49.1% de aciertos). Al trabajar con la incógnita específica alcanzaron un 52.3% de aciertos. El porcentaje promedio de aciertos que alcanzaron al trabajar con la variable como número general fue de 58.2% de aciertos. Estos resultados sugieren que este último uso de la variable es el que los profesores manejan mejor. Sin embargo, un análisis detallado de las preguntas que involucran este uso de la variable indica que los profesores contestan correctamente aquellas que implican la manipulación, aspecto en el que se pone mucho énfasis en la enseñanza secundaria. Los profesores son capaces de interpretar el símbolo como una representación de un objeto indeterminado y de manipularlo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas simples. No obstante, cuando la complejidad de la expresión aumenta los profesores presentan dificultades en la interpretación y la simbolización. Cuando se trataba de problemas donde se requería reconocer secuencias, pudo apreciarse la incapacidad para simbolizar dichos patrones. Así por ejemplo, la pregunta número 33 que implicaba expresar analíticamente la regla general de una secuencia visual obtuvo un 0% de aciertos.

La interpretación de los profesores sobre la variable como incógnita parece tener aún más dificultades que cuando se trata de número general. Esto se refleja por la clara tendencia de los profesores a evitar simbolizar la incógnita y recurrir a procedimientos aritméticos para resolver un problema. Tienen dificultades para interpretar la incógnita en problemas, así como para simbolizarla involucrándola en una ecuación. Cabe señalar, sin embargo, que a este uso de la variable se le da el mayor énfasis a lo largo de la enseñanza secundaria, pero por lo general se observan dificultades con este aspecto, debido quizá a que dicha manipulación se realiza sin sentido y significado para el que aprende.

Finalmente como ya se señaló, la variable en relación funcional presenta el más bajo porcentaje promedio de aciertos. Esto parece indicar que para los profesores este uso de la variable es el que presenta mayores dificultades. Se observó que la mayoría de ellos son capaces de trabajar con la idea de variación cuando ésta se presenta en forma de tabla así como de reconocer la correspondencia entre cantidades. Sin embargo, cuando se trató de determinar intervalos de variación, reconocer la variación conjunta en forma gráfica o de expresar de manera analítica una relación funcional, los profesores presentaron diversas dificultades que reflejan una escasa comprensión y manejo adecuado de este uso de la variable.

Los resultados de esta investigación sugieren que los profesores de matemáticas de secundaria no tienen un buen manejo de los tres usos de la variable estudiados. Si bien se observó que son capaces de reconocer el papel de la variable en expresiones y problemas simples, un aumento leve en la complejidad de los mismos provoca generalizaciones inadecuadas y la tendencia a buscar soluciones memorizadas o a emplear procedimientos aritméticos.

Gran parte de los estudios que se han realizado hasta ahora pusieron de manifiesto las diversas dificultades que tienen los estudiantes cuando trabajan con el álgebra. Los resultados de este estudio sugieren que dichas dificultades podrían ser causadas por la poca comprensión que tiene el profesor de los diferentes aspectos de la variable y que al momento de enseñar los contenidos esta misma incomprensión es transmitida a los alumnos sin que el profesor sea consciente de ello. Por otro lado, creemos que los profesores de matemáticas de secundaria tienen ahora más oportunidades para mejorar la comprensión de algunos temas que involucran el concepto de variable, a través de los cursos estatales y nacionales de actualización, así como con los talleres breves. Esta última modalidad ha tenido gran aceptación entre los profesores, pues en ella se trabaja en un ambiente que permite compartir el conocimiento con otros profesores y superar algunas dificultades que se manifiestan en el desarrollo del mismo. Los resultados del presente trabajo nos permiten sugerir la conveniencia de utilizar esta modalidad para abordar los diferentes contenidos en que aparecen los distintos usos de la variable y así tratar de ayudar a los profesores a desarrollar una mejor comprensión y manejo de este concepto, fundamental para un dominio adecuado del álgebra y de la mayoría de las ramas de las matemáticas elementales y avanzadas.

Bibliografía

Booth, L. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. *The Ideas of Algebra, K-12*. 20-32. NCTM.

Cooney, J. T., Shealy, B. E. y Arvold, B. (1998). Conceptualizing Belief Structures of Preservice Secondary Mathematics Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 306-333

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1981). Function Concepts: intuitive baseline. *Proceedings of the V PME International Conference*, 183-188. Grenoble, France.

English, L. y Warren, E. (1998). Introducing the Variable through Pattern Exploration, *The Mathematics Teacher*, 91, 166-170.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Juárez, J. A. (2002). *La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis de Maestría no publicada. DME. Cinvestav-IPN: México.

Kieran, C. (1984). Cognitive Mechanisms Underlying the Equation-solving Errors of Algebra Novices, *Proceedings of the VIII PME International Conference*, 70-77. Sydney, Australia.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra, en A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 11-49. Sense Publishers: UK

Küchemann, D. (1980). *The Understanding of Generalized Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children*, PhD Thesis, University of London.

López, A. L. (1996). *Construcción de la noción de variable algebraica el alumnos de nivel medio superior*. Tesis de Maestría no publicada. UAQ: México.

Lozano, D. (1998). *El concepto de variable: evolución a lo largo de la instrucción matemática*. Tesis de Licenciatura no publicada. ITAM: México.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). Seeing a Pattern and Writting a Rule, en Hirabayashi, I., Nohda, N., Shigematsu, K., y Lin, F. (Eds.), *Proceedings of the XVII PME International Conference*, 181-188. Ibaraki, Japan.

MacGregor. M. y Stacey, K. (1996). Learning to Formulate Equations for Problems, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (Eds.), *Proceedings of the XX PME International Conference*, 289-296. Valencia, España.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (1985). *Routs to/Roots of Algebra*. Open University Press: Great Britain.

Matos, A. y Da Ponte, J. P. (2008). O estudio de relaçoes funcionais e o desenvolvimento do conceito de variable em alunos do 8º. ano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11 (2), 195-231.

Matz, M. (1980). Towards a Computational Theory of Algebraic Competence, *Journal of Mathematical Behavior*, 3 (1), 93-166.

Nathan, M. J. y Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and Researchers' Beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 168-190.

Philipp, R. A. (1992). The Many Uses of Algebraic Variables, *Mathematics Teacher*, 85, 557-561.

Philipp, R. A. y Schappelle, B. P. (1999). Algebra as Generalized Arithmetic: Starting with the Known for a Change, *The Mathematics Teacher*, 92, 310-316.

Rosnick, P. (1981). Some Misconceptions Concerning the Concept of Variable, *Mathematics Teacher*, 74, 418-420.

Schoenfeld, A. H. y Arcavi, A. (1988). On the meaning of Variable, *Mathematics Teacher*, 81, 420-427.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1996). Origins of students' interpretations of algebraic notation, en Puig, L. y Gutiérrez, A. (Eds.), *Proceedings of the XX PME International Conference*, 297-304. Valencia, España.

Stacey, K. y MacGregor, M. (1997a). Ideas about Symbolism that Students bring to Algebra, *The Mathematics Teacher*, 90, 110-113

Stacey, K. y MacGregor, M. (1997b). Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students use of Algebra, en Pehkonen, E. (Ed.), *Proceedings of the XXI PME International Conference*, 190-197. Lahti, Finland.

Trigueros, M. y Ursini, S. (1999). Does the understanding of variable evolve through schooling?, en Zaslavsky, O. (Ed.), *Proceedings of the XXIII PME International Conference*, 273-280. Haifa, Israel.

Trigueros, M., Ursini, S. y Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática*, 12 (2), 27-48.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un Cuestionario de Diagnóstico acerca del Manejo del Concepto de Variable en el Álgebra. *Enseñanza de las Ciencias*, 14 (3), 351-363.

Ursini, S. (1990). Generalization processes in elementary algebra: Interpretation and Symbolization, en Booker, G., Cobb, P. y Mendicuti, T. N. (Eds.), *Proceedings of the XIV PME International Conference*, 149-156. México.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática*. 6 (3), 90-108.

Ursini, S. y Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable: A study with starting college students. *Proceedings of the XXI PME International Conference*, 254-261. Lahti, Finlandia.

Ursini, S. y Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. 445-463. Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas?. *Educación Matemática*. 18 (3), 5-38.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. Trillas: México.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The Ideas of Algebra, K-12*. 8-19 NCTM.

Wagner, S. (1981). An Analytical Framework for Mathematical Variables, en *Proceedings of the V PME International Conference*, 165-170. Grenoble, France.

Wagner, S. (1983). What are These Things Called Variables?, *Mathematics Teacher*, 76, 474-479.

Warren, E. (1995). The development of elementary algebraic understanding, en Meira, L. and Carraher, D. (Eds.) *Proceedings of the XIX PME International Conference*, 98-105. Recife, Brasil.

Warren, E. (1999). The concept of a variable; gauging students' understanding, en Zaslavsky, O. (Ed.), *Proceedings of the XXIII PME International Conference*, 313-320. Haifa, Israel.

José Antonio Juárez López, Nació en el Estado de Puebla, México. Es Profesor del posgrado en el Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG), es Licenciado en Educación Matemática por la Escuela Normal Superior del Estado de Puebla, es Maestro y Doctor en Ciencias, especialidad en Matemática Educativa por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Trabaja en las líneas de investigación: Estrategias de cálculo mental, Didáctica del álgebra y Actitudes hacia las matemáticas.